Matematikai feladatmegoldó verseny 2011/12.
3. forduló - megoldások

1. Mivel
$$f'(x) = \frac{(x+3)^{-1/3}}{3}, \qquad x \in [-2,5],$$
ezért az f grafikonjának az ℓ hossza
$$\begin{aligned} l &= \int_{-2}^{5} \sqrt{1+\frac{1}{9(x+3)^{2/3}}}dx = \int_{-2}^{5} \frac{\sqrt{1+9(x+3)^{2/3}}}{3(x+3)^{1/3}}dx \\ &= \frac{1}{18}\int_{-2}^{5} \sqrt{1+9(x+3)^{2/3}}6(x+3)^{-1/3}\,dx \\ &= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}\left(1+9(x+3)^{2/3}\right)^{3/2}\right]_{-2}^{5} = \frac{1}{27}\left(37^{3/2}-10^{3/2}\right). \end{aligned}$$

2. a) Elegendő megmutatni, hogy az $x \to (x-\pi)\mathrm{ctg}(x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ függvény a π egy bal oldali környezetében korlátos. Ez igaz, ha a
$$\lim_{x\to\pi-} (x-\pi)\,\mathrm{ctg}\,(x)$$
határérték létezik és véges.
$$\lim_{x\to\pi-} (x-\pi)\,\mathrm{ctg}\,(x) = \lim_{x\to\pi-} \frac{x-\pi}{\sin(x)}\cos(x) = 1,$$
hiszen
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)-\sin(\pi)}{x-\pi} = \sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1.$$

b)
$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(x))\,dx = \lim_{t\to\pi-} \int_{\pi/2}^{t} \ln(\sin(x))\,dx;$$
$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{t} \ln(\sin(x))\,dx &= \left[(x-\pi)\ln(\sin(x))\right]_{\pi/2}^{t} - \int_{\pi/2}^{t} (x-\pi)\,\mathrm{ctg}\,(x)\,dx \\ &= (t-\pi)\ln(\sin(t)) - \int_{\pi/2}^{t} (x-\pi)\,\mathrm{ctg}\,(x)\,dx; \end{aligned}$$
L'Hospital szabály segítségével:
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\pi-} (t-\pi)\ln(\sin(t)) &= \lim_{t\to\pi-} \frac{\ln(\sin(t))}{\frac{1}{(t-\pi)}} = \lim_{t\to\pi-} \frac{\frac{1}{\sin(t)}\cos(t)}{-\frac{1}{(t-\pi)^2}} \\ &= \lim_{t\to\pi-} -(t-\pi)(t-\pi)\,\mathrm{ctg}\,(t) = 0. \end{aligned}$$
Az a) rész alapján
$$\lim_{t\to\pi-} \int_{\pi/2}^{t} (x-\pi)\,\mathrm{ctg}\,(x)\,dx$$
létezik és véges.
Az előző kettő megállapításunkból következik az állítás.

3. a) Az A lineáris transzformáció karakterisztikus egyenlete:

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ c & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = -\lambda \cdot \left[(1-\lambda)^2 - 2c \right] = -\lambda \cdot \left(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 2c \right) = 0$$

A fenti harmadfokú egyenletnek kétféle c érték esetén lesz egy egyszeres és egy kétszeres gyöke:
$c = 0$ esetén: $\lambda_1 = 0$ (algebrai multiplicitása 1) és $\lambda_2 = 1$ (algebrai multiplicitása 2)
$c = 0,5$ esetén: $\lambda_1 = 0$ (algebrai multiplicitása 2) és $\lambda_2 = 2$ (algebrai multiplicitása 1).

b) $c = 0$ esetén
A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$H(0) = \left\{ \underline{x} \in R^3 \middle| \ x_3 \in R, \ \ x_1 = x_2 = 0 \right\},$$

amely egy dimenziós altér R^3-ban így a $\lambda_1 = 0$ sajátérték geometriai multiplicitása 1.
A $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér a

