Segédeszközünk a generátorfüggvény

Dr. Buzáné Kis Piroska[*] - *Dr. Szalkai István*[**]

A cikkünkben egy hatékony segédeszközt mutatunk be műszaki, gazdasági, ipari gyakorlatban felmerült bizonyos típusú matematikai problémák megoldására, olyanokra, amelyek matematikai szempontból tekintve végtelen számsorozatok vizsgálatára vezetnek.

A generátorfüggvények matematikai szempontból nézve hidat képeznek a diszkrét matematika és a folytonos analízis között. Teljes szépségüket csak akkor vesszük észre, ha mindkét oldalról foglalkozunk velük. Az utóbbi években elterjedt egyes kombinatorikai tételek kétféleképpen történő bizonyítása, melyek közül egyik a generátorfüggvényekkel történő bizonyítás. Számos esetben ez utóbbi a rövidebb vagy az elegánsabb. Az is előfordul, hogy a generátorfüggvényekkel való érvelés egyáltalán nem tűnik természetesnek. Sok probléma megoldására mégis ez a legjobb út. Most helyszűke miatt csak röviden, a definíciót és néhány elméleti feladatot, példát mutatunk be, gyakorlati alkalmazásokkal későbbi, bővebb cikk foglalkozik.

Mire használhatjuk a generátorfüggvényt?

Az ipari, termelési, gazdasági, társadalmi folyamatok folyamatos méréses vizsgálata során kapott bármilyen mérési eredmények, felmérési eredmények, mintakiértékelések számok egy végtelen sorozatának tekinthetők. A folyamatos mérési eredmények vizsgálata tehát matematikai szempontból számsorozatok vizsgálata. A számsorozatok hiteles, matematikai vizsgálatával megismerhetjük a tekintett folyamatban rejlő összefüggéseket. Egy folyamat megismerése és matematikai leírása - még akkor is, ha a leírás csak közelítő - a folyamat kiszámíthatóságát és szabályozhatóságát jelenti. Mindez végső soron hatékony, takarékos gazdálkodáshoz vezet. Gondoljunk arra, hogy nagy méretekben a mindössze fél százalék veszteség is óriási lehet, az alig fél százalék megtakarítás pedig jelentős.

Nézzünk néhány, generátorfüggvény segítségével megoldható problémát:

- Egy számsorozat elemeinek egzakt formulával való felírása

  Nem mindig járható út, vagy nem mindig kényelmes megoldás, ha a sorozat bonyolult.
- Rekurzív formula felírása

  Nagyon gyakori alkalmazás. Olykor az is előfordul, hogy a megtalált generátorfüggvényből írunk fel egy új rekurziót, ami nem a kiindulási. Így a vizsgált sorozat új megvilágításba kerül.
- Egy számsorozat statisztikai jellemzőinek felírása

  Átlag, szórás, egyéb jellemzők megadása.
- Egy számsorozat közelítő formulájának felírása

  Az elmélet legmélyebb és leghatékonyabb alkalmazásai tartoznak ide. Abban az esetben, ha egy nagyon bonyolult sorozattal találkozunk, akkor az egzakt formula helyett a közelítő formulát írjuk fel.
- Azonosságok bizonyítása

  Sok-sok azonosság ismert a kombinatorika és a matematika más területein, melyek bizonyítását hatékonyan végezhetjük el generátorfüggvények alkalmazásával.
- Egyebek

  Például egy sorozatról szeretnénk valamit megtudni, ilyenkor is segíthet a generátorfüggvény. Az is lehet, hogy sorozatunkkal olyan generátorfüggvényhez jutunk, amely nagyon hasonlít egy már általunk megismerthez.

---

[*] MEDFK, Természettudományi Intézet, Dunaújváros
[**] VE, Matematikai és Számítástechnikai Tanszék, Veszprém

Mielőtt rátéménk a generátorfüggvények alkalmazására, megismerkedünk néhány elnevezéssel, magával a generátorfüggvénnyel, jelöléssel, művelettel.

A generátorfüggvény

Legyen $\{a_n\}$ egy tetszőleges valós számsorozat.
Tekintsük az

(1) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = \sum_{n\ge 0} a_n x^n$$

hatványsort. Amennyiben e sor konvergens, a

(2) $$G(x) = \sum_{n\ge 0} a_n x^n$$

függvényt az $\{a_n\}$ sorozat *eredeti generátorfüggvény*ének vagy rövidebben *eredeti generátorfüggvény*nek nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, egyszerűen csak a *generátorfüggvény* elnevezést használjuk . Az $\{a_n$ sorozatot az együtthatók sorozatának nevezzük. A generátorfüggvényt a független változónak – x-nek – azokra az értékeire értelmezzük, amelyekre az (1) hatványsor konvergens, azaz Dom(G) = a (2) hatványsor konvergenciahalmaza.

