Matematikai feladatmegoldó verseny 2012/13.
1. forduló - megoldások

1. a) Legyen $a_n := \frac{2+(-1)^n}{n}$. Ekkor $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2+(-1)^{n+1}}{n+1}\frac{n}{2+(-1)^n} = \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\frac{n}{n+1}$, és így $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}\frac{n}{n+1}$ páros n-re, és $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3\frac{n}{n+1}$ páratlan n-re. Ezért az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozat páratlan indexű tagjai határéke $\frac{1}{3}$, a páros indexű tagjai pedig 3-hoz konvergálnak. Azaz az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozat nem konvergens.

   b_1) Tegyük fel hogy $|a| > 1$. Az $a > 1$ esetet tekintjük. Legyen $1 < b < a$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ miatt van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > b, \quad n \geq k, \quad \text{így} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > b, \quad n \geq k.$$

   Ekkor $|a_{k+1}| > b\,|a_k|$, $|a_{k+2}| > b\,|a_{k+1}| > b^2\,|a_k|$, ... , $|a_n| > b^{n-k}\,|a_k|$ $(n \geq k)$. $b^{n-k} \to \infty$, és $|a_k| \neq 0$ alapján láthatjuk, hogy az (a_n) sorozat nem korlátos, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nem teljesülhet,

   ez pedig ellentmondás.

   b_2) $a = 1$ esetén legyen $a_n := \frac{1}{n}$, $a = -1$ esetén $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$, $a \in]-1, 1[$ esetén pedig legyen $a_n := a^n$.

2. a) Tegyük fel hogy $\min\{\inf(A), \inf(B)\} = \inf(A)$ (a másik eset hasonló).
   Bármely $x \in A \cup B$ esetén vagy $x \in A$, és ekkor $x \geq \inf(A)$, vagy $x \in B$, és ekkor $x \geq \inf(B) \geq \inf(A)$. Láthatjuk, hogy $\inf(A)$ az $A \cup B$ egy alsó korlátja, így $\inf(A \cup B) \geq \inf(A)$.
   Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $\inf(A) + \varepsilon$ nem alsó korlátja az A-nak, van olyan $x \in A$, hogy $x \leq \inf(A) + \varepsilon$. $x \in A \cup B$ is teljesül, ezért $\inf(A) + \varepsilon$ nem alsó korlátja az $A \cup B$-nek, tehát $\inf(A \cup B) < \inf(A) + \varepsilon$. Mivel ε bármely pozitív szám lehet, $\inf(A \cup B) \leq \inf(A)$.

   b) $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{1, 2, 4\}$

3. a) Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ nem egy sikban lévő vektorok.
   Tekintsük azt a paralelepipedont, amelynek egy csúcsból induló három éle $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$.
   A paralelepipedon térfogata $V = A \cdot m$, ahol A az alaplap területe, m a hozzá tartozó magasság.
   Legyen az alaplap az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma. Ennek területe

$$A = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi = |\underline{a} \times \underline{b}|$$

   ahol φ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge.
   Jelölje δ az $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektor szögét. Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $\delta < 90°$, ekkor a paralelepipedon A alaplaphoz tartozó magassága $m = |\underline{c}| \cdot \cos\delta$, így a térfogat

$$V = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot \cos\delta = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$$

   Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ balrendszert alkot, akkor $90° < \delta < 180°$, ekkor a paralelepipedon A alaplaphoz tartozó magassága

$$m = |\underline{c}| \cdot \cos(180° - \delta) = -\,|\underline{c}| \cdot \cos\delta,$$

   így a térfogat

$$V = -\,|\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot \cos\delta = -\,(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}.$$

   b) (1) Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy síkban lévő vektorok, akkor az $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által bezárt szög, illetve az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ x $\underline{c}$ vektorok által bezárt szög egyaránt $90°$, így

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = 0.$$

   (2) Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ nem egy síkban lévő vektorok, akkor láttuk, hogy az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata $V = |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}|$. Ugyanezen paralelepipedon térfogatát úgy is megkaphatjuk,

hogy a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelogrammát tekintjük alaplapnak, és ennek területét szorozzuk a hozzá tartozó magassággal. Így az a)-ban leírtakhoz hasonlóan belátható, hogy

$$V = |\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})|\,, \quad \text{azaz} \quad |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}| = |\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})|\,.$$

