NAGYOBBRÉSŰ EGYSZERŰSÍTETT MOCSARAK
és KOMBINATORIKUS ALKALMAZÁSAIK

doktori értekezés

SZALKAI ISTVÁN

Budapest-Veszprém, 1991

T A R T A L O M

O. BEVEZETÉS

Jelen dolgozatban bevezetjük az általános m - résű ($m<\omega_o$) egyszerűsített mocsarak fogalmát, majd részletesen megvizsgáljuk tulajdonságaikat , végül néhány példát mutatunk alkalmazásukra a kombinatorikus halmazelméletben.

Az általános mocsarakat R.B. Jensen fedezte fel L finom struktúrájának vizsgálatával, erős modellelméleti tételek bizonyításakor az 1970-es évek elején ([Je0],[Je1]). D.Velleman egy évtizeddel később ([Ve2],[Ve3]) jelentősen egyszerűsítette az 1- és 2-résű mocsarak fogalmát ([Ve8]), és így használatukat is. S.Shelah L.J. Stanley is hasonló eredményeket ért el [SS0]-ban.

Az 1.fejezetben nagyon röviden ismertetjük a mocsarak fejlődését, különböző definícióikat,a rokon kombinatorikus elveket,majd bevezetjük az általunk definiált nagyobbrésű egyszerűsített mocsarakat. Mindezek során több példát mutatunk az 1- és nagyobbrésű mocsarak felhasználására.

Célunk elsősorban nem a különböző mocsarak kombinatorikus halmazelméletben elfoglalt helyének és konzisztenciájának bemutatása, hanem belső struktúrájuk részletesebb felderítése volt. Ezt az 1. fejezet csak előkészíti.

A 2. fejezetben bizonyítjuk az 1- és nagyobbrésű mocsarak alapvető tulajdonságait. Az 1 -résű mocsarak esetében a legtöbb állításra új,közvetlen bizonyítást adunk, valamint általánosítjuk D.Velleman [Ve8] tételeit.Mindezek felhasználásával a 3.fejezetben egy általános, szabad részhalmazokra vonatkozó tételt bizonyítunk, majd a 4. fejezetben egy partíció -reláció tételt igazolunk. Ez utóbbi választ ad S.Shelah és L.J.Stanley [SS2] -beli, az előbbi (gyenge formában) Hajnal András és Komjáth Péter [HK] -beli sejtésére.Az 5.fejezetben igazoljuk az általunk definiált nagyobbrésű egyszerűsített mocsarak létezésének konzisztenciáját.

A dolgozatban csak n -résű ($n<\omega_0$) egyszerűsített mocsarakkal foglalkozunk, az $n\geq\omega_0$ eset nyitott.További megoldatlan problémákat találhatunk még az 1. fejezetben. A dolgozat fő eredményei a 3.2. és a 4.8.Tételek, valamint a nagyobbrésű mocsarak definíciói és alapvető tulajdonságai (1.26-32, 2.20.-43). Önálló eredmények még a 2.7. és 4.12. Állítások.

A dolgozat eredményeit az 1987-89 években nyertem.Köszönetemet fejezem ki Komjáth Péter témavezetőmnek értékes tanácsaiért. Hálás vagyok továbbá Ronald Björn Jensen professzornak (Oxford,Anglia) , aki oxfordi tanulmányutam alatt (1987) személyesen ismertetett meg közelebbről a mocsarak részletesebb struktúrájával,valamint Daniel Velleman és Akihiro Kanamori professzoroknak (USA) részletes , hosszú leveleiért.

Általában a halmazelmélet megszokott jelöléseit használjuk,az itt nem részletezett fogalmak [Ku], [Je] könyvekben megtalálhatóak. Most csak néhány, általunk használt jelölést sorolunk fel, melyek esetleg nem általánosan elterjedtek.

Jelölések

$\neg\phi$ = a ϕ formula tagadása

CH, GCH = kontinuum-hipotézis és az általánosított k.h.

On, Card = rendszámok és számosságok osztálya

$\kappa^{+} = \aleph_{\alpha+1}$ és $\kappa^{+m} = \aleph_{\alpha+m}$ ha $\kappa = \aleph_{\alpha} \in$ Card

$\kappa^{-} = \aleph_{\beta}$ ha $\kappa = \aleph_{\beta+1}$ rákövetkező rendszám

tip(x) = az x halmaz rendtípusa

$\langle s_{\alpha}:\alpha<\mu\rangle$ = az s_{α} elemek $(\alpha<\mu)$ μ-hosszú sorozata, amit sokszor $\vec{s}$ - val is rövidítünk

$[\alpha,\beta)$ = $\{\gamma\in On : \alpha\leq\gamma<\beta\}$, és hasonlóan $[\alpha,\beta]$ -ra (rendszám--intervallumok)

$[S]^{\lambda}$ = $\{x\subset S : tip(x)=\lambda\}$ ha $\lambda\in On$

= $\{x\subset S : |x|=\lambda\}$ ha $\lambda\in Card$, $|x|$ = x számossága

$[S]^{<\lambda}$, $[S]^{\leq\lambda}$ hasonlóan definiálható (S tetszőleges halmaz)

$f''H$ = $\{f(x):x\in H\}$ ha f függvény, H halmaz

$f\restriction H$ = f megszorítása H -ra

$f:A \hookrightarrow B$ = f függvény, $Dom(f)\subseteq A$, $Ran(f)\subseteq B$

$x^\frown y$ = az x és y sorozatok konkatenációja (egymáshoz fűzése)

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$ = függvények kompozíciója

lub(A) = ssup(A) = $\min\{\alpha\in On: \forall a\in A\ \alpha>a\}$
(least upper bound ill. strong supremum)
ahol $A\subseteq On$ tetszőleges

A szövegszerkesztő hiányosságai miatt emeletes indexekben gyakran írunk pl. ω_{o} helyett $\omega.$ -ot, ω_{1} helyett $\omega,$ -őt és st^{1} helyett st' -őt.

1. EGY - és NAGYOBB RÉSŰ MOCSARAK DEFINÍCÓJA

Jelen fejezetben általánosan definiáljuk az 1- és nagyobb résű egyszerűsített mocsarakat. Alapvető tulajdonságaikat a következő fejezetben mutatjuk be, melyek segítségével a 3. fejezetben egy általános tételt bizonyítunk. Mivel az általános definíció eléggé bonyolult (ld. 1.26.-30. Definíciók), könnyebb megértéséhez célszerű, ha előbb az 1- és 2-résű mocsarakkal is megismerkedünk (1.0.-13, 23, 24. Definíciók). Ennek ürügyén röviden bemutatjuk fejlődésüket, az ún. "szokásos" és az "egyszerűsített" mocsarakat, és alkalmazásaikat. Így nem csak kombinatorikus halmazelméletben betöltött szerepüket, hanem (az időnként vázolt bizonyításokon keresztül is) felépítésük részleteit is jobban megérthetjük. (A mocsarak fejlődéséről, alkalmazásairól bővebben [De0], [De1] [SS0], [Ve0], [Ka2], [St1]-ben olvashatunk.)

K. Gödel az 1930-as években definiálta a konstruktív halmazok osztályát, L -et, és írta le elemi tulajdonságaikat ([G1], [G2]). A Löwenheim-Skolem tétel általánosításaként fogalmazta meg az 1960-as években C. Chang az ún. "*Kétszámosság-sejtést*" (Two Cardinal Transfer Property). Többek között: $(\forall\lambda,\kappa\in Card)(\forall n\in\omega_o)\ (\lambda^{+n},\lambda)\to(\kappa^{+n},\kappa)$ — az ún. "*n-résű kétszámosság sejtés*". A sejtés $n=1, \kappa=\aleph_o$ esetben ZFC--ből következik (pl. [CK], [De0], [De1]), míg 1970 -ben R.B. Jensen L szerkezetének alaposabb vizsgálatával megmutatta: L $\models$ "$(\forall\lambda,\kappa\in Card)(\forall n\in\omega_o)\ (\lambda^{+n},\lambda)\to(\kappa^{+n},\kappa)$" (ld. [Je0]). A bizonyítás elemzése alapján olyan kombinatorikus struktúrákat fedezett fel, melyek létezése L-ben (aránylag) könnyen bizonyítható, és nem csak a kétszámosság sejtés, hanem sok más tétel igazolására is alkalmas a kombinatorikus halmazelméletben. (Pl. a mocsarakat.)

