

1999. OKTÓBER
XXXIX. ÉVFOLYAM

10

 A
MŰSZAKI
FOLYÓIRATA

GT

gépgyártástechnológia

30 éves a főiskolai oktatás Dunaújvárosban

ORSZÁGOS JUBILEUMI TUDOMÁNYOS

KONFERENCIA ÉS SZAKKIÁLLÍTÁS

Dunaújváros, 1999. október 20-21-22.



EZ A SZÁM A
KONFERENCIA

Anyagtudományi,

Kohászati,

Gépészeti,

Minőségbiztosítási,

Informatikai,

Matematikai,

Környezetvédelmi

SZEKCIÓNAK
ELŐADÁSAIT
TARTALMAZZA



Segédeszközünk a generátorfüggvény

Dr. Buzáné Kis Piroska* - Dr. Szalkai István**

A cikkünkben egy hatékony segédeszközt mutatunk be műszaki, gazdasági, ipari gyakorlatban felmerült bizonyos típusú matematikai problémák megoldására, olyanokra, amelyek matematikai szempontból tekintve végtelen számsorozatok vizsgálatára vezetnek.

A generátorfüggvények matematikai szempontból nézve hidat képeznek a diszkrét matematika és a folytonos analízis között. Teljes szépségüket csak akkor vesszük észre, ha mindkét oldalról foglalkozunk velük. Az utóbbi években elterjedt egyes kombinatorikai tételek kétféleképpen történő bizonyítása, melyek közül egyik a generátorfüggvényekkel történő bizonyítás. Számos esetben ez utóbbi a rövidebb vagy az elegánsabb. Az is előfordul, hogy a generátorfüggvényekkel való érvelés egyáltalán nem tűnik természetesnek. Sok probléma megoldására mégis ez a legjobb út. Most helyszűke miatt csak röviden, a definíciót és néhány elméleti feladatot, példát mutatunk be, gyakorlati alkalmazásokkal későbbi, bővebb cikk foglalkozik.

Mire használhatjuk a generátorfüggvényt?

Az ipari, termelési, gazdasági, társadalmi folyamatok folyamatos méréses vizsgálata során kapott bármilyen mérési eredmények, felmérési eredmények, mintakiértékelések számok egy végtelen sorozatának tekinthetők. A folyamatos mérési eredmények vizsgálata tehát matematikai szempontból számsorozatok vizsgálata. A számsorozatok hiteles, matematikai vizsgálatával megismerhetjük a tekintett folyamatban rejlő összefüggéseket. Egy folyamat megismerése és matematikai leírása - még akkor is, ha a leírás csak közelítő - a folyamat kiszámíthatóságát és szabályozhatóságát jelenti. Mindez végső soron hatékony, takarékos gazdálkodáshoz vezet. Gondoljunk arra, hogy nagy méretekben a mindössze fél százalék veszteség is óriási

lehet, az alig fél százalék megtakarítás pedig jelentős.

Nézzünk néhány, generátorfüggvény segítségével megoldható problémát:

- Egy számsorozat elemeinek egzakt formulával való felírása

Nem mindig járható út, vagy nem mindig kényelmes megoldás, ha a sorozat bonyolult.

- Rekurzív formula felírása

Nagyon gyakori alkalmazás. Olykor az is előfordul, hogy a megtalált generátorfüggvényből írunk fel egy új rekurziót, ami nem a kiindulási. Így a vizsgált sorozat új megvilágításba kerül.

- Egy számsorozat statisztikai jellemzőinek felírása

Átlag, szórás, egyéb jellemzők megadása.

- Egy számsorozat közelítő formulájának felírása

Az elmélet legmélyebb és leghatékonyabb alkalmazásai tartoznak ide. Abban az esetben, ha egy nagyon bonyolult sorozattal találkozunk, akkor az egzakt formula helyett a közelítő formulát írjuk fel.

