Matematikai feladatmegoldó verseny 2014/15.
1. forduló - megoldások

1. Egyszerű algebrai átalakításokat használva kapjuk, hogy
$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n} = \frac{1+\frac{1}{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}.$$
Így az
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
azonosságból következik, hogy
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

2. Teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$ teljesül minden $n = 1, 2, \ldots$-re, hiszen ha $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$, akkor
$$0 \le a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
Mivel
$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$
ezért az $\{a_n\}$ sorozat monoton növő. De ekkor kovergens is, azaz létezik az
$$a := \lim_{n\to\infty} a_n$$
határérték. Az
$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$
egyenlet mindkét oldalának véve a határértékét kapjuk, hogy
$$a = a^2 + \frac{1}{4},$$
amiből $a = \frac{1}{2}$ adódik.

3. Az ismert csúcsok koordinátáiból: $\overrightarrow{AB} = (1,3,4)$ és $\overrightarrow{AC} = (1,2,5)$.
Az egyenes hasáb AD éle merőleges az alaplapra, és mivel a feltétel szerint az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ élek jobb rendszert alkotnak, az $\overrightarrow{AD}$ él pozitív skalárszorosa a
$$\underline{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,3,4) \times (1,2,5) = (7,-1,-1)$$
vektornak. Mivel $|\underline{v}| = \sqrt{51}$, így az $\overrightarrow{AD}$ vektorral megegyező irányú egységvektor
$$\underline{v}_e = \frac{1}{|\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{51}} \cdot (7,-1,-1).$$
A hasáb magassága $m = \sqrt{204}$, így
$$\overrightarrow{AD} = m \cdot \underline{v}_e = \frac{\sqrt{204}}{\sqrt{51}} \cdot (7,-1,-1) = (14,-2,-2)$$

Innen az A csúcsot ismerve D meghatározható: $D = (15, -1, -1)$.
Mivel

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} = (1, 3, 4)\,, \qquad \text{így} \qquad E = (16, 2, 3)\,,$$

illetve

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} = (1, 2, 5)\,, \qquad \text{így} \qquad F = (16, 1, 4)\,.$$

4. a) Egy lehetséges példa a feltételeknek megfelelő bázistranszformációs táblázatra:

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$
$\underline{a}_1$	1	0	2	5	0
$\underline{a}_2$	0	1	3	0	0
$\underline{a}_5$	0	0	0	0	1
$\underline{e}_4$	0	0	0	0	0

b) A $V = \mathcal{L}(H)$ altér 3 dimenziós, melynek egy bázisa

$$B = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_5\}\,.$$

A V_1, V_2 és V_3 alterek egy lehetséges megválasztása:

(1)

$$V_1 := \mathcal{L}(\{\underline{e}_4\}) = \{\lambda \cdot \underline{e}_4 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ekkor V_1 1 dimenziós altér, melynek egy bázisa $B_1 = \{\underline{e}_4\}$.
Mivel

$$\dim(V) + \dim(V_1) = 3 + 1 = 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right),$$

továbbá a $B \cup B_1$ vektorhalmaz bázis $\mathbb{R}^4$-ben, így $V \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$.

(2)

$$V_2 := \mathcal{L}(\{\underline{e}_3, \underline{e}_4\}) = \{\lambda \cdot \underline{e}_3 + \mu \cdot \underline{e}_4 \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

2 dimenziós altér, melynek egy bázisa $B_2 = \{\underline{e}_3, \underline{e}_4\}$.
Ekkor

$$\dim(V) + \dim(V_2) = 3 + 2 > \dim\left(\mathbb{R}^4\right),$$

ezért $V \oplus V_2 \neq \mathbb{R}^4$.Mivel $B \cup B_2$ generátorrendszer $\mathbb{R}^4$-ben, ezért minden $\mathbb{R}^4$-beli vektor felbontható (nem egyértelműen) V-beli és V_2-beli összetevőkre, azaz $V + V_2 = \mathbb{R}^4$.

(3)

$$V_3 := \mathcal{L}(\underline{a}_1) = \{\lambda \cdot \underline{a}_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

1 dimenziós altér, melynek egy bázisa $B_3 = \{\underline{a}_1\}$.
Mivel ezesetben a $B \cup B_3 = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_5\}$ vektorhalmaz nem generátorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, ezért $V + V_3 \neq \mathbb{R}^4$.

5. Ha $A^* = \emptyset$, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen ekkor $f(A^*) = \emptyset$.

Tegyük fel most, hogy $b \in f(A^*)$. Ekkor $b = f(a)$ valamely $a \in A^*$-ra. De így $a \in A_n$ minden $n = 0, 1, 2, \ldots$-re, amiből következik, hogy $b = f(a) \in A_{n+1}$ minden $n = 0, 1, 2, \ldots$-re. Így

$$b \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{n+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A^*,$$

mivel $A_n \subseteq A = A_0$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re.

6. A feltétel szerint létezik $\phi : A \to C$ bijekció és $\psi : B \to D$ bijekció. Legyen adott $\gamma \in B^A$, azaz egy $\gamma : A \to B$ leképezés. Ehhez tekintsük a

$$C \to D, \quad c \mapsto \psi(\gamma(\phi^{-1}(c)))$$

leképezést. Megjegyezzük, hogy mivel ϕ bijektív ezért $\phi^{-1} : C \to A$ szintén bijektív leképezés, azaz $\psi \circ \gamma \circ \phi^{-1}$ is leképezés lesz.

Definiáljuk az $f : B^A \to D^C$ leképezést az

$$f(\gamma) = \psi \circ \gamma \circ \phi^{-1}$$

képlettel. Megmutatjuk, hogy f bijekció B^A és D^C között.

Legyen $\beta \in D^C$, azaz $\beta : C \to D$. Ekkor az $\alpha = \psi^{-1} \circ \beta \circ \phi$ leképezésre $\alpha : A \to B$, és

$$f(\alpha) = \psi \circ \alpha \circ \phi^{-1} = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \beta \circ \phi) \circ \phi^{-1} = (\psi \circ \psi^{-1}) \circ \beta \circ (\phi \circ \phi^{-1}) = id_B \circ \beta \circ id_C = \beta.$$

Azaz f szürjektív.

Legyenek $\alpha_1 \neq \alpha_2$ különböző leképezések B^A-ban. Ekkor valamely $a_0 \in A$-ra $\alpha_1(a_0) \neq \alpha_2(a_0)$. Legyen $b_0 = \phi(a_0)$. Ekkor használva, hogy ψ bijektív, és így injektív is, kapjuk, hogy

$$f(\alpha_1)(b_0) = (\psi \circ \alpha_1 \circ \phi^{-1})(b_0) = \psi(\alpha_1(\phi^{-1}(b_0))) = \psi(\alpha_1(a_0)) \neq \psi(\alpha_2(a_0)) = (\psi \circ \alpha_2 \circ \phi^{-1})(b_0) = f(\alpha_2)(b_0).$$

De ekkor $f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$, azaz f injektív. Ezzel beláttuk, hogy f bijektív.