Legyen $\kappa\geq\omega_1$ reguláris számosság. Ha csak κ méretű $\mathfrak{A}$ struktúrát (halmazt) szeretnénk konstruálni, κ lépésben úgy, hogy minden lépésben csak κ -nál kisebb méretű struktúrát használhatunk fel, akkor egy egyszerű (elemi) növő lánc elegendő: $\mathfrak{A} = \cup\{\mathfrak{A}_i : i<\kappa\}$, és

$\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{U}_j$ ha $i<j<\kappa$. Azonban sok esetben lehetséges κ^+ métű $\mathfrak{U}$ struktúrát is felépíteni κ lépésben, κ-nál kisebb struktúrákból. A kérdés már csak az: hogyan. Első közelítésben $\nu<\kappa^+$ esetén $\mathfrak{U}_\nu$= *bizonyos* $\mathfrak{U}_{\nu,\tau}$-k úniója, ahol $\{\mathfrak{U}_{\nu,\tau}:\tau\in S_\nu\}$ elemi növő lánc és $\mathfrak{U}=\cup\{\mathfrak{U}_\nu:\nu<\kappa^+\}$. Az $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_\nu$ és $\mathfrak{U}_{\nu,\tau}$ struktúrák és a közöttük értelmezett $\prec$ (elemi része) reláció fát alkot, és a közöttük lévő $\pi_{\tau,\nu}$ beágyazások mutatják, hogyan épül fel $\mathfrak{U}$ az $\mathfrak{U}_{\nu,\tau}$ struktúrákból. Még tovább mehetnénk: κ^{+n} $(n<\omega_o)$, sőt $\kappa^{+\beta}$ $(\beta<\kappa)$ méretű struktúrát is építhetnénk, de ekkor $\mathfrak{U}_s$ $(s\subset\kappa$ n ill. β hosszúságú indexsorozat) struktúrákra, és a közöttük levő beágyazásokra lenne szükségünk. Az általános (κ,β) mocsár definíciója túlságosan körülményes, helyhiány miatt csak a kiadatlan [Je1] és [St0] kéziratokra utalhatunk. Közelebbről csak az n=1 és n=2 esettel ismerkedünk meg.

1.a. EGYRÉSŰ MOCSARAK

Mivel a D. Vellemann által bevezetett struktúrák jelentősen eltérnek a Jensen által definiáltaktól, megkülönböztetésül néha "szokásos" (Jensen) és "egyszerűsített (Velleman) mocsarakat írunk. (Bármelyik létezéséből ZFC-ben következik a másik létezése, így a jelző elhagyása nem okoz félreértést.)

1.0. DEFINÍCIÓ ([De1,Ch.VIII§2) **$(\kappa,1)$ -** (κ *magas* 1 *résű*) **szokásos mocsár. Adekvát** *rendszámoknak nevezzük a megengedhető (admissible) rendszámokat és határértékeiket. Ha* $\mathcal{S}\subseteq\kappa\times\kappa^+$ *egy adekvát rendszámpárokból álló halmaz, melyre* $(\alpha,\nu),(\alpha',\nu')\in\mathcal{S}$ *esetén* $\alpha<\nu$ & & $\alpha<\alpha' \Rightarrow \nu<\alpha'$ *, akkor legyenek*

$S^o := \{\alpha\le\kappa : \exists\nu\ (\alpha,\nu)\in\mathcal{S}\}$, $S^1 := \{\nu<\kappa^+ : \exists\alpha\ (\alpha,\nu)\in\mathcal{S}\}$

$S := S^o \cup S^1$, $S_\alpha := \{\nu\in S^1 : (\alpha,\nu)\in\mathcal{S}\}$, *ha* $\alpha\in S^o$

α_ν := *azon (egyetlen)* $\alpha\in S^o$ *, amelyre* $(\alpha,\nu)\in\mathcal{S}$ *, ha* $\nu\in S^1$

Legyen $\prec$ *egy farendezés* S^1*-en, amelyre* $\nu\prec\tau$ *esetén* $\alpha_\nu<\alpha_\tau$ *, és legyen* $\vec{\pi} := \{\pi_{\nu\tau}:\nu\prec\tau\}$ *leképezések egy kommutatív rendszere,* $\pi_{\nu\tau}:(\nu+1)\to(\tau+1)$. *Ekkor* $\mathcal{M}=\langle\mathcal{S},\prec,\vec{\pi}\rangle$ κ **-magas 1-résű** (*röviden* **$(\kappa,1)$-)** **mocsár,** *ha*

(M0)(a) S_α zárt $sup(S_\alpha)$ -ban ($\alpha \in S^0$) és $\alpha < \kappa$ esetén $sup(S_\alpha) \in S_\alpha$

(b) $\kappa = max(S^0) = sup(S^0 \cap \kappa)$ és $sup(S_\kappa) = \kappa^+$

(M1) $\nu \prec \tau$ esetén $\pi_{\nu\tau} \upharpoonright \alpha_\nu = id \upharpoonright \alpha_\nu$, $\pi_{\nu\tau}(\alpha_\nu) = \alpha_\tau$, $\pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau$ és

$\pi_{\nu\tau} : S_{\alpha_\nu} \cap (\nu+1) \to S_{\alpha_\nu} \cap (\tau+1)$ rendezéstartó leképezés melyre

(i) $\gamma = min(S_{\alpha_\nu})$ esetén $\pi_{\nu\tau}(\gamma) = min\ S_{\alpha_\tau}$

(ii) ha β közvetlen rákövetkezője $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu+1)$ -ban γ , akkor

S_{α_τ} -ban $\pi_{\nu\tau}(\beta)$ közvetlen rákövetkezője $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$

(iii) ha γ limeszpont $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu+1)$-ben, akkor $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ is limesz S_{α_τ}-ban

(M2) ha $\bar\tau \prec \tau$, $\bar\nu \in S_{\alpha\bar\tau} \cap \bar\tau$ és $\nu = \pi_{\bar\tau\tau}(\bar\nu)$ akkor $\bar\nu \prec \nu$ és $\pi_{\bar\nu\nu} \prec \bar\nu = \pi_{\bar\tau\tau} \prec \bar\nu$

(M3) $\{\alpha_\nu : \nu \prec \tau\} \subset \alpha_\tau$ zárt ha $\tau \in S^1$

(M4) ha $\tau \in S_{\alpha_\tau}$ nem maximális, akkor $\{\alpha_\nu : \nu \prec \tau\}$ nem korlátos α_τ-ban

(M5) ha $\{\alpha_\nu : \nu \prec \tau\}$ nem korlátos α_τ-ban, akkor $\tau = \cup\{\pi_{\nu\tau}"\nu : \nu \prec \tau\}$

(M6) ha $\bar\nu$ limeszpont $S_{\alpha\bar\nu}$ -ben, $\bar\nu \prec \nu$ és $\lambda = sup(\pi_{\bar\nu\nu}"\bar\nu)$

akkor $\bar\nu \prec \lambda$ és $\pi_{\bar\nu\lambda} \upharpoonright \bar\nu = \pi_{\bar\nu\nu} \upharpoonright \bar\nu$

(M7) ha $\bar\nu$ mint előbb, $\bar\nu \prec \nu$, $\nu = sup(\pi_{\bar\nu\nu}"\bar\nu)$, és

$\alpha \in \cap \{ \{\alpha_\eta : \bar\tau \preceq \eta \preceq \pi_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)\} : \bar\tau \in S_{\alpha_{\bar\tau}} \cap \bar\nu\}$ akkor $(\exists \tau \in S_\alpha)\ \bar\nu \preceq \tau \preceq \nu$ □

(Ld. még az 1.8. Definíciót és az 1.9. Tételt.)