- Azonosságok bizonyítása

Sok-sok azonosság ismert a kombinatorika és a matematika más területein, melyek bizonyítását hatékonyan végezhetjük el generátorfüggvények alkalmazásával.

- Egyebek

Például egy sorozatról szeretnénk valamit megtudni, ilyenkor is segíthet a generátorfüggvény. Az is lehet, hogy sorozatunkkal olyan generátorfüggvényhez jutunk, amely nagyon hasonlít egy már általunk megismerthez.

* MEDFK, Természettudományi Intézet, Dunaújváros

** VE, Matematikai és Számítástechnikai Tanszék, Veszprém

Mielőtt rátémek a generátorfüggvények alkalmazására, megismerkedünk néhány elnevezéssel, magával a generátorfüggvénnyel, jelöléssel, művelettel.

A generátorfüggvény

Legyen $\{a_n\}$ egy tetszőleges valós számsorozat. Tekintsük az

$$(1) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

hatványsort. Amennyiben e sor konvergens, a

$$(2) \quad G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

függvényt az $\{a_n\}$ sorozat *eredeti generátorfüggvényének* vagy rövidebben *eredeti generátorfüggvénynek* nevezzük. Amennyiben nem okoz félreértést, egyszerűen csak a *generátorfüggvény* elnevezést használjuk. Az $\{a_n\}$ sorozatot az együtthatók sorozatának nevezük. A generátorfüggvényt a független változónak – x -nek – azokra az értékeire értelmezzük, amelyekre az (1) hatványsor konvergens, azaz $\text{Dom}(G) = a$ (2) hatványsor konvergenciahalmaza.

A generátorfüggvényeken végezhető műveletek előtt ismerkedjünk meg meg a *formális hatványsor* fogalmával is, s a rajta értelmezett műveletekkel. A formális hatványsorok tanulmányozása azért szükséges, mert a generátorfüggvények elméletében gyakran előfordul, hogy egy rekurzív relációt úgy oldunk meg, hogy elvégezzük az egymás utáni műveleteket anélkül, hogy biztosak lennénk benne, hogy a sorunk tényleg konvergál valamilyen függvényhez. Vannak olyan feladatok melyek esetén különböző műveletek elvégezhetők a formális hatványsorok körében, bár a tényleges/eredeti hatványsor nem konvergens. (A konvergencia kérdései a formális hatványsorok körében nem léteznek.) A feladat megoldása során végrehajtjuk az egész eljárást, végül kapunk egy függvényt. Csak ezután vizsgáljuk, vajon konvergens-e a függvény, s így egy valóban létező függvényt reprezentál-e. Ha a függvény nem konvergens, még így is kaphatunk rengeteg információt a formális hatványsorból, de az is előfordulhat,

hogy nem jutunk analitikus információhoz (például nem kapunk aszimptotikus formulát az együtthatók méretére vonatkozóan).

Például a

(3)

$$G(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + n!x^n + \dots$$

függvényt mint formális hatványsor létezik, annak ellenére, hogy az $x=0$ kivételével sehol sem konvergens, s így generátorfüggvény módszerrel megoldható problémák megoldására nem használható).

A *formális hatványsor* az alábbi alakú kifejezés:

$$(4) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

ahol az $\{a_n\}$ sorozatot az együtthatók sorozatának nevezzük. Hangsúlyozzuk, hogy *formális hatványsorok* esetén x csak egy betű, vagyis konvergenciát most egyáltalában nem vizsgálunk!

A formális hatványsorokkal *műveleteket végezhetünk*, az összeadás, kivonás, szorzás szabályai az alábbiak:

$$(5) \quad \sum_{n \geq 0} a_n x^n \pm \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$(6) \quad \sum_{n \geq 0} a_n x^n \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$$

$$\text{ahol } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

A formális hatványsornak akkor és csak akkor van reciproka, ha $a_0 \neq 0$. A reciproka képzése bonyolultabb feladat, azonban $a_0 \neq 0$ esetben a reciproka egyértelmű.

