Matematikai feladatmegoldó verseny 2010/11.
2. forduló - megoldások

1. Legyen
$$f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$
Az f függvény folytonos és minden $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén
$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}.$$
Ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor $a = \cos x \in (0,1)$, és minden $a \in (0,1)$ esetén
$$a^3 - 2a^2 + 1 = (a-1)\left(a - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0.$$
Ezért
$$f'(x) > 0, \quad \text{ha} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$
Tehát f szigorúan monoton növekedő a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$-n, és így
$$f(x) > f(0), \quad \text{ha} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$
Ez ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel.

2. Minden $n \geq 1$ egész és $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \left(x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}\right)' = \frac{1-(n+1)\,x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}$$
Ha $x = 1$, akkor a fenti összeg:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

3. (a) Egy X mátrix pontosan akkor szimmetrikus, ha $X^T = X$. Ezt, továbbá a transzformálásra vonatkozó szabályokat felhasználva:
$$\left(A \cdot A^T\right)^T = \left(A^T\right)^T \cdot A^T = A \cdot A^T,$$
így $A \cdot A^T$ szimmetrikus.
$$\left(A^T \cdot A\right)^T = A^T \cdot \left(A^T\right)^T = A^T \cdot A,$$
így $A^T \cdot A$ szimmetrikus.

(b) Például legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ekkor:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 21 \end{bmatrix},$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 2 & 1 & 4 \\ 11 & 4 & 25 \end{bmatrix}.$$

4. (a) 2 egyenletből álló 4 ismeretlenes egyenletrendszer felírása:
A végső bázistranszformációs táblázat szerkezete a megoldáshalmaz alapján a következő:

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{o}$
$\underline{a}_1$	1	2	−1	0	0
$\underline{a}_4$	0	−1	1	1	0

A táblázat alapján a következőképpen rekonstruálhatunk egy olyan 2 egyenletből álló, 4 ismeretlenes lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldáshalmaza a megadott M_0 halmaz: Tetszőlegesen megálasztjuk a bázisban lévő $\underline{a}_1, \underline{a}_4 \in \mathbb{R}^2$ vektorokat (lineárisan függetlenek legyenek), majd a táblázat alapján az

$$\underline{a}_2 = 2\underline{a}_1 - \underline{a}_4 \qquad \text{és} \qquad \underline{a}_3 = -\underline{a}_1 + \underline{a}_4$$

összefüggésekkel $\underline{a}_2$-t és $\underline{a}_3$-t meghatározzuk.
Például: legyen

$$\underline{a}_1 = (1,1)\,, \qquad \underline{a}_4 = (2,0)\,.$$

Ekkor

$$\underline{a}_2 = (0,2)\,, \qquad \underline{a}_3 = (2,-1)\,.$$

Így az együttható mátrix:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A feltételeknek megfelelő egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \end{array} \qquad (1)$$

3 egyenletből álló 4 ismeretlenes egyenletrendszer felírása:
A végső bázistranszformációs táblázat szerkezete a megoldáshalmaz ismeretében a következő:

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{o}$
$\underline{a}_1$	1	2	−1	0	0
$\underline{a}_4$	0	−1	1	1	0
$\underline{e}_3$	0	0	0	0	0

Válasszunk most az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_4$ vektornak két tetszőleges, $\mathbb{R}^3$-beli, lineárisan független vektort.
Például:

$$\underline{a}_1 := (1,2,1)\,, \qquad \underline{a}_4 := (1,1,0)\,.$$

Ekkor a táblázat alapján

$$\underline{a}_2 = 2\underline{a}_1 - \underline{a}_4 = (1,3,2) \qquad \text{és} \qquad \underline{a}_3 = -\underline{a}_1 + \underline{a}_4 = (0,-1,-1)\,.$$

Így az együttható mátrix:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A feltételeknek mefelelő egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & & & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \end{array} \qquad (2)$$

(b) Az (1) egyenletrendszer inhomogén párjai mindig megoldhatóak, ugyanis bármely $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$ esetén $r(A_1) = r([A_1, \underline{b}]) = 2$ teljesül.
A (2) egyenletrendszer inhomogén párjai nem mindig megoldhatóak, ugyanis megadható olyan $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ vektor, hogy $r([A_2, \underline{b}]) = 3$ legyen. Ekkor pedig $r(A_2) \neq r([A_2, \underline{b}])$, így az inhomogén egyenletrendszer nem oldható meg.

5. Elegendő megmutatni, hogy minden transzpozíció előáll az $(1\,2)$ és az $(1\,2\,3\,4)$ permutációk szorzataként. Kis számolással ellenőrizhetjük, hogy

$$\begin{aligned} (1\,3) &= (1\,2\,3\,4)^2(1\,2)(1\,2\,3\,4)^2(1\,2)(1\,2\,3\,4) \\ (1\,4) &= (1\,2\,3\,4)^3(1\,2)(1\,2\,3\,4)^2(1\,2)(1\,2\,3\,4)^2(1\,2)(1\,2\,3\,4) \\ (2\,3) &= (1\,2)(1\,2\,3\,4)(1\,2)(1\,2\,3\,4)^2 \\ (2\,4) &= (1\,2)(1\,2\,3\,4)^2(1\,2)(1\,2\,3\,4) \\ (3\,4) &= (1\,2\,3\,4)^2(1\,2)(1\,2\,3\,4)^2 \end{aligned}$$

6. A primitív $2n$-edik egységgyök definíciója alapján $\varepsilon^{2n} = 1$, de $\varepsilon^k \neq 1$ minden $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$-re. Így például $\varepsilon \neq 1$ és $\varepsilon^n \neq 1$. Ezért a véges geometriai sor összegképlete szerint

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k = \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}.$$

Másrészt $0 = 1 - \varepsilon^{2n} = (1-\varepsilon^n)(1+\varepsilon^n)$, amiből $1 + \varepsilon^n = 0$, azaz $\varepsilon^n = -1$ következik. Így

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k = \frac{2}{1-\varepsilon}.$$