Nem túlságosan nehéz belátni, hogy L -ben minden κ reguláris számosságra létezik $(\kappa,1)$-mocsár (pl. [De0], [De1], [St1]. Jensen [Je0], [Je1]-beli eredeti bizonyítását K.J.Devlin egyszerűsítette). Sőt, S. Shelah és L.J.Stanley 1979-ben bizonyította: $L[A] \models$"$\exists(\omega_1,1)$-mocsár" ha $A \subseteq \omega_1$ ([SSO, p.190], [De1, ChVIII, Ex.6]). Továbbá $\exists(\omega_1,1)$-mocsár ha ω_2 nem elérhetetlen L -ben ([De1]). 1-résű mocsarak alkalmazásával a 2-résű kétszámosság sejtésre már tömör bizonyítást kapunk (pl. [De0], [De1]), bár J.P.Burgess 1974-ben forszolással igazolta a 2-résű kétszámosság sejtést. H.D.Donder [Do0]-ban egyszerűbb struktúrákat, ún. "mag-" ("coarse-") mocsarakat vizsgált L -ben, melyeket nem írt le axiómákkal, hanem segítségükkel kombinatorikus kérdéseket vizsgált. 2.16. Állításban bemutatjuk egyik eredményét, melyre 1-résű mocsarakkal közvetlen bizonyítás adható. Mocsarak konzisztenciáját forszolással is megkaphatjuk: pl. [St1].

A mocsarak definíciója még csak sokszorosított kéziratokon létezett, máris megjelentek a kombinatorikai alkalmazások. Pl. J. Rebholz [Re]-ben az alábbiakat vezeti le:

a) $\exists(\omega_1,1)$ -mocsár + $\Diamond(\omega_1)$ $\Rightarrow$ $\omega_2 \nrightarrow [\omega_1:\omega]^2_2$

b) $\exists(\omega_{\alpha+1},1)$ -mocsár + $\Diamond(\omega_{\alpha+1})$ $\Rightarrow$ $\omega_{\alpha+2} \nrightarrow [\omega_{\alpha+1}:\omega_\alpha]^2_{\aleph_{\alpha+1}}$

c) $\exists(\kappa^+,1)$ -mocsár + $\Diamond(\kappa^+)$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix}\aleph_2\\ \aleph_1\end{bmatrix} \nrightarrow \begin{bmatrix}\aleph_0\\ \aleph_1\end{bmatrix}_{\aleph_1}$

(utóbbit K. Prikry forszolással igazolta)

J. P. Burgess [Bu] 1978-ban szabad részhalmazokkal kapcsolatban (ld. 3. fejezet) vezette be a *láp* fogalmát:

1.1. DEFINÍCIÓ [Bu] **$(T,<,\prec,Q)$** ω_1**-láp** , *ha*

(0) *$(T,<)$ Kurepa-fa* $(|T_{\omega_1}|=\aleph_2,\ |T_\alpha|\le\aleph_0\ (\alpha<\omega_1)$ *és nem hasad*)

(1) $\prec\ \subseteq \cup\{[T_\alpha]^2:\alpha<\omega_1\}$ *bináris reláció,* $\prec\restriction T_\alpha$ *lineáris rendezés*

(2) $(y',x',x)\in Dom(Q)$ *ha* $y'\prec x'<x$, *és ekkor* $y'<Q(y',x',x)\prec x$

(3) **(Kommutativitás)** *ha* $y''\prec x''<x'<x$ *akkor*

$$Q(Q(y'',x'',x'),x',x) = Q(y'',x'',x)$$

(4) **(Koherencia)** *ha* $z'\prec y'\prec x'<x$ *akkor*

$$Q(z',y',Q(y',x',x)) = Q(z',x',x)$$

(5) **(Teljesség)** *ha* $y\prec x\in T_{\omega_1}$ *akkor valamely* $\alpha<\omega_1$ *-re*

$$Q(P_\alpha(y),P_\alpha(x),x) = y$$

itt $P_\alpha:T_{\omega_1}\to T_\alpha$ *ún. "vetítő" függvény:* $P_\alpha(z)\in T_\alpha$, $P_\alpha(z)<z$ *ha* $z\in T_{\omega_1}$ □

Burgess logikai eszközökkel mutatta meg, hogy L⊨"$\exists\omega_1$-láp", majd ω_1-láp segítségével bizonyította be a $\neg\mathrm{Free}(\omega_2,3,\omega_1)$ állítást (ld. jelen dolgozat 3.1. Tétel m=1 speciális esete). A Velleman -féle egyszerűsített $(\omega_1,1)$ - mocsarakból (1.13. Definíció) könnyen készíthető ω_1 -láp, azonban Komjáth Péter [Ko] eredményei szerint (1.22. Tétel) bizonyos modellekben létezhet ω_1-láp, míg $(\omega_1,1)$-mocsár nem. ω_1 -láp segítségével már könnyen igazolhatunk kombinatorikai elveket (pl. [Ka2])

A (szokásos) mocsarak nehézkes definíciója (és alkalmazásai) miatt alkotta meg J. Silver a $\mathbf{W}_\kappa$ ($\kappa\in$Card) elvet, melynek hamarosan sok alkalmazása keletkezett (pl. [Ka0]) a kombinatorikus halmaz - elméletben és a topológiában.

1.2. DEFINÍCIÓ (pl. [KaO]) *$\kappa \in Card$, $\kappa=\mu^+$ esetén W_κ egy $(T,<,W)$ struktúra létezését állítja, amelyre :*

(o) $(T,<)$ κ *-Kurepa fa* , $Dom(W)=\kappa$

(a) $W(\alpha) \subseteq [T_\alpha]^\mu$ *és* $|W(\alpha)|\leq\mu$ *ha* $\alpha<\kappa$

(b) $(\forall s \in [T_\kappa]^\mu)(\exists\gamma<\kappa)(\forall\alpha,\gamma\leq\alpha<\kappa)$ $P_\alpha{}''S \in W(\alpha)$

(P_α*-t ld. az 1.1. Definíció végén*) □

1.3. TÉTEL (*J. Silver [St1]*) *ha létezik $(\kappa,1)$-mocsár, $\kappa=\mu^+$ és $2^\mu=\kappa$ akkor W_κ* . □

W_κ konzisztenciáját forszolással is könnyen megkaphatjuk (ld. pl. [BuO]), egyszerűsített mocsarak (1.13. Definíció) segítségével is egyszerűen konstruálhatjuk W_κ -át , ami ω_1 -lápból is könnyen levezethető: pl. [Ka 2].

A K. Prikry által bevezetett mellékfeltételekkel történő forszolással (amit később Shelah tökéletesített) több kombinatorikus probléma konzisztenciáját bizonyította be, melyek most W_κ -ból is következtek. (Ld. még alább K. Kunen kérdését az 1.5. Állítás után.)

Figyelemreméltó a következő észrevétel: $W_\kappa \Rightarrow 2^\mu=\kappa$ ha $\kappa=\mu^+$, hiszen κ -Kurepa-fa létezése konzisztens $2^\mu>\kappa$ -val $(\kappa=\mu^+)$. (Lásd még a 2.a. § végén levő megjegyzéseket.)

J. Silver és Rowbottom a 60 -as évek végén bizonyította, hogy erősen elérhetetlen számosságot ω_1-re omlasztva a kapott modellben van ω_1-Kurepa-fa, sőt W_{ω_1} is teljesül (ld. pl. [KaO, p. 155]). Azonban nagy számosság nem szükséges W_κ konzisztenciájához: J. P. Burgess [BuO]-ban bizonyította a Con(ZFC)$\Rightarrow$Con(W_κ) állítást. Egészen pontosan CH+W_κ ekvikonzisztens elérhetetlen számosság létezésével. (Ld. még Komjáth Péter 1.22. Tételét.) [KaO, §2]-ban példákat láthatunk olyan kombinatorikai elvekre (HJ_κ=Hajnal-Juhász elv, P_κ=Prikry-elv, HM_κ= Hajnal-Máté elv (ld. dolgozatunk 3. fejezetét)) , melyek W_κ - ból könnyen levezethetők.