A generátorfüggvényeken végezhető műveletek előtt ismerkedjünk még meg a *formális hatványsor* fogalmával is, s a rajta értelmezett műveletekkel. A formális hatványsorok tanulmányozása azért szükséges, mert a generátorfüggvények elméletében gyakran előfordul, hogy egy rekurzív relációt úgy oldunk meg, hogy elvégezzük az egymás utáni műveleteket anélkül, hogy biztosak lennénk benne, hogy a sorunk tényleg konvergál valamilyen függvényhez. Vannak olyan feladatok melyek esetén különböző műveletek elvégezhetők a formális hatványsorok körében, bár a tényleges/eredeti hatványsor nem konvergens. (A konvergencia kérdései a formális hatványsorok körében nem léteznek.) A feladat megoldása során végrehajtjuk az egész eljárást, végül kapunk egy függvénysort. Csak ezután vizsgáljuk, vajon konvergens-e a függvénysor, s így egy valóban létező függvényt reprezentál-e. Ha a függvénysor nem konvergens, még így is kaphatunk rengeteg információt a formális hatványsorból, de az is előfordulhat, hogy nem jutunk analitikus információhoz (például nem kapunk aszimptotikus formulát az együtthatók méretére vonatkozóan).
Például a

(3)
$$G(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

függvénysor mint formális hatványsor létezik, annak ellenére, hogy az x=0 kivételével sehol sem konvergens (, s így generátorfüggvény módszerrel megoldható problémák megoldására nem használható).

A *formális hatványsor* az alábbi alakú kifejezés:

(4) $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

ahol az $\{a_n$ sorozatot az együtthatók sorozatának nevezzük. Hangsúlyozzuk, hogy *formális hatványsorok* esetén x csak egy betű, vagyis konvergenciát most egyáltalában nem vizsgálunk!
A formális hatványsorokkal *műveleteket végezhetünk*, az összeadás, kivonás, szorzás szabályai az alábbiak:

(5) $$\sum_{n\ge 0} a_n x^n \pm \sum_{n\ge 0} b_n x^n = \sum_{n\ge 0} (a_n \pm b_n) x^n$$

(6) $$\sum_{n\ge 0} a_n x^n \sum_{n\ge 0} b_n x^n = \sum_{n\ge 0} c_n x^n$$

$$\text{ahol } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

A formális hatványsornak akkor és csak akkor van reciproka, ha $a_0 \ne 0$. A reciprok képzése bonyolultabb feladat, azonban $a_0 \ne 0$ esetben a reciprok egyértelmű.

Egyes feladatok kényelmesebben oldhatók meg egy másik típusú, *exponenciális generátorfüggvény*nek nevezett generátorfüggvénnyel.
Amennyiben a

(7) $$\sum_{n\ge 0} \frac{a_n}{n!} x^n$$

függvénysor konvergens, a

(8) $G(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}x^n$

függvényt *exponenciális generátorfüggvény-nek* nevezzük.
A generátorfüggvényekről részletesen [3]-ban olvashatunk, míg a könnyebben elérhető [2]-ben sok kidolgozott példát találunk.

Alkalmazások – néhány kiragadott példa

(I) Egy rekurzió megoldása

Legyenek az $a_0, a_1, a_2 \ldots$ számok egy folyamatos mérési folyamat során kapott eredmények, melyek között az alábbi rekurzív összefüggést állapítottuk meg:

(9) $a_{n+1}=2a_n+1 \qquad (n\geq 0,\ a_0=0)$

Adjuk meg a sorozat elemeinek rekurzió mentes képzési szabályát, azaz adjunk a sorozat elemeire képletet, explicit formulát!

Megoldhatjuk a feladatot úgy, hogy először kiszámítjuk a sorozat néhány elemét, megsejtjük az általános képletet, s ha a sejtésünket sikerült bebizonyítani (általában teljes indukcióval), akkor készen vagyunk. Amennyiben a sejtésünk téves volt, újabb sejtéssel, sejtésekkel próbálkozunk.

Oldjuk meg a feladatot generátorfüggvény alkalmazásával. Most az $\{a_n\}$ sorozat keresése helyett a $G(x)=\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ generátorfüggvényt keressük. Mihelyt a függvényt ismerjük, az $\{a_n$ sorozatot is ismerni fogjuk. Tehát a megoldás:
A (9) egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg x^n -nel és összegezzük azokra az n értékekre, amelyekre a rekurzió áll, példánkban $n\geq 0$-ra. Ezután próbáljunk kapcsolatot keresni ezek között az összegek és az egyenlőre még ismeretlen generátorfüggvény között. Így eljárva a (9) baloldalából kapjuk:

(14) $\sum_{n\geq 0}a_{n+1}x^n$

Most már az a kérdés, hogyan hozzuk kapcsolatba a (14) kifejezést generátorfüggvénnyel. A (14) kifejezés majdnem ugyanolyan alakú mint a (2) kifejezéssel megadott generátorfüggvény, a különbség az, hogy az együttható indexe eggyel nagyobb, mint a hatványkitevő. A (14) kifejezést alakítsuk át a következőképpen:

(15) $\sum_{n\geq 0}a_{n+1}x^n = a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots$

$=\{(a_0+a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots)-a_0\}/x=G(x)/x$

Ebben a problémában $a_0=0$.
Most alakítsuk át a (9) kifejezés jobboldalát, szorozzunk be x^n -nel és összegezzünk $n\geq 0$-ra. Így kapjuk:

(16)

$\sum_{n\geq 0}(2a_n+1)x^n=2G(x)+\sum_{n\geq 0}x^n=2G(x)+\frac{1}{1-x}$

összefüggés áll, ha $|x|<1$.