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$H(1) = \left\{ \underline{x} \in R^3 \mid x_1 \in R, \ \ x_2 = 0, \ \ x_3 = 3x_1 \right\},$$

amely egy dimenziós altér R^3-ban, így a $\lambda_2 = 1$ sajátérték geometriai multiplicitása 1.
$c = 0,5$ esetén
A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$H(0) = \left\{ \underline{x} \in R^3 \mid x_3 \in R, \ \ x_1 = x_2 = 0 \right\}$$

amely egy dimenziós altér R^3-ban így a $\lambda_1 = 0$ sajátérték geometriai multiplicitása 1.
A $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér a

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza:

$$H(2) = \left\{ \underline{x} \in R^3 \mid x_2 \in R, \ \ x_1 = 2x_2, \ \ x_3 = 3,5x_2 \right\}$$

amely egy dimenziós altér R^3-ban, így a $\lambda_2 = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1.

4. Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in R^3$, $\lambda, \mu \in R$ tetszőleges.

a) $V1$ axióma:

$$\underline{a} \oplus \underline{b} = \left(\frac{1}{2}\,a_1,\ \frac{1}{2}\,a_2,\ \frac{1}{2}\,a_3\right) \quad \text{és} \quad \underline{b} \oplus \underline{a} = \left(\frac{1}{2}\,b_1,\ \frac{1}{2}\,b_2,\ \frac{1}{2}\,b_3\right).$$

$\underline{a} \oplus \underline{b} \neq \underline{b} \oplus \underline{a}$, így a $V1$ axióma nem teljesül.
$V2$ axióma:

$$(\underline{a} \oplus \underline{b}) \oplus \underline{c} = \left(\frac{1}{2}\,a_1,\ \frac{1}{2}\,a_2,\ \frac{1}{2}\,a_3\right) \oplus (c_1,\, c_2,\, c_3) = \left(\frac{1}{4}\,a_1,\ \frac{1}{4}\,a_2,\ \frac{1}{4}\,a_3\right)$$

$$\underline{a} \oplus (\underline{b} \oplus \underline{c}) = (a_1,\, a_2,\, a_3) \oplus \left(\frac{1}{2}\,b_1,\ \frac{1}{2}\,b_2,\ \frac{1}{2}\,b_3\right) = \left(\frac{1}{2}\,a_1,\ \frac{1}{2}\,a_2,\ \frac{1}{2}\,a_3\right)$$

$(\underline{a} \oplus \underline{b}) \oplus \underline{c} \neq \underline{a} \oplus (\underline{b} \oplus \underline{c})$, így a $V2$ nem teljesül.
$V3$ axióma:
Nem teljesül, mert $\underline{a}$-hoz bármilyen R^3-beli elemet adva az eredmény $\left(\frac{1}{2}\,a_1,\ \frac{1}{2}\,a_2,\ \frac{1}{2}\,a_3\right)$, ami ha $\underline{a} \neq (0,\, 0,\, 0)$, akkor nem egyenlő $\underline{a}$-val.
Így ebben a struktúrában nem létezik nullelem. Mivel nincs nullelem, így a $V4$ axióma sem teljesül.
$V5$ axióma:

$$\lambda \odot (\underline{a} \oplus \underline{b}) = \lambda \odot \left(\frac{1}{2}\,a_1,\ \frac{1}{2}\,a_2,\ \frac{1}{2}\,a_3\right) = \left(\frac{\lambda}{2}\,a_1,\ \frac{\lambda}{2}\,a_2,\ \frac{\lambda}{2}\,a_3\right)$$

$$(\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\lambda \odot \underline{b}) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \oplus (\lambda b_1,\, \lambda b_2,\, \lambda b_3) = \left(\frac{\lambda}{2}\,a_1,\ \frac{\lambda}{2}\,a_2,\ \frac{\lambda}{2}\,a_3\right).$$

