



**Pannon Egyetem**  
**Műszaki Informatikai Kar**  
**Matematika Tanszék**

**Matematikai feladatmegoldó verseny 2015/16**  
**1. forduló**

1. Legyen  $x_1 > 1$ . Számítsa ki az

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

rekurzív sorozat határértékét! (10 pont)

2. Bizonyítsa be, hogy ha  $a_n \rightarrow a \in (0, \infty)$ , akkor  $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$ ! (10 pont)

3. a) Legyenek  $\underline{a}$  és  $\underline{v}$  közös kezdőpontú térbeli vektorok. Jelölje  $\underline{x}$  a  $\underline{v}$  vektornak az  $\underline{a}$  vektor egyenesére eső merőleges vetületvektorát. Mutassa meg, hogy

$$\underline{x} = (\underline{v} \cdot \underline{a}_e) \cdot \underline{a}_e,$$

ahol  $\underline{a}_e$  az  $\underline{a}$  vektorral megegyező irányú egységvektor!

b) Legyen

$$e : \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}, \quad P = (3, -1, 2).$$

Határozza meg a  $P$  pont  $e$  egyenesre eső merőleges vetületét!

(10 pont)

4. Legyen  $V_1$  és  $V_2$  két altér az  $\mathbb{R}^n$  vektortérben. Igazolja, hogy

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)!$$

(10 pont)

5. Legyenek  $A$  és  $B$  nem üres halmazok. Mutassa meg, hogy ha

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D,$$

akkor  $A = B = C = D$ !

(10 pont)

6. Adottak az  $A$  és  $B$  halmazok és egy  $f : A \rightarrow B$  függvény (leképezés). Jelölje  $\mathcal{P}(A)$  és  $\mathcal{P}(B)$  az  $A$  illetve  $B$  halmazok összes részhalmazainak a halmazát. Definiáljuk a

$$\phi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B), \quad \phi(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

és

$$\psi : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A), \quad \psi(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$$

függvényeket. Milyen feltételek mellett teljesül, hogy

- a)  $\psi \circ \phi = \text{id}_{\mathcal{P}(A)}$ , azaz  $\phi\psi = \text{id}_{\mathcal{P}(A)}$ ,
- b)  $\phi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{P}(B)}$ , azaz  $\psi\phi = \text{id}_{\mathcal{P}(B)}$ ?

(10 pont)

Beadási határidő: **2015. október 12.**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!