Függvények határértéke, folytonossága

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Egy $a \in \mathbb{R}$ pont $\varepsilon-$**sugarú pontozott környezet**én*

$$P_{\varepsilon}(a) = K_{\varepsilon}(a) \setminus \{a\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$$

alakú halmazt értjük, ahol $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Definition 2 (Definíció) *A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **függvény határértéké**nek nevezzük az $a \in \bar{\mathbb{R}}$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in dom f$, $x_n \neq a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata $b-$hez tart.*

Jelölés:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Definition 3 (Definíció) *A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **függvény jobb oldali határértéké**nek nevezzük az $a \in [-\infty, \infty)$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely jobb oldali pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in dom f$, $x_n > a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata $b-$hez tart.*

Jelölés:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b.$$

Definition 4 (Definíció) *A $b \in \bar{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **függvény bal oldali határértéké**nek nevezzük az $a \in (-\infty, \infty]$ pontban, ha az f függvény értelmezve van az a pont valamely bal oldali pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in dom f$, $x_n < a$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata $b-$hez tart.*

Jelölés:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b.$$

Theorem 5 (Tétel) ***A határértékszámítás szabályai***

Legyen $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)},$$

feltéve, hogy $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ létezik, illetve a jobb oldalon szereplő művelet értelmezve van $\bar{\mathbb{R}}-ban$.

Nevezetes függvényhatárértékek

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \text{nem létezik}$$

Racionális törtfüggvény határértéke a végtelenben

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=A,$$

ahol $a_k \neq 0 \neq b_m$. Ekkor

$A=0,$	$A=\frac{a_k}{b_m},$	$A=\infty,$	$A=-\infty,$
ha	*ha*	*ha*	*ha*
$m>k$	$k=m$	$k>m$ *és*	$k>m$ *és*
		$a_kb_m>0$	$a_kb_m<0$

Definition 6 (Definíció) *Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt **folytonos**nak nevezzük az $a\in domf$ pontban, ha*

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Azaz létezik a határérték és ez megegyezik a függvényértékkel.

Definition 7 (Definíció) *Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény **jobbról (balról) folytonos** az $a\in domf$ pontban, ha*

$$\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)\quad\left(\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)\right).$$

Theorem 8 (Tétel) *Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos az $a\in domf$ pontban, ha*

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a).$$

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2} \qquad (b)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2} \qquad (d)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}$$

$$(e)\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \qquad (f)\quad \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$(g)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} \qquad (h)\quad \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$$

$$(i)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \qquad (j)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$$

$$(k)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{7x} \qquad (l)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}}$$

$$(j)\quad \lim_{x\to 0} arctg\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (m)\quad \lim_{x\to 0}\arccos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x} \qquad (d)\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}$$

$$(e)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sin(2x)} \qquad (f)\quad \lim_{x\to 0}\frac{tg(2x)}{2x}$$

$$(g)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x} \qquad (h)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{3x}}{x}$$

$$(i)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \qquad (j)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$$

$$(k)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{7x} \qquad (l)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}}$$

3. Folytonos-e az alábbi függvény $0-$nál? Válaszát indokolja!

$$(a)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases} \qquad (b)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(6x)}{\sin^2(3x)}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$