Mivel az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok pontosan akkor alkotnak jobb-, illetve balrendszert, amikor a $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{a}$ vektorok, így az $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ és $\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$ vegyesszorzatok előjele is megegyezik.

c) Számolással ellenőrizhető, hogy a megadott pontok által meghatározott paralelepipedon esetén az

$$\underline{a} = \overrightarrow{AB} = (1,3,4)\,, \qquad \underline{b} = \overrightarrow{AC} = (5,2,2) \quad \text{és} \quad \underline{c} = \overrightarrow{AE} = (1,4,5)$$

vektorok az A csúcspontból induló élekre illeszkednek. Így a paralelepipedon térfogata

$$V = |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}| = |((1,3,4)\,x\,(5,2,2)) \cdot (1,4,5)| = |(-2,18,-13) \cdot (1,4,5)| = |5| = 5.$$

4. a) Bázistranszformációval határozzuk meg a $H = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ vektorhalmaz egy maximális lineárisan független részrendszerét.

Az alábbi táblázathoz juthatunk:

Bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$
$\underline{a}_1$	1	0	1	-1	2
$\underline{a}_2$	0	1	-1	1	-1
$\underline{e}_3$	0	0	0	0	0

Így a $V = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ altér 2 dimenziós, melynek egy bázisa $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$.

A $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ vektorok nem párhuzamosak, így a $V' = \mathcal{L}(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ altér is 2 dimenziós. Mivel a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ vektorok előállíthatóak $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ lineáris kombinációjaként, így a V' altér összes vektora is előáll $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Hasonlóan megmutatható, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok, és így a V altér összes vektora előáll $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ lineáris kombinációjaként, tehát a V és V' altér azonos.

b) Legyen $V_1 = \mathcal{L}(\underline{e}_3)$. Ekkor a V és V_1 alterek bázisainak úniója ($\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{e}_3$ vektorok) a fenti bázistranszformációs táblázat alapján bázis $\mathbb{R}^3$-ban, így $V \oplus V_1 = \mathbb{R}^3$. Legyen $V_2 = \mathcal{L}(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Ekkor a V és V_2 alterek bázisainak úniója ($\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{e}_2$, $\underline{e}_3$vektorok) generátorrendszer $\mathbb{R}^3$-ban, így $V + V_2 = \mathbb{R}^3$. Ugyanakkor

$$\dim(V) + \dim(V_2) \neq \dim\left(\mathbb{R}^3\right), \text{ így } V \oplus V_2 \neq \mathbb{R}^3.$$

5. Tudjuk, hogy bármely permutáció előáll transzpozíciók szorzataként. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy miden $a, b \in \{2,3,4\}$-re az (a, b) transzpozíció előáll az $(1\,2)$, $(1\,3)$ és $(1\,4)$ transzpozíciók szorzataként. Ez pedig az $(a\,b) = (1\,a)(1\,b)(1\,a)$ összefüggésből következik.

6. a) (1) Tegyük fel először, hogy $\rho^2 = A^2$, azaz $(a, b) \in \rho^2$ tetszőleges $a, b \in A$-ra. Ekkor létezik $c \in A$, hogy $(a, c) \in \rho$ és $(c, b) \in \rho$. Mivel ρ ekvivalenciareláció, azaz tranzitív is, ezért $(a, b) \in \rho$ is teljesül, azaz $\rho = A^2$.

(2) Most fordítva, tegyük fel, hogy $\rho = A^2$, azaz $(a, b) \in \rho$ tetszőleges $a, b \in A$-ra. Mivel ρ reflexív, ezért $(b, b) \in \rho$ is teljesül. De ekkor ρ^2 definíciója szerint $(a, b) \in \rho^2$ is teljesül, azaz $\rho^2 = A^2$.

b) (1) Tegyük fel először, hogy $\rho\sigma = A^2$, azaz $(a, b) \in \rho\sigma$ tetszőleges $a, b \in A$-ra. Ekkor létezik $c \in A$, hogy $(a, c) \in \rho$ és $(c, b) \in \sigma$. Mivel ρ és σ szimmetrikus és tranzitív, ezért $(b, c) \in \sigma$ és $(c, a) \in \rho$ is, és ezért $(b, a) \in \sigma\rho$ is teljesül. Mivel a és b tetszőleges, ezért $\sigma\rho = A^2$.

(2) A fordított irány ugyanígy látható be.