Differenciálegyenletek

Elmélet
Szeparálható (szétválasztható) változójú differenciálegyenlet
$T = I_1 \times I_2$ tartományon

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

ahol g folytonos $I_1 - en$, h folytonos $I_2 - n$ és h függvénynek nincs zérushelye $I_2 - n$.

Kezdetiérték probléma megoldása

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)),$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds = \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$$

$$y(s) = r, \quad y'(s)\, ds = dr$$

$$\int \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds = \int \frac{1}{h(r)} dr$$

Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$$

$b(x) = 0$: homogén

$b(x) \neq 0$: inhomogén

Kezdetiérték probléma megoldása

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x),$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{x_0}^{x} a\left(s\right) ds \quad &: \quad = A\left(x\right) \qquad A\left(x_0\right) = 0 \\
& \quad / \cdot e^{-A(x)} \\
y'\left(x\right) e^{-A(x)} &= e^{-A(x)} a\left(x\right) y\left(x\right) + e^{-A(x)} b\left(x\right) \\
y'\left(x\right) e^{-A(x)} - e^{-A(x)} a\left(x\right) y\left(x\right) &= e^{-A(x)} b\left(x\right) \\
\left[y\left(x\right) e^{-A(x)}\right]' &= e^{-A(x)} b\left(x\right) \\
\int\limits_{x_0}^{x} \left[y\left(s\right) e^{-A(s)}\right]' ds &= \int\limits_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b\left(s\right) ds \\
y\left(x\right) e^{-A(x)} - y\left(x_0\right) e^{-A(x_0)} &= \int\limits_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b\left(s\right) ds \\
y\left(x\right) e^{-A(x)} &= y\left(x_0\right) + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b\left(s\right) ds \\
y\left(x\right) &= e^{A(x)} y\left(x_0\right) + e^{A(x)} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b\left(s\right) ds
\end{aligned}
$$

Másodrendű, konstans együtthatós (autonóm), lineáris differenciálegyenletek

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

$c(x) = 0$: homogén

$c(x) \neq 0$: inhomogén

Kezdetiérték probléma megoldása (homogén)

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1 \end{aligned}$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei alapján

1. két különböző valós gyök λ_1 és λ_2, ekkor az általános megoldás

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. egy kétszeres valós gyök λ, ekkor az általános megoldás

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

3. két különböző komplex gyök $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ és $\lambda_2 = \alpha - i, \beta$ ekkor az általános megoldás

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

A kezdetiérték probléma egyértelmű megoldásának meghatározása
Az általános megoldásban szereplő c_1 és c_2 konstansok meghatározása az

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1 \end{aligned}$$

kezdeti feltételből.

Az inhomogén egyenlet partikuláris ($y_p(x)$) megoldásának meghatározása, speciális inhomogén tag esetén (próbafüggvény módszere)

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x),$$

1.
$$c(x) = P(x)$$

(a) A *nulla* karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek.

$$y_p(x) = xQ(x),$$

ahol P és Q azonos fokszámú polinom. A Q polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

(b) A *nulla* **nem** karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek.

$$y_p(x) = Q(x),$$

ahol P és Q azonos fokszámú polinom. A Q polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

2.

$$c(x) = P(x) e^{\alpha x}$$

(a) Az α karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek ($m = 1$ vagy 2 multiplicitással).

$$y_p(x) = x^m Q(x) e^{\alpha x},$$

ahol P és Q azonos fokszámú polinom. A Q polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

(b) A α **nem** karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek.

$$y_p(x) = Q(x) e^{\alpha x},$$

ahol P és Q azonos fokszámú polinom. A Q polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

3.

$$c(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

vagy

$$c(x) = P(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

vagy

$$c(x) = P_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + P_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

(a) Az $\alpha+\beta i$ karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek ($m = 1$ vagy 2 multiplicitással).

$$y_p(x) = x^m \left(Q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)\right),$$

ahol Q_1 és Q_2 fokszáma $= \max(P_1$ fokszáma,P_2 fokszáma$)$. A Q_1 és Q_2 polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

(b) A $\alpha + \beta i$ **nem** karakterisztikus gyöke a homogén egyenletnek.

$$y_p(x) = Q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

ahol Q_1 és Q_2 fokszáma $= \max(P_1$ fokszáma,P_2 fokszáma$)$. A Q_1 és Q_2 polinom együtthatóinak meghatározása a feladat.

