Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2013/14.
2. forduló

1. Határozza meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + e^x}{2} \right)^{\operatorname{ctg} x}$$

(10 pont)

2. Bizonyítsa be, hogy az adott felszínű négyzet alapú egyenes hasábok közül a kocka a legnagyobb térfogatú! (10 pont)

3. Legyen A egy olyan $m \times n$-es mátrix, amelyre $r(A) = k$.
a) Igazolja, hogy az $A \cdot \underline{x} = o$ homogén lineáris egyenletrendszer M_o megoldáshalmaza altér az $\mathbb{R}^n$ vektortérben!
b) Mit állíthatunk az M_o megoldáshalmaz dimenziójától? Miért? (10 pont)

4. Tekintsük az alábbi lineáris transzformációt!

$$A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_3 - x_4,\ x_1 + x_3 - x_4,\ 0,\ x_4)$$

a) Határozza meg az A lineáris transzformáció sajátértékeit és sajátaltereit!
b) Van-e olyan bázis az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, amelyet az A lineáris transzformáció sajátvektorai alkotnak? Miért? (10 pont)

5. Legyenek $(A_1, \leq_1)$ és $(A_2, \leq_2)$ részbenrendezett halmazok, és $\varphi : A_1 \to A_2$ bijektív és monoton leképezés. (φ monoton, ha minden $a \leq_1 b$, $a, b \in A_1$ esetén $\varphi(a) \leq_2 \varphi(b)$ teljesül.) Igaz-e, hogy φ^{-1} is monoton? Ha igen, igazolja, ha nem, adjon ellenpéldát!
(10 pont)

6. Mutassa meg, hogy a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet kontinuum számosságú! (10 pont)

Beadási határidő: **2013. december 10.**
Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!