Megemlítjük még W_κ gyengített változatát, mely κ limesz-számosságokra is értelmezhető. (Emlékeztetőül: a $(\kappa,1)$-mocsarak definíciójában κ tetszőleges számosság lehet, W_κ -ban azonban csak rákövetkező!)

1.4. DEFINÍCIÓ [KaO] κ *tetszőleges számosságra* wW_κ *a következő tulajdonságokkal rendelkező* $(T,<,W)$ *struktúra létezését állítja:*

(o) $(T,<)$ κ - *Kurepa-fa* , $Dom(W) = \kappa$

(a) $(\forall\alpha<\kappa)$ $W(\alpha) \subseteq \{\phi: T_\alpha \hookrightarrow \kappa$ függvény$\}$, $|W(\alpha)| \le |T(\alpha)| \le \alpha$ *és* $\exists\ h: \cup\{Dom(\phi): \phi\in W(\alpha)\} \to \kappa$ *függvény, amelyre* $\forall\phi\in W(\alpha)$ $\{x\in Dom(\phi): h(x)=\phi(x)\}$ *végtelen*

(b) $(\forall t\in[T_\kappa]^\kappa)(\forall\phi: t\to\kappa)$ $(\exists s\in[t]^{<\kappa})(\exists\gamma<\kappa)$ $P_\gamma \upharpoonright S$ *injektív* *és* $(\forall\alpha,\gamma\le\alpha<\kappa)$ $\phi\circ P_\alpha^{-1}\upharpoonright P''_\alpha s \in W(\alpha)$ □

1.5. ÁLLÍTÁS [KaO] $\kappa=\mu^+\in Card$ *és* $2^\mu=\mu^+$ *esetén* $W_\kappa \Rightarrow wW_\kappa$ □

A fenti definícióban leírt elvet A. Kanamai [Ka1]-ben változatos kombinatorikai elvek és tételek bizonyításához használja.

K. Kunen vetette fel a következő kérdést [VeO]: " *Mi az oka annak, hogy sok olyan állítás ZFC -vel való konzisztenciáját lehet forszolással igazolni, amelyek már V=L esetén is igazak ?* "

A fenti kérdésre kapunk kimerítő választ S. Shelah és L. J. Stanley [SSO], [SS1] és tőlük függetlenül D. Velleman [VeO], [Ve1], [Ve2], [Ve3] cikkeiben ismertetett kutatásaiból . (Hasonló kutatásokat kezdett tőlük függetlenül R. Solovay is, azonban 1977-ben írt kézirata pub - likálatlan.) Mindhárman olyan általánosított Martin-axióma -szerű forszolási elvet kerestek, melynek létezése ekvivalens 1-résű mocsár létezésével , és amellyel a mocsárból levezetett tételek is igazolhatóak. A kutatások során jutott el Velleman az általunk is vizsgált egyszerűsített mocsarak fogalmához [Ve2], [Ve3], előbb azonban lássuk a forszolási elveket.

1.6. DEFINÍCIÓ [SSO] *Legyen* $\kappa>\omega_0$ *reguláris számosság .*

(i) *A* $\mathbb{P} = (P, \le)$ *kényszerképzet* **κ-speciális**, *ha*

(a) *P elemei* $\tau(s)$ *alakúak, ahol* $\tau\in T$ kifejezés (*"term"*) , $s\subseteq\kappa^+$ *növő sorozat, hossza* $lg(\tau)<\kappa$ = *csak* τ*-tól függő rendszám, sőt az összes* $\tau(s)$ $(\tau\in T,\ s\in[\kappa^+]^{lg(\tau)})$ *alakú kifejezés* *P -nek eleme. P legnagyobb eleme* $0_P = 0_T(\emptyset)$ *ahol* $0_T\in T$ *az egyetlen 0 hosszú term.*

(b) $\tau'(s') \le_P \tau(s)$ $\Rightarrow$ $Range(s') \supseteq Range(s)$

Az alábbiakban $\mathbb{P}$ *mindig* κ *-speciális.*

(ii) (o) *legyen* $\tau \leq \tau'$ $(\tau,\tau' \in T)$ *ha* $\tau(id \restriction lg(\tau)) \le \tau'(id \restriction lg(\tau'))$

(a) *Ha* $D \subseteq \tau$ *sűrű, akkor legyen* $D^{\#} := \{\tau(s):\ \tau \in D,\ s \in [\kappa^+]^{lg(\tau)}\}$.

P egy sűrű részhalmaza **uniform** *ha* $D^{\#}$ *alakú valamely* $D \subseteq \tau$ *sűrű részhalmazra.*

(b) *Ha* $D \subseteq \tau$ *sűrű,* $G \subseteq P$ *filter, akkor* **G uniform módon metszi** $D^{\#}$**-t,** *ha*

(*) $(\forall s \in [\kappa^+]^{<\kappa})(\exists \tau \in D)(\exists s' \in [\kappa^+]^{<\kappa})$ $Range(s) \subseteq Range(s')$ *és* $lg(s') = lg(\tau)$ *és* $\tau(s') \in G$ (1)

(c) (Leírhatatlanság) *Legyenek* $\tau(s^1), \tau(s^2), \hat{\tau}(\hat{s}^1), \hat{\tau}(\hat{s}^2) \in P$, $\tau(s^1) \le \hat{\tau}(\hat{s}^1)$, $g: lg(\hat{\tau}) \to lg(\tau)$ *olyan:* $\hat{s}^1_i = s^1_{g(i)}$ $(i \le lg(\hat{\tau}))$, *és*

(**) $\forall i < lg(\hat{\tau})$ $\hat{s}^2_i = s^2_{g(i)}$

Ekkor $\tau(s^2) \le \hat{\tau}(\hat{s}^2)$

(d) (Amalgám) $\forall \tau(s), \tau(s') \in P$ *ha* $\min(s \setminus s') \ge \sup(s' \setminus s) \ge \min(s' \setminus s) \ge \sup(s \cap s')$ *akkor* $\tau(s)$ *és* $\tau(s')$ *kompatibilisek.*

(e) (Kiterjeszthetőség) $(\forall \xi \in \kappa^+)(\forall \tau(s) \in P)$ $(\exists \tau'(s') \le \tau(s))$ $\xi \in Range(s')$

(f) (Megszoríthatóság) *létezik olyan* $r: T \times \kappa \to T$ *függvény, amelyre*

(α) $lg(\tau) \le \eta < \kappa \Rightarrow r(\tau,\eta) = \tau$

(β) $\eta < lg(\tau) \Rightarrow lg(r(\tau,\eta)) = \eta$ *és* $(\forall s \in [\kappa^+]^{lg(\tau)})$ $\tau(s) \ge r(\tau,\eta)(s \restriction \eta)$

(γ) $(\forall \eta, \eta' < \kappa)$ $r(\tau,\eta') = r(r(\tau,\eta),\eta')$

(δ) *ha* $\tau(s) \le \bar{\tau}(\bar{s})$ *és* $\bar{s}_i = s_{g(i)}$ *valamely* $g: lg(\bar{\tau}) \to lg(\tau)$ *függvényre, és* $\bar{\eta} < \kappa$, $\eta := \sup(g''\bar{\eta})$, *akkor* $r(\tau,\eta)(s \restriction \eta) \ge r(\bar{\tau},\bar{\eta})(\bar{s} \restriction \bar{\eta})$

(g) P erősen κ-irányítottan zárt (strongly κ-directed closed) , *ha* $(\forall D \in [P]^{<\kappa}$ *irányított*$)$ $(\exists q = \tau^q(s^q) \in P)$:

$$Range(s^q) = \cup\{Range(s^p): p = \tau^p(s^p) \in D\}$$

(iii) $\mathbb{P} \in \mathcal{S}_\kappa$ *ha a fenti (a)-(g) feltételek teljesülnek*

(iv) $\mathbf{S}_\kappa$ *a következő forszolási elv: ha* $\mathbb{P} \in \mathcal{S}_\kappa$ *és* $\mathcal{D}$ *P -nek legfeljebb* κ *uniform sűrű részhalmazából áll, akkor van* $G \subset P$ *filter, amely* $\mathcal{D}$ *minden elemét uniform módon metszi.* □

1.7. TÉTEL [SSO, *Thm*1] $\kappa > \omega_0$ *esetén* $S_\kappa \Leftrightarrow \exists(\kappa,1)$*-mocsár* □

Shelah és Stanley a fenti eredményt általánosított Souslin fák konstruálásához használták (ld. még [Ve6]) , valamint Burgess már

---

(1) ekkor G metszi az összes $D_\alpha = \{\tau(s) \in P: \alpha \in Range(s)\}$ $(\alpha \le \kappa^+)$ alakú halmazt

említett, 1-résű 2-számosság tételre adott forszolása (1978) módosításával új levezetést kapnak a "$\exists$ 1-résű mocsár $\Rightarrow$ 1 résű 2 -számosság tétel " eredményére, és a Jensen féle $\square_\kappa$ -elv konstruálásához.

