Matematikai feladatmegoldó verseny 2008/09
3. forduló — megoldások

1. Legyen
$$f(x) = 2x \text{ arctg } x - \ln(1+x^2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Azt kell belátni, hogy $f(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel
$$f'(x) = 2 \text{ arctg } x, \qquad x \in \mathbb{R},$$
ezért $f'(x) \leq 0$, ha $x \leq 0$ és $f'(x) \geq 0$, ha $x \geq 0$. Azt kapjuk, hogy f monoton csökkenő a $(-\infty, 0]$-án és monoton növekedő a $[0, \infty)$-en. Tehát $x = 0$ az f függvény minimumhelye, azaz $f(x) \geq f(0) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

2. A sorozat n-edik tagja $n^{1/n} = f(n)$, ahol
$$f(x) = x^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right), \qquad x \geq 1.$$
Minden $x \geq 1$ esetén
$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right)\frac{1}{x^2}(1 - \ln x).$$
Az f függvény folytonos, $f' > 0$ az $[1, e)$ intervallumban és $f' < 0$ az (e, ∞) intervallumban. Ezért f szigorúan monoton növekedő az $[1, e]$ intervallumban és szigorúan monoton csökkenő az $[e, \infty)$ intervallumban. Mivel $2 < e < 3$, azt kapjuk, hogy a szorzat legnagyobb tagja vagy $f(2) = \sqrt{2}$, vagy pedig $f(3) = \sqrt[3]{3}$. A nyilvánvaló
$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 9 > 8 = \left(\sqrt{2}\right)^6$$
egyenlőtlenségből $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ következik. Tehát a szorzat legnagyobb tagja $\sqrt[3]{3}$.

3.
$$\det(A_5) = 3 \cdot \det(A_4) - 2 \cdot \det(\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = 3 \cdot \det(A_4) - 2 \cdot \det(A_3)$$

$$\det(A_6) = 3 \cdot \det(A_5) - 2 \cdot \det(\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = 3 \cdot \det(A_5) - 2 \cdot \det(A_4)$$

Az A_5 és A_6 mátrixok determinánsát az utolsó oszlop szerint fejtettük ki, majd a második részmátrix determinánsát az utolsó sor szerint.

Így:
$$d_{n+1} = 3 \cdot d_n - 2 \cdot d_{n-1}$$

4. a) Egy lehetséges konstrukció:
A bázisban lévő $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ és $\underline{a}_4 \in \mathbb{R}^4$ vektoroknak szabadon választhatunk három darab $\mathbb{R}^4$-beli lineárisan független vektort.
Például legyen

$$\underline{a}_2 = (1,1,1,1), \qquad \underline{a}_3 = (1,1,1,0), \qquad \underline{a}_4 = (1,1,0,0)$$

(Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti vektorok valóban lineárisan függetlenek.)
A táblázat adatai alapján:

$$\underline{a}_1 = -1 \cdot \underline{a}_2 + 3 \cdot \underline{a}_3 + 1 \cdot \underline{a}_4 = (3,3,2,-1),$$
$$\underline{a}_5 = 1 \cdot \underline{a}_2 + 1 \cdot \underline{a}_3 + 2 \cdot \underline{a}_4 = (4,4,2,1),$$
$$\underline{b} = 2 \cdot \underline{a}_2 + 4 \cdot \underline{a}_3 + 3 \cdot \underline{a}_4 = (9,9,6,2).$$

Így a lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & = & 9 \\
3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & = & 9 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & 2x_5 & = & 6 \\
-x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2
\end{array}$$

b) A megoldóképlet alkalmazásával:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} x_4 &= 3 - (x_1 + 2x_5) \\ x_3 &= 4 - (3x_1 + x_5) \\ x_2 &= 2 - (-x_1 + x_5) \end{aligned}$$

A megoldáshalmaz:

$$M = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1, x_5 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = 2 + x_1 - x_5, \quad x_3 = 4 - 3x_1 - x_5, \quad x_4 = 3 - x_1 - 2x_5 \right\}$$

c) A homogén egyenletrendszerre:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & -1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $x_1, x_5 \in \mathbb{R}$.
Látható, hogy a homogén egyenletrendszer megoldásvektorai előállnak két nem párhuzamos (azaz lineárisan független) vektor lineáris kombinációjaként, így két dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben.

5. Alakítsuk át először az $X \to Y \equiv (\neg X) \vee Y$ és a De Morgan azonosságokat használva a kifejezést:

$$\begin{aligned} &((F \wedge B) \to (\neg A)) \to ((A \to (\neg B)) \to F) \\ &\qquad \equiv \quad ((\neg F) \vee (\neg B) \vee (\neg A)) \to (((\neg A) \wedge (\neg B)) \to F) \\ &\qquad \equiv \quad ((\neg F) \vee (\neg B) \vee (\neg A)) \to ((A \vee B) \vee F) \\ &\qquad \equiv \quad (F \wedge B \wedge A) \vee ((A \vee B) \vee F). \end{aligned}$$

Ez utóbbi kifejezés azonosan igaz, ha például az $F = \neg(A \vee B)$ formulát választjuk. Egy másik lehetséges választás, ha F maga is tautológia, például $F = A \vee (\neg A)$.

6. Tekintsük először az

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

összefüggést. Ebből az $\varepsilon^n = 1$ azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon^{k-1} = \frac{n\varepsilon^{n+1}-n\varepsilon^n-\varepsilon^n+1}{(\varepsilon-1)^2} = \frac{n\varepsilon-n-1+1}{(\varepsilon-1)^2} = \frac{n}{\varepsilon-1}.$$