Egyes feladatok kényelmesebben oldhatók meg egy másik típusú, *exponenciális generátorfüggvénynek* nevezett generátorfüggvénnyel.

Amennyiben a

$$(7) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$$

függvénysor konvergencia, a

$$(8) \quad G(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$$

függvényt *exponenciális generátorfüggvény*-nek nevezzük.

A generátorfüggvényekről részletesen [3]-ban olvashatunk, míg a könnyebben elérhető [2]-ben sok kidolgozott példát találunk.

Alkalmazások – néhány kiragadott példa

(1) Egy rekurzió megoldása

Legyenek az a_0, a_1, a_2, \dots számok egy folyamatos mérési folyamat során kapott eredmények, melyek között az alábbi rekurzív összefüggést állapítottuk meg:

$$(9) \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n \geq 0, a_0 = 0)$$

Adjuk meg a sorozat elemeinek rekurzió mentes képzési szabályát, azaz adjunk a sorozat elemeire képletet, explicit formulát!

Megoldhatjuk a feladatot úgy, hogy először kiszámítjuk a sorozat néhány elemét, megsejtjük az általános képletet, s ha a sejtésünket sikerült bebizonyítani (általában teljes indukcióval), akkor készen vagyunk. Amennyiben a sejtésünk téves volt, újabb sejtéssel, sejtésekkel próbálkozunk.

Oldjuk meg a feladatot generátorfüggvény alkalmazásával. Most az $\{a_n\}$ sorozat kere-

sése helyett a $G(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ generátorfüggvényt keressük. Mihelyt a függvényt ismerjük, az $\{a_n\}$ sorozatot is ismerni fogjuk. Tehát a megoldás:

A (9) egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg x^n -nel és összegezzük azokra az n értékekre, amelyekre a rekurzió áll, példánkban $n \geq 0$ -ra. Ezután próbáljunk kapcsolatot keresni ezek között az összegek és az egyenlőre még ismeretlen generátorfüggvény között. Így eljárva a (9) baloldalából kapjuk:

$$(14) \quad \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^n$$

Most már az a kérdés, hogyan hozzuk kapcsolatba a (14) kifejezést generátorfüggvénnyel. A (14) kifejezés majdnem ugyanolyan alakú mint a (2) kifejezéssel megadott generátorfüggvény, a különbség az, hogy az együtttható indexe eggyel nagyobb, mint a hatványkitevő. A (14) kifejezést alakítsuk át a következőképpen:

$$(15) \quad \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^n = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$$

$$= \{(a_0 + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots) - a_0\} / x = G(x) / x$$

Ebben a problémában $a_0 = 0$.

Most alakítsuk át a (9) kifejezés jobboldalát, szorozzuk be x^n -nel és összegezzük $n \geq 0$ -ra. Így kapjuk:

$$(16) \quad \sum_{n \geq 0} (2a_n + 1)x^n = 2G(x) + \sum_{n \geq 0} x^n = 2G(x) + \frac{1}{1-x}$$

összefüggés áll, ha $|x| < 1$.

A (15) és (16) kifejezésből kapjuk:

$$(17) \quad \frac{G(x)}{x} = 2G(x) + \frac{1}{1-x}$$

ahonnan kapjuk:

$$(18) \quad G(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Ez a keresett generátorfüggvény. Az ismeretlen a_n számok az x^n együttthatói. A feladatunk most már a (18) alatti függvény kifejtése (2) alakú hatványsorba. Nem nehéz ezt elvégeznünk akkor, ha $G(x)$ racionális törtfüggvény, hiszen parciális törtre bontással a (18) kifejezés a következőképpen alakítható át:

$$(19) \quad \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = x \left\{ \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \right\} =$$

$$(20) \\ = \{2x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + 2^4 x^4 + \dots\} - \\ \{x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\} =$$

(21)

$$= (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + (2^4-1)x^4 + \dots$$

A (21) kifejezésből leolvashatjuk, hogy az x^n együtthatói, az ismeretlen a_n számok értékei a következők: $a_n = 2^n - 1$ minden $n \geq 0$ -ra.