Az 1.7.Tétel "$\Rightarrow$" irányú igazolásakor a szerzők a következő fogalmat és tételt használják:

1.8. DEFINÍCIÓ (R.B. Jensen, [StO], [SSO]) **$(T,\prec,\vec{f})$ $(\kappa,1)$-előmocsár** (premorass), *ha* $\vec{f}=\{f_{x,y}: x\prec y,\ x,y\in T\}$ *és*

(i) $(T,\prec)$ *fa*, $T\subseteq(\kappa+1)\times\kappa^+$, $\{\kappa\}\times\kappa^+\subseteq T$, $Dom(T)\cap\kappa=\kappa$

(ii) $\forall\alpha\in(Dom(T)\cap\kappa)$ $\gamma_\alpha:=\{\tau:(\alpha,\tau)\in T\}\in\kappa\setminus 0$, *és ha minden* $x\in T$ *elemre* $x=(\mathbf{l}(\mathbf{x}),\mathbf{o}(\mathbf{x}))$, *akkor* $x\prec y$ *esetén* $l(x)<l(y)$ *és* $o(x)$ *és* $o(y)$ *azonos típusú (limesz v.rákövetkező) rendszámok,* $f_{xy}:o(x)\to o(y)$ *szép (nice) leképezés; továbbá* $o(x)=\alpha+1$, $o(y)=\beta+1$ *esetén* $f_{xy}(\alpha)=\beta$ *(vagyis feltehetjük, hogy* $f_{xy}(o(x))=o(y)$*),*
és végül $\{f_{xy}:x\prec y\}$ *kommutatív rendszer*

(iii) *ha* $x\prec y$, $\eta<o(x)$, $w=(l(x),\eta)$, $z=(l(y),f_{xy}(\eta))$, *akkor* $w\prec z$ *és* $f_{w,z}=f_{xy}\restriction\eta$

(iv) $\{l(x):x\prec y\}$ *vagy üres vagy kokezdő (coinitial) része* $Dom(T)\cap l(y)$ *-nak;* $l(y)$ *limesz esetén nem üres, és* $(l(y),\eta)\in T$ *valamely* $\eta>o(y)$ *-ra*

(v) *ha* $l(y)$ *limesz és* y *nem minimális a* $\prec$ *rendezésben, akkor* $o(y)=\cup\{f''_{xy}o(x):x\prec y\}$

(vi) *ha* $o(x)$ *limesz,* $x\prec y$, $\lambda=\sup f''_{xy}o(x)<o(y)$, *akkor* $x\prec z$ *és* $f_{xz}=f_{xy}$ *ahol* $z=(l(y),\lambda)$ $\square$

"Kiritkításos" technikával igazolható a következő eredmény (melynek azonban nagyobb résű mocsarakra való változata nem ismert)

1.9. TÉTEL (R.B. Jensen vagy [StO]) *Ha létezik* $(\kappa,1)$*-előmocsár akkor létezik (közönséges)* $(\kappa,1)$*-mocsár is .* $\square$

D.Velleman [Ve O]-ban a következő forszolási elvet vezeti be:

1.10. DEFINÍCIÓ [VeO] *Legyen* $\kappa\geq\omega_0$ *reguláris,* $P=\langle P,\leq\rangle$ *kényszerképzet és* $\mathcal{D}:=\{D_\alpha:\alpha<\kappa^+\}$ *sűrű részhalmazok egy családja .*

(i) $p\in P$ *esetén* **rlm(p)** $:=\{\alpha<\kappa^+ : p\in D_\alpha\}$ **p birodalma** *(realm of p)*,

és legyen $\mathbf{P}_\alpha := \{p\in P : rlm(p)\subseteq\alpha\}$ *ha* $\alpha<\kappa^+$, *és* $\mathbf{P}^* := \cup\{P_\alpha : \alpha<\kappa\}$

(ii) $\mathcal{D}$ **κ-leírhatatlan** *(indiscernible), ha az alábbiak teljesülnek:*

(1) $P^*\neq\emptyset$ *és* $(\forall\alpha<\kappa)$ $D_\alpha\cap P^*$ *sűrű nyílt* P^* *-ben,*

(2) $(\forall\alpha<\kappa)$ $\mathbb{P}_\alpha := (P_\alpha, \le)$ κ *-irányítottan zárt.*

Továbbá megköveteljük, hogy minden $f:\alpha\to\gamma$ $(\alpha<\kappa, \gamma<\kappa^+)$ *szigorúan rendezéstartó függvényhez található egy* σ_f *leképezés, amelyre*

(3) $\sigma_f : P_\alpha \to P_\gamma$ *rendezéstartó*

(4) $rlm(\sigma_f(P)) = f''(rlm(P))$ $(\forall p\in P_\alpha)(\forall\alpha<\kappa)$

(5) *ha* $\beta<\alpha$, $f\restriction\beta = id$, $f(\beta)\ge\alpha$, $\gamma<\kappa$, *és* $p\in P_\alpha$,

akkor p *és* $\sigma_f(p)$ *kompatibilisek* P^* *-ben*

(6) *ha* $f_1:\alpha_1\to\alpha_2$ *és* $f_2:\alpha_2\to\gamma$ *rendezéstartóak* $(\alpha_1, \alpha_2<\kappa, \gamma<\kappa^+)$

akkor $\sigma_{f_2\circ f_1} = \sigma_{f_2}\circ\sigma_{f_1}$ □

(E feltételek ekvivalens, élesített és gyengített változatait is megtaláljuk [Ve2] és [Ve3] -ban.)

1.11. TÉTEL *([Ve0]) Tetszőleges* $\kappa>\omega_0$ *reguláris számosságra az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *Létezik* $(\kappa,1)$ *-mocsár .*

(2) *Ha* $\mathbb{P}$ *és* $\mathcal{D}$ *mint az előző definícióban, akkor van* $G\subseteq P$ κ *-teljes filter, amely* $\mathcal{D}$ *minden elemét metszi .* □

Velleman a fenti eredménnyel lényegében ugyanazon problémákra ad új megoldást [Ve0] -ban, mint Shelah és Stanley [SS0] -ban.

Azonban sok más problémához (ld.pl. [Ka0], [Ka1], [SS1], [Ve0]) a most definiált forszolási elvek nem voltak (s mint később kiderült, nem is lehettek) elegendőek. (Pl. a teljes $\square_\kappa$-elv, a Kanamori által definiált wR_κ – a gyenge Rebholz-elv; Kurepa -fák Aronszajn - és Cantor-részfák nélkül; egy bizonyos, a Magidor-Malitz-féle $\mathcal{L}[Q_1^{<\omega}; Q_2^1]$ -nyelvre vonatkozó kompaktsági tétel; Arhangelskii sejtése; $[\kappa^+]^{<\kappa}$ stacionárius kódoló részhalmazai; újabb szuper-Souslin-fák; stb.) Ezért mind Shelah és Stanley [SS1], mind Velleman [Ve0] bevezették és alkalmazták a "mocsarakba épített $\diamondsuit$-sorozat" fogalmát, valamint a mocsarak létezésével ekvivalens forszolási elvek élesítéseit.

