



**Pannon Egyetem**  
**Műszaki Informatikai Kar**  
**Matematika Tanszék**

**Matematikai feladatmegoldó verseny 2012/13.**  
**5. forduló**

1. Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} (y-x)^2 \sin\left(\frac{1}{y-x}\right), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ . Igazolja, hogy az  $f$  elsőrendű parciális deriváltjai léteznek az  $\mathbb{R}^2$ -n, nem folytonosak a  $(0,0)$ -nál, de az  $f$  differenciálható a  $(0,0)$ -nál. (10 pont)

2. Adja meg azt a háromszöget, amelynek a kerülete  $2p > 0$ , és amelyet valamelyik oldala körül megforgatva, maximális térfogatú forgástestet kapunk. (10 pont)

3. Számítsa ki a  $\iint_H x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  integrált, ahol  $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ . (10 pont)

4. Legyen  $G$  egy  $n$ -pontú egyszerű gráf, és legyen  $A = (a_{i,j})$   $n \times n$ -es mátrix a  $G$  gráf csúcsmátrixa, azaz  $a_{i,j} = 1$ , ha létezik az  $i$ -edik és  $j$ -edik csúcs között él, illetve  $a_{i,j} = 0$ , ha nem létezik. Definiáljuk az

$$X = A + A^2 + \dots + A^{n-1}$$

mátrixot. Mit mondhatunk a  $G$  gráfról, ha az  $X$  mátrixnak a fődiagonálisán kívül van olyan eleme, amely 0? (10 pont)

5. Egy  $G$  egyszerű gráfra jelölje  $\overline{G}$  azt a gráfot, amelynek a csúcspontjai megegyeznek  $G$  csúcspontjaival, két csúcspontot pedig pontosan akkor köt össze él  $\overline{G}$ -ben, ha az adott él nem szerepel  $G$ -ben. Adjon meg egy 5-pontú egyszerű  $G$  gráfot, amelyre  $G$  és  $\overline{G}$  izomorf. (10 pont)

6. Mutassa meg, hogy  $5n + 2$  és  $7n + 3$  minden  $n \in \mathbb{N}$ -re relatív prím. (10 pont)

Beadási határidő: **2013. május 8.**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!