A (15) és (16) kifejezésből kapjuk:

(17) $\frac{G(x)}{x}=2G(x)+\frac{1}{1-x}$

ahonnan kapjuk:

(18) $G(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$.

Ez a keresett generátorfüggvény. Az ismeretlen a_n számok az x^n együtthatói. A feladatunk most már a (18) alatti függvény kifejtése (2) alakú hatványsorba. Nem nehéz ezt elvégeznünk akkor, ha $G(x)$ racionális törtfüggvény, hiszen parciális törtekre bontással a (18) kifejezés a következőképpen alakítható át:

(19) $\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=x\left\{\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}\right\}=$

(20)

$$= \{2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \ldots\} - \{x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\} =$$

(21)

$$= (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + (2^4-1)x^4 + \ldots$$

A (21) kifejezésből leolvashatjuk, hogy az x^n együtthatói, az ismeretlen a_n számok értékei a következők: $a_n = 2^n - 1$ minden $n \geq 0$-ra.

Ezt a feladatot generátorfüggvény alkalmazása nélkül is elég könnyen megoldhatjuk. Sőt még azt is gondolhatjuk, hogy a generátorfüggvénnyel csak elbonyolítottuk a megoldást. Ennek az az oka, hogy e példában az ismeretlen számsorozat megsejtése könnyű. Gyakran találkozunk a fentinél jóval nehezebben megsejthető számsorozattal. A generátorfüggvénnyel történő megoldás azonban ez esetben sem nehezebb a fentinél. A fenti példa teljes részletességgel bemutatja a generátorfüggvény alkalmazását. Az is kiderült, hogy e módszert érdemes alkalmazni azokban az esetekben amikor a válasz, az explicit formula megadása, egyáltalán nem nyilvánvaló.

(II) A pénzváltási feladatkör

Ide a következő feladat és általánosítása tartozik: Tegyük fel, hogy az a és b számok relatív prím egészek. Hányféleképpen lehet n-et az a és b egész szám szorosainak összegére felbontani (vagyis hányféleképpen lehet n forintot a és b forintos érmékre felváltani).
Másképpen fogalmazva: hány nem negatív egész gyöke van az $ax + by = n$ egyenletnek n, mint paraméter függvényében?

A megoldást a $G(x) = \dfrac{1}{(1-x^a)(1-x^b)}$

generátorfüggvény segítségével kapjuk.[2].
A feladat általánosításakor az n-et kettőnél több relatív prím egész szám egész számú többszöröseinek összegeként írjuk fel. Ez esetben a generátorfüggvény is e G(x) függvény általánosítása. Egy gyakorlati feladatban a és b lehetnek gépek/szállítók,... kapacitásai, n pedig a kívánt árumennyiség. A kérdés az, hogy az egyes gépek/beszállítók hányféleképpen részesedhetnek az áru termelésében/beszállításában. [2,3].

(III) Egy tervezési feladat

Egy társaság minden hónapban egy egységgel nagyobb mennyiséggel növeli termelését, mint amennyivel növelte előző hónapban a termelését az azt megelőző hónaphoz képest. Mennyit termel az n-dik hónapban, ha a legelső havi termelését egy egységnek vesszük.
A megoldást az alábbi rekurzió szolgáltatja:

$$a_{n+1} = a_n + (a_n - a_{n-1}) + 1, \text{ ahol } a_1 = 1,\ a_2 = 3.$$
[2].

A generátorfüggvényt használhatjuk még statisztikai számjellemzők - például átlag, szórás, variancia - kiszámítására. [3].

Generátorfüggvény a matematikai modellezésben

Ipari, társadalmi, gazdasági folyamatok matematikai modellezésében is alkalmazhatjuk a generátorfüggvény módszert. Amennyiben a vizsgált mennyiségeink között sikerül felírnunk egy (jól közelítő rekurzív) összefüggést, lehetséges, hogy a tekintett folyamatot matematikailag le tudjuk írni. A generátorfüggvény módszer alkalmazására kiváló példát találunk aprítási folyamatok matematikai modellezésében. [1].
Ez az alkalmazás különösen meggyőző érv a mellett, hogy a generátorfüggvény gyakorlati problémák eredményes megoldására használható matematikai eszközök egyike.

Irodalom

[1] **Dr. László Zoltán**: Az aprítási folyamatok matematikai modellezésével kapcsolatos újabb eredmények VEAB Felolvasó ülések, F/22, Veszprém,1993.

[2] **Dr. Szalkai István**: Diszkrét matematika feladatgyűjtemény, Veszprémi Egyetemi Kiadó, Veszprém, 1997.

[3] **Herbert S. Wilf**: Generatingfunctinology, Academic Press, Inc., USA, 1990.