Mindezek ismertetése meghaladja e fejezet kereteit. Azonban máris elérkeztünk a Velleman által felfedezett egyszerűsített 1-résű mocsarak fogalmához. (Megértésük az 1.10.Definíció birtokában lényegesen egyszerűbb!) A következő két definícióban Velleman eredeti [Ve2] elnevezéseit követjük.

1.12.DEFINÍCIÓ [Ve2] (i) *$\mathcal{A}\subseteq[\kappa^+]^{<\kappa}$ és $X\in\mathcal{A}$ esetén legyen $\mathcal{A}\restriction X := \{Y\in\mathcal{A}: Y\subsetneq X\}$, továbbá $X,Y\in\mathcal{A}$, $tip(X)=tip(Y)$ halmazokra legyen $\mathbf{f}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}: X\to Y$ az egyetlen rendezéstartó bijekció*

(ii) $\mathcal{A}\subseteq[\kappa^+]^{<\kappa}$ **egyszerűsített $(\kappa,1)$-mocsár** ($\kappa\geq\omega_o$ *reguláris), ha*

(1) $\langle\mathcal{A},\leq\rangle$ *jólfundált*

(2) **(homogenitás)** *ha* $rank_{\mathcal{A}}(X)=rank_{\mathcal{A}}(Y)$ $(X,Y\in\mathcal{A})$, *akkor* $tip(X)=tip(Y)$ *és* $\mathcal{A}\restriction Y = \{f_{XY}''Z : Z\in\mathcal{A}\restriction X\}$

(3) **(lokális kicsiség)** $(\forall X\in\mathcal{A})$ $|\mathcal{A}\restriction X|<\kappa$

(4) **(irányítottság** *-directed*) $(\forall X,Y\in\mathcal{A})(\exists Z\in\mathcal{A})$ $Z\supseteq X\cup Y$

(5) **(lokális majdnem irányítottság** *-locally almost directed*)
$(\forall X\in\mathcal{A})$ $\mathcal{A}\restriction X$ *vagy irányított, vagy pedig valamely* $Y,Z\in(\mathcal{A}\restriction X)$ *halmazokra* Y *és* Z **hasad** (*split-end*), *vagy más néven* **amalgám**, *azaz* $(\forall u\in Y\cap Z)(\forall y\in Y\setminus Z)(\forall z\in Z\setminus Y)$ $u<y<z$, *továbbá* $\forall w\in(\mathcal{A}\restriction X)$ $(W\subseteq Y \vee W\subseteq Z)$, *azaz* (Y,Z) **maximális**

(6) $\cup\mathcal{A} = \kappa^+$ □

(A fenti egyszerűsített mocsarak és $[\kappa^+]^{<\kappa}$ stacionárius kódoló részhalmazainak kapcsolatáról részletesebben olvashatunk [Ve4] függelékében.)

1.13.DEFINÍCIÓ ([Ve2]) $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\vec{F}}\rangle$ **csinos kiterjesztett $(\kappa,1)$-mocsár** (*neat expanded $(\kappa,1)$-morass*) , *ha*

(0) $\vec{\varphi}=\langle\varphi_\alpha:\alpha\leq\kappa\rangle$, $\vec{\vec{F}}=\langle F_{\alpha,\beta}:\alpha<\beta\leq\kappa\rangle$, $0<\varphi_\alpha<\kappa$, $\varphi_\kappa=\kappa^+$, $F_{\alpha\beta}\neq\emptyset$,
$F_{\alpha\beta}$ *elemei* $\varphi_\alpha\to\varphi_\beta$ *rendezéstartó függvények* $(\alpha<\beta\leq\kappa)$, $\kappa\geq\omega_o$ *reguláris*

(1) $|F_{\alpha\beta}| < \kappa$ $(\alpha\leq\beta<\kappa)$

(2) $F_{\alpha\gamma} = F_{\beta\gamma}\circ F_{\alpha\beta} := \{f\circ g: f\in F_{\beta\gamma}, g\in F_{\alpha\beta}\}$ $(\alpha<\beta<\gamma\leq\kappa)$

(3) $F_{\alpha,\alpha+1} = \{id\restriction\varphi_\alpha, g_\alpha\}$ **amalgám**, *azaz valamely* $\sigma_\alpha\in\varphi_\alpha$ **hasadási pontra** (*splitting point*) $g_\alpha\restriction\sigma_\alpha=id$ és $g_\alpha(\sigma_\alpha+\xi)=\varphi_\alpha+\xi$ $(\sigma_\alpha+\xi<\varphi_\alpha)$
(g_α *az ún.* **emelő-függvény** (*shifting function*))

(4) $(\forall\alpha\le\kappa$ *limesz*$)$ $(\forall\beta<\alpha)$ $(\forall f_1,f_2\in F_{\beta\alpha})$ $(\exists\gamma,\beta\le\gamma<\alpha)$ $(\exists h_1,h_2\in F_{\beta\gamma})$
$(\exists g\in F_{\gamma\alpha})$ $f_i=g\circ h_i$ $(i = 1,2)$

(5) $\varphi_\alpha = \cup\,\{f''\varphi_\beta : f\in F_{\beta\alpha}\}$ $(\beta<\alpha\le\kappa)$ □

Egy $\mathcal{A}\subseteq[\kappa^+]^{<\kappa}$ egyszerűsített mocsárból könnyen készíthetünk csinos kiterjesztett mocsarat: legyen φ_α:=tip(X) ha $X\in A$ és $rank_A(X)=\alpha$, valamint legyen $F_{\alpha\beta}=\{f_X^{-1}\circ f_Y:\ rank_A(X)=\beta, rank(Y)=\lambda$, $Y\subseteq X$, $X,Y\in A\}$ ahol f_X:tip(X)→X rendezéstartó bijekció. Pontosabban, az így konstruált $\langle\vec{\varphi},\vec{\vec{F}}\rangle$ struktúra csak némi "csinosítás" (ld. [Ve2], [Ve3]) után tesz eleget 1.13. feltételeinek. Hasonlóan könnyen készíthetünk egy $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\vec{F}}\rangle$ struktúrából $\mathcal{A}\subseteq[\kappa^+]^{<\kappa}$ egyszerűsített mocsarat. Mint később kiderült, a csinos kiterjesztett mocsarak könnyebben alkalmazhatók kombinatorikus problémák megoldásához. Így az utóbbi években az 1.13.Definícióban meghatározott struktúrát nevezik (Velleman-féle) egyszerűsített mocsárnak, és dolgozatunk további részében mi is ezt a terminológiát használjuk. Az egyszerűsített 1- és nagyobb résű mocsarak alapvető tulajdonságait a 2. fejezetben ismertetjük.

1.14.TÉTEL [Ve2] *Tetszőleges* $\kappa<\omega_o$ *reguláris számosságra az alábbiak ekvivalensek*:

(1) *Létezik* $(\kappa,1)$ - *egyszerűsített mocsár*

(2) *Ha* $\mathbb{P}$ *és* $\mathcal{D}$ *kielégítik az* 1.10.*Definíció feltételeit, akkor van* $G\subseteq\mathbb{P}$ κ-*teljes filter, mely* $\mathcal{D}$ *minden elemét metszi.* □

Az 1.11.Tétellel együtt kapjuk, hogy tetszőleges $\kappa>\omega_o$ reguláris számosságra pontosan akkor létezik $(\kappa,1)$-szokásos (v. Jensen-féle) mocsár, ha egyszerűsített (v. Velleman-féle) $(\kappa,1)$ -mocsár létezik, vagyis L-ben létezik $(\kappa,1)$-egyszerűsített mocsár minden $\kappa\ge\omega_o$ reguláris számosságra, erre a tételre közvetlen bizonyítást H.D. Donder adott [Do1]-ben. (E tételre bizonyítás található [Je2] -ben is.) Eredményeit a lineáris sorozatok bevezetése után (ld.alább) ismertetjük. [De1,VIII.4]-ben találjuk L.J.Stanley szokásos $(\kappa,1)$-mocsár konstrukcióját egyszerűsített mocsár felhasználásával.

