



Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2013/14.
1. forduló

1. Számítsuk ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$$

határértéket!

(7 pont)

2. Legyen

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n^2}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Létezik-e a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határérték, és ha igen, akkor számítsuk ki!

(13 pont)

3. a) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak, vagy hamisak! (Indoklást nem kell adni.)

1. Ha a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmaz lineárisan összefüggő, akkor H -ban van két olyan vektor, amelyek egymás skalárszorosai.
2. Ha a H vektorhalmaz bármelyik vektora előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor H lineárisan összefüggő.
3. Ha a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmaznak van olyan részhalmaza, amely bázis \mathbb{R}^n -ben, akkor H generátorrendszer.
4. Ha a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmazra $r(H) < n$, akkor H lineárisan független.
5. Ha a $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmazokra $H_1 \cup H_2$ bázis \mathbb{R}^n -ben, akkor \mathbb{R}^n direkt összege a H_1 és H_2 vektorhalmazok generátumainak.

b) Döntse el a fenti állítások megfordításairól, hogy igazak, vagy hamisak!

(10 pont)

4. Legyen A és B $n \times n$ -es mátrix.

a) Igaz-e általában az $A^k \cdot B^k = (A \cdot B)^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) összefüggés?

Ha igen, akkor adjon bizonyítást, ha nem, akkor mutasson ellenpéldát!

b) Igaz-e a fenti összefüggés abban az esetben, ha A invertálható, és $B = A^{-1}$? (Indoklás!)

(10 pont)

5. Jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz összes részhalmazai halmazát. Igaz-e a

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

azonosság tetszőleges A, B halmazokra? Ha igen, igazolja az azonosságot, ha nem, adjon ellenpéldát! (10 pont)

6. Legyen a z komplex szám abszolút értéke 1 és $z^{2n} \neq -1$. Mutassa meg, hogy ekkor a

$$\frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

kifejezés értéke minden $n \in \mathbb{N}$ -re valós! (10 pont)

Beadási határidő: **2013. november 5.**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!