Egyváltozós függvények differenciálszámítása

Elmélet
A differenciálhatóság fogalma

Definition 1 (Definíció) *Legyen az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény értelmezve az* $a \in dom f$ *pont valamely környezetében, és legyen* $x \in dom f \setminus \{a\}$. *Az*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

hányadost az f *függvény* a *és* x *helyekhez tartozó* ***különbségi (differencia) hányadosá****nak nevezzük.*

Definition 2 (Definíció) *Ha a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges, akkor az f *függvény* ***differenciálható*** *az* a *helyen, a határértéket pedig az* f *függvény* a *pontbeli* ***differenciálhányados****ának nevezzük. Jele:* $f'(a)$.

Definition 3 (Definíció) *Az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* a *pontbeli* ***jobb oldali (bal oldali) differenciálhányados****ának nevezzük a*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left(\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

határértéket, feltéve, hogy ez a határérték létezik és véges. Jele: $f'_+(a)$ $\left(f'_-(a)\right)$.

Theorem 4 (Tétel) *Ha az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény és a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen, akkor ugyanolyan az* $f \pm g$, $f \cdot g$ *és a* $g(a) \neq 0$ *feltétel mellett az* $\frac{f}{g}$ *függvény is, mégpedig*

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a), \\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)}.
\end{aligned}$$

Theorem 5 (Tétel) *Ha a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen és az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható a* $g(a)$ *helyen, akkor az* $f \circ g$ *függvény is differenciálható az* a *helyen, mégpedig*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Definition 6 (Definíció) *Ha az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen, akkor az*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

egyenest az f *függvény* a *helyhez tartozó* ***érintő****jének nevezzük.*

Elemi függvények deriváltjai

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$$c, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$$

Feladatok

1. A definíció alapján határozza meg az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = tg(x-1)$ függvény deriváltját az 1−nél.

2. Differenciálható-e a −2−nél az alábbi függvény?

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((x^{-}2)^2\right)}{x+2}, & x \neq -2 \\ 0, & x = -2 \end{cases}.$$

3. Differenciálható-e a 2−nél az alábbi függvény?

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-1}{x-2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}.$$

4. Adja meg az alábbi függvény deriváltfüggvényét!

(a)
$$f(x) = \sin\sqrt{x} + \frac{\cos x}{\ln x},$$

(b)
$$f(x) = \cos(e^x) + \frac{tgx}{\sqrt[5]{x}},$$

(c)
$$f(x) = \ln(5tgx) + \frac{\cos x}{e^{3x}},$$

(d)
$$f(x) = \frac{ctg(x^3)}{\ln(x)} + \cos(x)\, 2^x,$$

(e)

$$f(x) = \frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{\sin(x)} + tg^5(8x).$$

5. Írja fel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény azon érintőjének az egyenletét, amelynek meredeksége $\frac{1}{4}$.

6. Adja meg az

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

függvény grafikonjának azt az érintőjét, amely illeszkedik a $(0, 1)$ pontra!