



Pannon Egyetem  
Műszaki Informatikai Kar  
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2013/14.  
3. forduló

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

(a)  $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$  (10 pont)

(b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$  (10 pont)

2. Egy  $A : V \rightarrow V$  lineáris transzformációt diagonalizálhatónak nevezünk, ha van olyan  $B$  bázis a  $V$  vektortérben, hogy az  $A$  lineáris transzformáció  $B - B$  bázisokra vonatkozó mátrixa diagonális.

(a) Tekintsük az

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + 3x_2, \quad x_1 + 4x_2)$$

lineáris transzformációt és a

$$B = \{(1, 1), (3, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

bázist. Mutassa meg, hogy az  $A$  lineáris transzformáció  $B - B$  bázisokra vonatkozó mátrixa diagonális, azaz  $A$  diagonalizálható!

(b) Igazolja, hogy ha az  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineáris transzformáció esetén létezik olyan  $B$  bázis az  $\mathbb{R}^n$  vektortérben, amelyet  $A$  sajátvektorai alkotnak, akkor  $A$  diagonalizálható!

(10 pont)

3. Mutassa meg, hogy a valós számokból felépülő  $m \times n$ -es mátrixok vektortere és az  $n \times m$ -es mátrixok vektortere izomorfak, azaz létezik  $\phi : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  lineáris izomorfizmus! (Adjon példát ilyen  $\phi$  leképezésre, és igazolja, hogy  $\phi$  lineáris izomorfizmus!) (10 pont)

4. Legyen  $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$ , és definiáljuk a  $\circ$  műveletet a következő módon:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, b + d), \quad (a, b), (c, d) \in G.$$

Mutassa meg, hogy

- (a)  $(G, \circ)$  csoport;
- (b)  $G$ -ben pontosan egy másodrendű elem létezik;
- (c)  $G$ -ben nem létezik harmadrendű elem.

(10 pont)

5. Igazolja az

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

azonosságot minden pozitív egész  $n$ -re!

(10 pont)

Beadási határidő: **2013. március 10.**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!