$\lambda \odot (\underline{a} \oplus \underline{b}) = (\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\lambda \odot \underline{b})$, így $V5$ teljesül.
$V6$ axióma:

$$\lambda \odot (\mu \odot \underline{a}) = \lambda \odot (\mu a_1,\ \ \mu a_2,\ \ \mu a_3) = (\lambda\mu a_1,\ \ \lambda\mu a_2,\ \ \lambda\mu a_3)$$

$$(\lambda \odot \mu) \odot \underline{a} = (\lambda\mu a_1,\ \ \lambda\mu a_2,\ \ \lambda\mu a_3)$$

$\lambda \odot (\mu \odot \underline{a}) = (\lambda \odot \mu) \odot \underline{a}$, így $V6$ teljesül.
$V7$ axióma:

$$(\lambda + \mu) \odot \underline{a} = ((\lambda + \mu)\ a_1, (\lambda + \mu)\ a_2, (\lambda + \mu)\ a_3)$$

$$(\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\mu \odot \underline{a}) = (\lambda a_1,\ \ \lambda a_2,\ \ \lambda a_3) \oplus (\mu a_1,\ \ \mu a_2,\ \ \mu a_3) = \left(\frac{\lambda}{2}\,a_1,\ \frac{\lambda}{2}\,a_2,\ \frac{\lambda}{2}\,a_3\right)$$

$(\lambda + \mu) \odot \underline{a} \ \neq (\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\mu \odot \underline{a})$, így $V7$ nem teljesül.
$V8$ axióma:
$1 \odot \underline{a} = (1a_1,\ \ 1a_2,\ \ 1a_3) = \underline{a}$, így $V8$ teljesül.

b) Mivel a megadott struktúrában a $\oplus$ művelet a ”hagyományos” vektorösszeadás, így a $V1 - V4$ axiómák, amelyek csak az összeadás műveletére vonatkoznak, nyilvánvalóan teljesülnek.
$V5$ axióma:

$$\lambda \odot (\underline{a} \oplus \underline{b}) = \lambda \odot (a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3) = (\lambda\,(a_1 + b_1)\,,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3) =$$

$$= (\lambda a_1 + \lambda b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3)$$

$$(\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\lambda \odot \underline{b}) = (\lambda a_1,\ \ a_2,\ \ a_3) + (\lambda b_1,\, b_2,\, b_3) = (\lambda a_1 + \lambda b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3)$$

$\lambda \odot (\underline{a} \oplus \underline{b}) = (\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\lambda \odot \underline{b})$, így $V5$ teljesül.
$V6$ axióma:

$$\lambda \odot (\mu \odot \underline{a}) = \lambda \odot (\mu a_1,\, a_2,\, a_3) = (\lambda\mu a_1,\, a_2,\, a_3)$$

$$(\lambda \odot \mu) \odot \underline{a} = (\lambda\mu a_1,\, a_2,\, a_3)$$

$\lambda \odot (\mu \odot \underline{a}) = (\lambda\mu) \odot \underline{a}$, így $V6$ teljesül.
$V7$ axióma:

$$(\lambda + \mu) \odot \underline{a} = ((\lambda + \mu)\, a_1,\, a_2,\, a_3) = (\lambda a_1 + \mu a_1, a_2, a_3)$$

$$(\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\mu \odot \underline{a}) = (\lambda a_1,\, a_2,\, a_3) + (\mu a_1,\, a_2,\, a_3) = (\lambda a_1 + \mu a_1,\, a_2 + a_2,\, a_3 + a_3)$$

$(\lambda + \mu) \odot \underline{a} \neq (\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\mu \odot \underline{a})$, így a $V7$ axióma nem teljesül.
$V8$ axióma:
$1 \cdot \underline{a} = (1a_1,\, a_2,\, a_3) = \underline{a}$ tehát $V8$ teljesül.

