



**Pannon Egyetem**  
**Műszaki Informatikai Kar**  
**Matematika Tanszék**

**Matematikai feladatmegoldó verseny 2014/15.**  
**1. forduló**

1. Számítsa ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n$$

határértéket!

(10 pont)

2. Legyen

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad \text{és} \quad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Adja meg az  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  sorozat határértékét!

(10 pont)

3. Egy háromszög alapú egyenes hasáb alaplapjának csúcsai  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (2, 4, 5)$ ,  $C = (2, 3, 6)$ .

A hasáb magassága  $\sqrt{204}$  egység. Határozza meg a többi csúcspontot!

(Tudjuk, hogy az  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  vektorok jobbrendszert alkotnak.) (10 pont)

4. A  $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_5\} \subseteq \mathbb{R}^4$  vektorhalmazról a következőket tudjuk:

- $r(H) = 3$
- $H$  elemeiből elhagyható egy vektor úgy, hogy a maradék vektorhalmaz rangja csak 2 legyen.
- $H$ -ban pontosan két olyan vektor van, amelyek párhuzamosak.

a) Adjon példát olyan (nem induló) bázistranszformációs táblázatra, amelyből kiolvashatók a fenti információk!

b) Legyen  $V$  a  $H$  vektorhalmaz generátuma. A felírt táblázat alapján adjon példát olyan  $V_1, V_2$  és  $V_3$  alterekre, melyekre

- (1)  $V \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$
- (2)  $V + V_2 = \mathbb{R}^4$ , de  $V \oplus V_2 \neq \mathbb{R}^4$
- (3)  $V + V_3 \neq \mathbb{R}^4$ !

(Indoklás!)

(10 pont)

5. Legyen adott egy tetszőleges  $A$  halmaz, és tekintsünk egy  $f : A \rightarrow A$  leképezést (függvényt). Egy tetszőleges  $B \subseteq A$  esetén jelölje  $f(B)$  az  $\{f(b) : b \in B\}$  halmazt. Definiáljuk az  $A_0 = A$ ,  $A_{n+1} = f(A_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  halmzsorozatot, és legyen

$$A^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Mutassa meg, hogy  $f(A^*) \subseteq A^*$ ! (10 pont)

6. Tetszőleges  $X$  és  $Y$  halmazokra jelölje  $Y^X$  az összes  $X \rightarrow Y$  leképezés (függvény) halmazát. Mutassa meg, hogy ha létezik bijekció az  $A$  és  $C$  valamint a  $B$  és  $D$  halmazok között, akkor létezik bijekció az  $B^A$  és a  $D^C$  halmazok között is! (10 pont)

Beadási határidő: **2014. október 13.**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!