Mint már említettük (külön [SSO]-ban is kiemelik a szerzők), Velleman 1.10.-ben, valamint Shelah és Stanley 1.6.-ban ismertetett forszolási elvei mind ekvivalensek egy (megfelelő méretű) 1-résű mocsár létezésével. A 2.13. Állításban közvetlen bizonyítást adunk S_κ és $(\kappa,1)$ -egyszerűsített mocsár létezésének ekvivalenciájára.

Bár az (egyszerűsített) mocsarak tulajdonságait a következő fejezetben vizsgáljuk meg részletesebben, két hasznos "elv" -re itt hívjuk fel az Olvasó figyelmét:

(a) κ^+ minden "kisméretű", azaz κ-nál kisebb számosságú részhalmaza "valahol előbb" megjelenik. Pontosabban:

$$(\forall s\in[\kappa^+]^{<\kappa})\ (\exists\alpha<\kappa)(\exists\bar{s}\subseteq\varphi_\alpha)(\exists f\in F_{\alpha\kappa})\qquad s=f''\bar{s}$$

vagyis κ^+ minden kis részhalmazát már az α -dik szinten $(\alpha<\kappa)$ el tudjuk intézni, hiszen φ_α is kicsi (ld. pl. 2.6. és 2.29. Tételek).

(b) 1.13)3 alapján ún. "amalgám" típusú $A,B\subseteq\kappa^+$ részhalmazokkal kell foglalkoznunk (azaz $\min(A\setminus B)\geq\sup(B\setminus A)$ és $\min(B\setminus A)\geq\sup(B\cap A)$). Ez egyrészt megkönnyíti a konstrukciót, másrészt a forszolásos konzisztencia -eredmény sok esetben abszolút tétellé változtatható 1-résű mocsarak felhasználásával (pl. [BS, Thm. 9.12], [SS3] → 4. Fejezet, [Sh] → 2.12. Tétel, stb.).

A figyelmes Olvasó talán már észrevette, hogy szokásos mocsár csak nem megszámlálható számosságra értelmezhető (és így csak e számosságokra létezik), azonban az egyszerűsített mocsár (akár 1.12. akár 1.13. változat) és a vele ekvivalens forszolási elv (1.10.) $\kappa=\omega_0$ esetén is értelmes. Ráadásul:

1.15. TÉTEL [Ve5] ZFC $\vdash\exists$ $(\omega_0,1)$ *-egyszerűsített mocsár* □

A fenti tétel segítségével Velleman nem csak két régi tételre adott ZFC-ben új bizonyítást ([Ve5, Thms. 3.5, 3.7]), hanem Shelah alábbi tételére (mely élesíti J. Roitman egy korábbi eredményét) is kapott egy meglepő bizonyítást (ld. [Ve4]) :

1.16. TÉTEL [Sh] *ZFC tetszőleges modelljéhez egy Cohen valóst adjungálva a kapott modellben kapunk egy* ω_1 *-Souslin fát .* □

R. Laver és W. Mitchell eredményei szerint a fenti állítás véletlen (random-) valósra nem igaz, T. Carlson és R. Laver vizsgálatai szerint pedig Sacks-valósokra ZFC-től független.

Mark Bickford és Velleman bizonyítását a fenti tételre a 2.9. Tételben ismertetjük. Mivel nagyobbrésű mocsarak is konstruálhatóak (szinte!) csak ZFC -ből (pl. [Ve 9]), így megfogalmazódik a következő:

1.17. SEJTÉS [Ve10] *ha* $V \models$ "$\exists(\omega_0, 2)$*-egyszerűsített mocsár*", *akkor* V *-hez egy Cohen valóst adjungálva* $V[G]$ *-ben kapunk egy* ω_2 *- Souslin-fát.* □

Mint említettük, több kombinatorikus elv eldöntéséhez a mocsár (ill. a vele ekvivalens forszolási elv) túl gyenge.

1.18. DEFINÍCIÓ [Ve3] *Legyen* $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\vec{F}}\rangle$ *egy* $(\kappa,1)$*-egyszerűsített mocsár. Ekkor*

$$\vec{\vec{c}} = \{ \langle(\beta^{\alpha}_{\delta}, f^{\alpha}_{\delta}) : \delta<\tau^{\alpha}\rangle \mid \alpha<\kappa \textit{ limesz } \}$$

lineáris sorozatok (*linearizing sequences*) *ha* $\beta^{\alpha}_{\delta}<\alpha$, $f^{\alpha}_{\delta}\in F_{\beta^{\alpha}_{\delta},\alpha}$ *és tetszőleges* $\alpha<\kappa$ *limesz rendszámra*

(a) $\delta<\gamma<\tau^{\alpha} \Rightarrow \beta^{\alpha}_{\delta}<\beta^{\alpha}_{\gamma}$ *és* $\left[\exists g \in F_{\beta^{\alpha}_{\delta}\,\beta^{\alpha}_{\gamma}}\right]$ $f^{\alpha}_{\delta} = f^{\alpha}_{\gamma} \circ g$

(b) $\beta<\alpha,\ f\in F_{\beta\alpha} \Rightarrow (\exists\delta<\tau^{\alpha}, \beta<\beta^{\alpha}_{\delta})\left[\exists g \in F_{\beta\,\beta^{\alpha}_{\delta}}\right]$ $f = f^{\alpha}_{\delta} \circ g$

(c) *ha* $\gamma<\tau^{\alpha}$ *limesz* $\Rightarrow \bar{\alpha}:=\beta^{\alpha}_{\gamma}$ *is limesz és* $\gamma=\tau^{\bar{\alpha}}$, *továbbá* $\forall\delta<\tau^{\bar{\alpha}}$

$$\beta^{\bar{\alpha}}_{\delta}=\beta^{\alpha}_{\delta} \quad \textit{és} \quad f^{\alpha}_{\delta}=f^{\alpha}_{\gamma}\circ f^{\bar{\alpha}}_{\delta}$$ □

Hasonlóan lehet definiálni $\mathcal{A}\subseteq[\kappa^{+}]^{<\kappa}$ alakú mocsarak lineáris soroza-sorozatait is. Továbbá az 1.10.-ben definiált forszolási elvek olyan kiterjesztését is megtaláljuk [Ve3]-ban, melyek ekvivalensek 1-résű, lin. sorozatokkal rendelkező mocsarak létezésével. Lin. sorozatok elemi tulajdonságait ld. a 2.18, 19. Állításokban. Nagyobbrésű egyszerűsített mocsarak lin. sorozatait a 2. fejezet végén definiáljuk. Velleman eredeti sejtését Donder pontosította (ld. még Komjáth 1.22. Tételét) :

1.19. TÉTEL [Do1] **(a)** *Ha létezik* $(\kappa,1)$*-egyszerűsített mocsár lineáris sorozattal, akkor* κ *nem gyengén kompakt*

(b) (V=L) *Ha* κ *nem gyengén kompakt, akkor létezik* $(\kappa,1)$ *- egyszerűsített mocsár lineáris sorozattal.* □

Emlékeztetünk, hogy $\kappa\geq\omega_2$ esetén egy $(\kappa,1)$-mocsár létezéséből a $\square_\kappa$-elvnek csak gyengített változata vezethető le. Lineáris sorozattal a teljes $\square_\kappa$-elv is levezethető: [Ve3, Thm. 3.1]. (Az is könnyen belátható, hogy tetszőleges $(\omega_1,1)$ -mocsárhoz forszolással könnyen adjungálhatók lineáris sorozatok.) A fenti Tétel, valamint L. J. Stanley és R. Laver eredményei alkalmazásával nyerhetjük, hogy:

1.20. TÉTEL [Ve3] Con(ZFC + $\exists$ *szuperkompakt számosság*) $\Rightarrow$ Con(ZFC+$\exists$ $(\omega_2,1)$*-egyszerűsített mocsár de nincs* $(\omega_2,1)$*-egyszerűsíett mocsár lineáris sorozatokkal*). $\square$

Megoldatlan, hogy szuperkompakt helyett gyengén kompakt számosság elegendő-e a fenti állításhoz.