Feladatok

1. Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

   (a)
   $$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x}, \qquad y(1) = 1$$

   (b)
   $$y'(x) = \frac{y^4(x)}{x}, \qquad y(1) = 1$$

   (c)
   $$y'(x) = \frac{x^3}{y^4(x)}, \qquad y(0) = 1$$

   (d)
   $$y'(x) = \frac{x}{y^2(x)}, \qquad y(1) = 2$$

   (e)
   $$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x}, \qquad y(1) = 2$$

   (f)
   $$y'(x) = \frac{x+1}{y^2(x)}, \qquad y(0) = 1$$

   (g)
   $$y'(x) = \frac{\cos(x)}{y^2(x)}, \qquad y(0) = 1$$

   (h)
   $$y'(x) = \frac{1-2x}{y^2(x)}, \qquad y(0) = 2$$

   (i)
   $$y'(x) = e^{y(x)+2x}, \qquad y(0) = 1$$

   (j)
   $$y'(x) = e^{x-y(x)}, \qquad y(0) = 1$$

2. Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

   (a)
   $$y'(x) + 5y(x) = e^{2x}, \qquad y(0) = 1$$

   (b)
   $$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 3, \qquad y(1) = 1$$

   (c)
   $$y'(x) + 5y(x) = e^{2x}, \qquad y(0) = 0$$

   (d)
   $$y'(x) + 2y(x) = e^{3x}, \qquad y(0) = 0$$

   (e)
   $$y'(x) + 3y(x) = 2, \qquad y(0) = 1$$

(f)
$$y'(x) + y(x) = 2x, \qquad y(0) = 1$$
(g)
$$y'(x) + 2y(x) = 3, \qquad y(0) = 1$$
(h)
$$y'(x) + y(x) = x, \qquad y(0) = 1$$
(i)
$$y'(x) - 5y(x) = 2xe^{5x}, \qquad y(0) = 0$$
(j)
$$y'(x) + y(x) = x + 2, \qquad y(0) = 1$$
(k)
$$y'(x) + 2xy(x) = x, \qquad y(0) = 1$$
(l)
$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2, \qquad y(1) = 0$$
(m)
$$y'(x) + 2y(x) = e^{x}, \qquad y(0) = 2$$
(n)
$$y'(x) + 3y(x) = e^{-x}, \qquad y(0) = 1$$
(o)
$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 3, \qquad y(1) = 1$$
(p)
$$y'(x) + 2y(x) = x^2e^{-2x}, \qquad y(0) = 1$$
(q)
$$y'(x) + 3y(x) = e^{x}, \qquad y(0) = 2$$
(r)
$$y'(x) + 2y(x) = e^{-x}, \qquad y(0) = 2$$

3. Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

(a)
$$y''(x) - 6y'(x) + 25y(x) = 0, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 0$$
(b)
$$y''(x) + 9y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$
(c)
$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$
(d)
$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 4$$
(e)
$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$
(f)
$$y''(x) + 4y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

(g)
$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

(h)
$$y''(x) + 9y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 6$$

(i)
$$y''(x) + 9y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

(j)
$$y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

(k)
$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0$$

(l)
$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$$

(m)
$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2$$

4. Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatot!
$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{4x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

5. Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!
$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

6. Az előző feladat eredményének falhasználásával adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!
$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x + 3$$

7. Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!
$$y''(x) + 4y(x) = 0$$

8. Az előző feladat eredményének falhasználásával adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!
$$y''(x) + 4y(x) = 8x + 4$$