Kétváltozós függvény helyi szélsőértéke

Elmélet

Theorem 1 (Tétel) *Legyen* $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in dom(f)$ *és* f *értelmezve van az az* $(x_0, y_0) \in dom(f)$ *valamely* $K_\varepsilon(x_0, y_0)$ *környezetében. Tegyük fel, hogy az* f *függvény* $2-$*szer folytonosan differenciálható az* (x_0, y_0) *pontban, továbbá*

$$D_1 f(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

Ha

$$D_1^2 f(x_0, y_0) D_2^2 f(x_0, y_0) - (D_1 D_2 f(x_0, y_0))^2 > 0$$

akkor (x_0, y_0) $f-$*nek lokális szélsőértékhelye, mégpedig ha*

$$D_1^2 f(x_0, y_0) > 0,$$

akkor lokális minimumhelye, ha pedig

$$D_1^2 f(x_0, y_0) < 0,$$

akkor lokális maximumhelye. Ha

$$D_1^2 f(x_0, y_0) D_2^2 f(x_0, y_0) - (D_1 D_2 f(x_0, y_0))^2 < 0$$

akkor (x_0, y_0) $f-$*nek nem lokális szélsőértékhelye.*

Feladatok Adja meg az f lokális szélsőértékhelyeit!

1. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\ln\left(y^2+1\right) - x\ln(x) + x + \frac{2}{5}y^5.$$

2. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y\ln\left(x^2+1\right) - y\ln(y) + y + \frac{2}{3}x^3.$$

3. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \ln(x) - \frac{6y^2}{x} + y^2 - x.$$

4. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{8x^2+1}{y} + x^2y^2 + y.$$

5. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{8y^2+1}{x} + x^2y^2 + x.$$

6. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{2}{x} + \frac{5}{6}\ln(y) + 3xy + y.$$

7. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = -\frac{3}{y} - \frac{7}{6}\ln(x) - 2xy + x.$$

8. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{y}{x+1} + \frac{4}{y^2} + xy.$$

9.

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{2}{x} + \frac{2x}{y} + y^2.$$

10.

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = 4\ln\left(x\right) + \frac{4}{xy} + 2y^2.$$

11.

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \left(x + y^2\right) e^{x-2y}.$$

12.

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = -\frac{6y^2}{x} + y^2 - x.$$

13.

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{x^2}{y} + 4\ln\left(x + y\right).$$

14.

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{x}{y} + \frac{1}{9}x^2 y + x.$$