Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2014/15.
2. forduló

1. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

(10 pont)

2. Mutassa meg, hogy

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin y}{y}, \qquad \text{valahányszor } 0 < x < y < \pi.$$

(10 pont)

3. Az A négyzetes mátrixot idempotens mátrixnak nevezzük, ha bármely pozitív egész kitevős hatványa önmagával egyenlő:

$$A = A^2 = A^3 = \dots$$

   a) Mutassa meg, hogy ha az A és B négyzetes mátrixokra igaz, hogy $A \cdot B = A$ és $B \cdot A = B$, akkor A és B idempotens mátrix!

   b) Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Mutassa meg, hogy A és B idempotens mátrixok, majd mutassa meg a példájukon, hogy az előző állítás nem megfordítható! Milyen tulajdonságú A és B?

(10 pont)

4. Tekintsük az $A\underline{x} = \underline{o}$ és $A\underline{x} = \underline{b}$ homogén - inhomogén lineáris egyenletrendszer párt! Tegyük fel, hogy mindkét egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van.

   a) Mutassa meg, hogy ha $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ az inhomogén egyenletrendszer két különböző megoldásvektora, akkor $\underline{x}_1 - \underline{x}_2$ megoldásvektora a homogén egyenletrendszernek!

b) Legyen $\underline{x}_o$ a homogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldásvektora, $\underline{x}$ az inhomogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldásvektora. Mutassa meg, hogy ekkor az $\underline{x}_o + \underline{x}$ is megoldásvektora az inhomogén egyenletrendszernek!

c) Igazolja, hogy a homogén egyenletrendszer megoldásvektorai alteret alkotnak!

(10 pont)

5. Mutassa meg, hogy tetszőleges z, w komplex számokra teljesül a

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

azonosság! (10 pont)

6. Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ egy n-elemű halmaz, ρ egy A-n definiált reláció, azaz $\rho \subseteq A \times A$. A ρ reláció illeszkedési mátrixának nevezzük azt a B_ρ $n \times n$-es mátrixot, amelynek ij-edik eleme

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (a_i, a_j) \in \rho, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen ρ és σ két reláció A-n. Adja meg a

a) ρ^{-1}

b) $\rho \cap \sigma$

c) $\rho \cup \sigma$

d) $\rho\sigma$

relációk illeszkedési mátrixát a B_ρ és B_σ mátrixok segítségével! (10 pont)

Beadási határidő: **2014. november 18.**
Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!