c) Mivel a megadott struktúrában a $\oplus$ művelet a "hagyományos" vektorösszeadás, így a $V1 - V4$ axiómák, amelyek csak az összeadás műveletére vonatkoznak, nyilvánvalóan teljesülnek.
$V5$ axióma:

$$\lambda \odot (\underline{a} \oplus \underline{b}) = \lambda \odot (a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3) = (a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3)$$

$$(\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\lambda \odot \underline{b}) = (a_1,\, a_2,\, a_3) \oplus (b_1,\, b_2,\, b_3) = (a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3)$$

$\lambda \odot (\underline{a} \oplus \underline{b}) = (\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\lambda \odot \underline{b})$, így $V5$ teljesül.
$V6$ axióma:

$$\lambda \odot (\mu \odot \underline{a}) = \lambda \odot \underline{a} = \underline{a}\ , \quad (\lambda \cdot \mu) \odot \underline{a} = \underline{a}$$

$\lambda \odot (\mu \odot \underline{a}) = (\lambda \cdot \mu) \odot \underline{a}$, így $V6$ teljesül.
$V7$ axióma:

$$(\lambda + \mu) \odot \underline{a} = \underline{a}\ , \quad (\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\mu \odot \underline{a}) = \underline{a} + \underline{a} = (2a_1,\, 2a_2,\, 2a_3)$$

$(\lambda + \mu) \odot \underline{a} \neq (\lambda \odot \underline{a}) \oplus (\mu \odot \underline{a})$, így $V7$ nem teljesül.
$V8$ axióma:
$1 \odot \underline{a} = \underline{a}$, így $V8$ teljesül.

Egyik struktúrában sem teljesül a $V1-$ $V8$ axiómák mindegyike, így egyik sem vektortér.

5. Ha $a = a^{-1}$ minden $a \in G$-re, akkor $a^2 = e$ minden $a \in G$-re, ahol e a G csoport egységeleme. Ekkor tetszőleges $a, b \in G$-re $(ab)^2 = e$, azaz

$$abab = e.$$

Az egyenletet balról a-val beszorozva és az $a^2 = e$ azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$bab = a.$$

Ezt pedig jobbról b-vel beszorozva és a $b^2 = e$ azonosságot alkalmazva kapjuk, hogy

$$ba = ab,$$

azaz G kommutatív.

6. A feladatot átfogalmazhatjuk úgy, hogy a csapatokat egy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorba rendezzük, ahol az a_i csapat legyőzte az a_{i+1} csapatot a bajnokságban. Teljes indukcióval igazoljuk az állítást. $n = 2$-re az állítás igaz, hiszen a két csapat közül legyen a sorban az első az a csapat, amelyik legyőzte a másikat. Tegyük fel, hogy $n-1$ csapatra igaz az állítás. Tekintsünk most n csapatot. Az n csapatból egyet kiválasztva (jelöljük a csapatot b-vel), a maradék $n-1$ db csapatot az indukciós feltevés szerint egy $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sorozatba rendezhetjük a feladat feltétele szerint. A b csapatot beillesztjük ebbe a sorba. Ha a b csapat legyőzte az a_1 csapatot, akkor a b-t az a_1 elé vesszük a sorba, és teljesül a feladat követelménye. Ha a b csapat nem győzte le az a_1 csapatot, akkor megyünk tovább, és megvizsgáljuk, hogy a b legyőzte-e az a_2 csapatot. Ha igen, akkor a b-t beilleszthetjük az a_1 és a_2 közé. Ha nem, megyünk tovább, és megvizsgáljuk, hogy b legyőzte-e az a_3 csapatot. Ha igen, készen vagyunk, hiszen a b beilleszthető az a_2 és a_3 közé. Ha nem, megyünk tovább. Látható, hogy a b-t vagy beillesztjük két a_i és a_{i+1} csapat közé vagy az a_{n-1} csapat után tehetjük a sorba.