PANNON EGYETEM
MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR
MATEMATIKA TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2009/10

5. FORDULÓ

1. feladat:

Mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

10 pont

2. **feladat:**

Konvergens-e a $\sin\dfrac{\pi}{2} + \sin\dfrac{\pi}{4} + \cdots + \sin\dfrac{\pi}{2n} + \cdots$ számsor?

10 pont

3. feladat:

Adja meg a $2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$ hatványsor konvergencia-intervallumát és összegfüggvényét!

10 pont

4. feladat:

Hányféleképpen bonthatjuk három természetes szám szorzatára a

$$105\ 162\ 624 = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 23$$

számot, ha a szorzótényezők sorrendje lényeges?

10 pont

5. feladat:

Legyen $p(x) := x^3 + 7x^2 + 3x - 9$.

Számítsuk ki tetszőleges $n \in N$ számra a $\sum_{i=0}^{n} p(i)$ összeget!

10 pont

6. feladat:

Tetszőleges $n, k \in N$, $0 \le k \le n$, számok esetén jelölje $S(n, k)$ egy n elemű halmaz k db diszjunkt nemüres részhalmazra való bontásainak ("partícióinak") számát!

Legyen $S(n,0) = 0$, ha $0 < n$ és $S(0,0) = 0$.

Például $S(4,2) = 7$ mert $\{1,2,3,4\} = \{1\} \cup \{2,3,4\} = \{2\} \cup \{1,3,4\} =$
$= \{3\} \cup \{1,2,4\} = \{4\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2\} \cup \{3,4\}$.

a) Számolja ki az alábbi értékeket:

$S(n,1)$, $S(n,n)$, $S(n,2)$, $S(n,n-1)$, $S(n,3)$

b) Mutassa meg, hogy tetszőleges $1 \le k \le n$ esetén

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + k \cdot S(n,k)$$

10 pont

Beadási határidő: 2010. március 29.
Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!