



**Pannon Egyetem**  
**Műszaki Informatikai Kar**  
**Matematika Tanszék**

**Matematikai feladatmegoldó verseny 2015/16**  
**3. forduló**

1. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{9 - 4x^2} dx$$

határozatlan integrált!

(10 pont)

2. Számítsa ki az

$$\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$$

határozott integrált!

(10 pont)

3. Egy  $A$   $n \times n$ -es mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha  $A^{-1} = A^T$ .

- a) Mutassa meg, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

mátrix ortogonális!

- b) Igazolja, hogy ha az  $A$  és  $B$   $n \times n$ -es mátrixok ortogonálisok, akkor  $AB$  is ortogonális!

(10 pont)

4. Legyen  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{v} \neq \underline{o}$  vektor  $\lambda$  sajátértékű sajátvektora az  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineáris transzformációnak. Igazolja, hogy ekkor a  $\underline{v}$  vektor  $\lambda^2$  sajátértékű sajátvektora az  $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}$  lineáris transzformációnak!

(10 pont)

5. Létezik-e olyan  $F = F(A, B, C)$  logikai formula, amelyre

$$(A \rightarrow F) \equiv (B \rightarrow ((\neg A) \vee C)) \quad \text{és} \quad ((C \rightarrow B) \rightarrow A) \equiv ((\neg A) \rightarrow (\neg F))$$

teljesül? Ha igen, adjon meg egy lehetséges  $F$ -et!

(10 pont)

6. Az  $A$  halmazon adott egy  $\cdot$  szorzás művelet, amelyre

- a)  $A$ -ban létezik egységelem,
- b)  $a(bc) = b(ac)$  minden  $a, b, c \in A$ -ra.

Mutassa meg, hogy  $(A, \cdot)$  kommutatív félcsoport! (10 pont)

Beadási határidő: **2015. január 5.**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!