Matematikai feladatmegoldó verseny 2013/14.
1. forduló - megoldások

1. Mivel minden $k \geq 1$-re
$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right),$$
ezért
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$
Tehát
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

2. Indukcióval könnyen bizonyitható, hogy
$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \qquad \text{minden } \ n \geq 1\text{-re.}$$
Az
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n^2 - a_{n-1}^2\right), \qquad n \geq 2,$$
azonosság felhasználásával indukcióval bizonyítható, hogy a sorozat monoton növekedő.
Tehát
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$
létezik, és
$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1.$$
Az
$$a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n^2}{2}, \qquad n \geq 1$$
azonosságból határátmenet után kapjuk, hogy
$$a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2},$$
amelynek egyetlen megoldása $a = 1$.

3.

	Állítás	Állítás megfordítása
1.	hamis	igaz
2.	igaz	hamis
3.	igaz	igaz
4.	hamis	hamis
5.	hamis	hamis

4. (a) Mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, az állítás nem igaz.
Ellenpélda:
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Ekkor
$$A^2 \cdot B^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 19 \\ 4 & 14 \end{bmatrix},$$

$$(A \cdot B)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^2 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Így $\quad A^2 \cdot B^2 \neq (A \cdot B)^2$.

(b) Igen,

$$A^k \cdot \left(A^{-1}\right)^k = \left(A \cdot A^{-1}\right)^k , \quad k \in Z_+ \ .$$

Bizonyítás:
A mátrixszorzás asszociativitását felhaszálva:

$$A^k \cdot \left(A^{-1}\right)^k = A^{k-1} \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot \left(A^{-1}\right)^{k-1} = A^{k-1} \cdot E \cdot \left(A^{-1}\right)^{k-1} = A^{k-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^{k-1} ,$$

amiből $A^k \cdot \left(A^{-1}\right)^k = E$ következik.
Ugyanakkor $\left(A \cdot A^{-1}\right)^k = E^k = E,$ így az állítás igaz.

5. Az állítás nem igaz. Ellenpélda például az $A = \{1\}$ és $B = \{2\}$ halmazok. Ekkor $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$ és $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

6. Megjegyezzük, hogy $z^n \neq \pm i$, mivel ekkor $z^{2n} = -1$ következne. A feltétel szerint $1 = |z|^2 = z\bar{z}$, ezért

$$\frac{z^n}{1 + z^{2n}} = \frac{z^n (\bar{z})^n}{(1 + z^{2n})(\bar{z})^n} = \frac{(z\bar{z})^n}{(\bar{z})^n + z^n (z\bar{z})^n} = \frac{1}{\overline{z^n} + z^n} = \frac{1}{2 \operatorname{Re} z^n},$$

amiből következik az állítás.