Ezt a feladatot generátorfüggvény alkalmazása nélkül is elég könnyen megoldhatjuk. Sőt még azt is gondolhatjuk, hogy a generátorfüggvénnyel csak elbonyolítottuk a megoldást. Ennek az az oka, hogy e példában az ismeretlen számsorozat megsejtése könnyű. Gyakran találkozunk a fenténél jóval nehezebben megsejthető számsorozattal. A generátorfüggvénnyel történő megoldás azonban ez esetben sem nehezebb a fenténél. A fenti példa teljes részletességgel bemutatja a generátorfüggvény alkalmazását. Az is kiderült, hogy e módszert érdemes alkalmazni azokban az esetekben amikor a válasz, az explicit formula megadása, egyáltalán nem nyilvánvaló.

(II) A pénzváltási feladatkör

Ide a következő feladat és általánosítása tartozik: Tegyük fel, hogy az a és b számok relatív prím egészek. Hányféleképpen lehet n -et az a és b egész szám szorosainak összegére felbontani (vagyis hányféleképpen lehet n forintot a és b forintos érmékre felváltani).

Másképpen fogalmazva: hány nem negatív egész gyöke van az $ax + by = n$ egyenletnek n , mint paraméter függvényében?

$$\text{A megoldást a } G(x) = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)}$$

generátorfüggvény segítségével kapjuk. [2].

A feladat általánosításakor az n -et kettőnél több relatív prím egész szám egész számú többszöröseinek összegeként írjuk fel. Ez esetben a generátorfüggvény is e $G(x)$ függvény általánosítása. Egy gyakorlati feladatban a és b lehetnek gépek/szállítók, ... kapacitásai,

n pedig a kívánt árumennyiség. A kérdés az, hogy az egyes gépek/beszállítók hányféleképpen részesedhetnek az áru termelésében/beszállításában. [2,3].

(III) Egy tervezési feladat

Egy társaság minden hónapban egy egységgel nagyobb mennyiséggel növeli termelését, mint amennyivel növelte előző hónapban a termelését az azt megelőző hónaphoz képest. Mennyit termel az n -dik hónapban, ha a legelső havi termelését egy egységnek vesszük.

A megoldást az alábbi rekurzió szolgáltatja:

$$a_{n+1} = a_n + (a_n - a_{n-1}) + 1, \text{ ahol } a_1 = 1, a_2 = 3. \\ [2].$$

A generátorfüggvényt használhatjuk még statisztikai számjellezők - például átlag, szórási, variancia - kiszámítására. [3].

Generátorfüggvény a matematikai modellezésben

Ipari, társadalmi, gazdasági folyamatok matematikai modellezésében is alkalmazhatjuk a generátorfüggvény módszert. Amennyiben a vizsgált mennyiségek között sikerül felírunk egy (jól közelítő rekurzív) összefüggést, lehetséges, hogy a tekintett folyamatot matematikailag le tudjuk írni. A generátorfüggvény módszer alkalmazására kiváló példát találunk aprítási folyamatok matematikai modellezésében. [1].

Ez az alkalmazás különösen meggyőző érv a mellett, hogy a generátorfüggvény gyakorlati problémák eredményes megoldására használható matematikai eszközök egyike.

Irodalom

- [1] Dr. László Zoltán: Az aprítási folyamatok matematikai modellezésével kapcsolatos újabb eredmények VEAB Felolvasó ülések, F/22, Veszprém, 1993.
- [2] Dr. Szalkai István: Diszkrét matematika feladatgyűjtemény, Veszprémi Egyetemi Kiadó, Veszprém, 1997.
- [3] Herbert S. Wilf: Generatingfunctionology, Academic Press, Inc., USA, 1990.