Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2012/13.
2. forduló

1. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és $\lim\limits_{x\to-\infty} f = \lim\limits_{x\to\infty} f = -\infty$. Igazolja, hogy az f-nek létezik maximuma, azaz van olyan $x_{\max} \in \mathbb{R}$, amelyre $f(x) \le f(x_{\max})$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. (10 pont)

2. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $[a, b]$-n, jobbról differenciálható az $]a, b[$-n, és $f(a) > f(b)$.

   (a) Legyen $c \in \,]f(b), f(a)[$. Igazolja, hogy van olyan $x_c \in \,]a, b[$, amelyre $f(x_c) = c$, valamint $x_c < x \le b$ esetén $f(x) < c$.

   (b) Igazolja, hogy az $A := \left\{x \in \,]a, b[\mid f'_+(x) \le 0\right\}$ jelöléssel

   $$]f(b), f(a)[\, \subset f(A) := \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}\,.$$

   (10 pont)

3. Az A négyzetes mátrixot p indexű nilpotens mátrixnak nevezzük, ha $A^p = 0$, de $A^{p-1} \ne 0$, ahol $p > 1$ egész, 0 a nullmátrix.

   Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixot!

   (a) Mutassa meg, hogy a fenti A mátrix nilpotens, és határozza meg az indexét!

   (b) Igazolja, hogy a $C = A + E$ mátrix invertálható és $C^{-1} = E - A + A^2$, ahol E a 3×3-as egységmátrix!

   (c) Fogalmazzon meg hasonló állítást a $C = A + E$ mátrix inverzéről, ha az A $n \times n$-es p indexű nilpotens mátrix, E pedig az $n \times n$-es egységmátrix! Igazolja is állítását!

   (10 pont)

4. Tekintsük az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert, ahol m valós paraméter:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & my & + & m^2z & = & 0 \\ mx & + & m^2y & + & z & = & 0 \\ m^2x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array}$$

(a) Hogyan függ az egyenletrendszer együttható mátrixának rangja az m paraméter értékétől?

(b) Hogyan függ az egyenletrendszer megoldáshalmaza az m paraméter értékétől?

(c) Mutassa meg, hogy az m paraméter egyetlen értéke esetén sincs az egyenletrendszernek olyan $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ megoldása, amelyre $x_0,\ y_0,\ z_0 > 0$ teljesül.

(10 pont)

5. Létezik-e olyan $F = F(A, B, C)$ logikai formula, amelyre

$$C \to F \equiv C \to (A \wedge B) \qquad \text{és} \qquad F \to C \equiv (\neg(A \vee B)) \to C$$

teljesül? Ha igen, adjon meg egy lehetséges F-et! (10 pont)

6. Mutassa meg, hogy két kontinuum számosságú halmaz uniója is kontinuum számosságú!

(10 pont)

Beadási határidő: **2012. december 10.**

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!