Továbbá könnyen látható, hogy Donder konstrukciója L[A]-ban is ad egy (egyszerűsített) $(\kappa,1)$ -mocsarat lineáris sorozatokkal, ha $\kappa=\lambda^+$, $A\subseteq\kappa$, $\kappa=(\lambda^+)^{L[A\cap\lambda]}$. Speciálisan pl. $\kappa=\aleph_2$ esetén. Sőt, ha $\aleph_3^{L[A]}=\aleph_3$, akkor az L[A] -ban felépített $(\omega_2,1)$-mocsár "abszolút", azaz V-ben is az, lineáris sorozatait megőrizve. Fenti tulajdonságú A halmaz található pl. ha ω_2 és ω_3 mindketten rákövetkező számosságok L -ben.

Lineáris sorozatokkal már szinguláris számosságra is igazolható a kétszámoság sejtés:

1.21. TÉTEL *[Ve3] Ha* $\lambda>\kappa$ *tetszőleges számosságok,* $\square_\kappa$ *igaz és létezik* $(\kappa^+,1)$*-mocsár lineáris sorozatokkal akkor* $(\lambda^{++},\lambda)\rightarrow(\kappa^{++},\kappa)$ $\square$

(Emlékeztetünk, hogy reguláris κ számosságra mindössze egy $(\kappa^+,1)$ - mocsár is elegendő.)

Komjáth Péter alábbi tételének pontosabb megértéséhez szükségünk lesz a következő eredményekre: Velleman [Ve0]-ban $\diamondsuit$-val beépített (közönséges) $(\omega_1,1)$-mocsár segítségével konstruált olyan ω_1 -Kurepa-fát, amely nem tartalmaz Aronszajn-részfát. (Ilyen fát eredetileg S. Todorcevic konstruált [To]-ban). Velleman a lineáris sorozatokkal ellátott $(\omega_1,1)$ -egyszerűsített mocsarakból még csak $\diamondsuit_{\mathcal{A}}$ - struktúrasorozattal bővítve tudta [Ve3]-ban levezetni ezt az eredményt.

Komjáth Péter bizonyította be az alábbiakat 1986-ban:

1.22. TÉTEL [*Ko*] **(1)** *Erősen elérhetetlen számosságot* ω_1 *-re Lévy -omlasztva a kapott modellban létezik* ω_1 *-láp.*
(2) Con($\exists$*Mahlo-számosság*) $\Rightarrow$ Con(*a fenti modellben nincs* $(\omega_1, 1)$*-mocsár*)
(3) Con(*létezik kettő erősen elérhetetlen számosság*) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Con(*nincs* ω_1*-Kurepa fa Aronszajn-részfák nélkül*) □

Végül az sem ismert, hogy $(\omega_2, 1)$-mocsár és $\square_{\omega_1}$ (esetleg még $\square_{\omega_2}$) létezéséből következik-e lineáris sorozatokkal rendelkező $(\omega_2, 1)$ - -mocsár létezése.

A következő fejezetben tárgyaljuk részletesebben az 1- (és nagyobbrésű) mocsarak további tulajdonságait és alkalmazásaikat. Most áttérünk a nagyobbrésű mocsarak definícióira, röviden ismertetjük fejlődésüket.

1.b. KÉTRÉSŰ MOCSARAK

A többrésű mocsarak jobb megértéséhez célszerű a Jensen [Je2] és a Velleman [Ve8] által kidolgozott 2 -résű mocsarakkal is megismerkednünk.

1.23. DEFINÍCIÓ [Je2, §3] **(a)** $\mathfrak{M}=\langle \mathcal{S}, \prec, \vec{M}, \vec{\vec{\pi}}\rangle$ **legfeljebb 2 -résű** *(szokásos)* **mocsárkezdemény** *, ha az alábbi* I./ *és* II./ *teljesül:*

I./ (a) *$\mathcal{S}$ elemei* $s=\langle s_i : i\le |s|\rangle$ *alakú monoton sorozatok,* $|s|\le 2$.

Legyen $S^i=\{s_i : s\in\mathcal{S}, i\le |s|\}$ $(i\le 2)$ *és* $S:=S^0\cup S^1\cup S^2$.

(b) $s\ne s' \Rightarrow (\exists j)\ s_j\ne s'_j$

(c) $s_j<s'_j \Rightarrow s_{|s|}<s'_0$

Legyen $\alpha\sqsubset\beta$ *pontosan akkor, ha $\mathcal{S}$ valamely* s *elemében* α *megelőzi* γ *-át. Ekkor* $(\mathcal{S},\sqsubset)$ *egy fa, és* S^i *elemeinek* $\sqsubset$ *szerinti rangja* i. *Legyen továbbá* ν *közvetlen* $\sqsubset$ *szerinti megelőzője* α_ν $(\nu\in S^1\cup S^2)$*, és végül* $S_\alpha:=\{\nu:\alpha=\alpha_\nu\}$.

(d) S_α *zárt halmaz. Ekkor legyen* $\nu_\alpha=\max(S_\alpha)$ *ha* $S_\alpha\ne\emptyset$ *. Ezenkívül legyen* μ_α *a maximális olyan* μ *amelyre* $\alpha\sqsubseteq\mu$.

(e) *Ha* $\alpha\in S^0$ *és* $\mu_\alpha>\alpha$ *akkor* α *limesz* S^0 *-ban, és*

Ha $\nu\in S^1$ *és* $\mu_\nu>\nu$ *akkor* ν *limesz* S_{α_ν} *-ben*

(f) *S minden* α *eleme primitív rekurzíve zárt*

(g) $\vec{M}=\langle M_\alpha:\alpha\in S\rangle$ ahol $M_\alpha=\langle L_{\mu_\alpha}[D_{\mu_\alpha}], D_{\mu_\alpha}\rangle$

(h) *Ha* $\gamma\sqsubset\mu_\alpha$ *, akkor* γ *rákövetkező számosság* M_α *-ban*

(i) $\{s\in\mathcal{S}:\max(s)<\mu_\alpha\}$ *uniform módon primitív rekurzív* M_α *-ban*

(j) $\prec\ \subset (S^1)^2\cup(S^2)^2$ *fa rendezés,* $\pi_{\bar\nu\nu}:M_{\bar\nu}\to M_\nu$ *és* $\{\pi_{\bar\nu\nu}:\bar\nu\prec\nu\}$ *kommutatív rendszer*

(k) $\{\langle\bar\nu,\nu,\bar x,x\rangle:\bar\nu\prec\nu,\mu_\nu<\mu_\alpha,\pi_{\bar\nu\nu}(\bar x)=x\}$ *uniform módon primitív rekurzív* M_α *-ban*

(l) $\pi_{\bar\nu\nu}$ *megőrzi a* $\forall u\exists\vec{x}(u\subseteq x_1\&\ldots\&u\subseteq x_n\&\varphi(\vec{x}))$ $(\varphi\in\Sigma_0)$ *alakú formulákat*

(m) $\mathrm{crit}(\pi_{\bar\nu\nu})=\alpha_{\bar\nu}$ *ha* $\bar\nu\prec\nu$ *. (Ekkor egyszerűen* $\pi_{\bar\nu\nu}(\mu_{\bar\nu})=\mu_\nu$ *-t írunk.)*

II./ (a) *Ha* $\bar\nu\prec\nu$, $\bar\tau\in S_{\alpha_{\bar\nu}}\cap\bar\nu$ *és* $\tau=\pi_{\bar\nu\nu}(\bar\tau)$ *akkor* $\pi_{\bar\tau\tau}=\pi_{\bar\nu\nu}\restriction M_{\bar\tau}$

(b) *Ha* $\nu\in S_{\alpha_\nu}\cap\nu_{\alpha_\nu}$ *akkor* ν *limesz a* $\prec$ *rendezés szerint*

(c) *Ha* ν *limesz a* $\prec$ *rendezés szerint akkor* $M_\nu=\bigcup\{\mathrm{Range}(\pi_{\bar\nu\nu}):\bar\nu\prec\nu\}$

(Vagyis $\alpha_\nu=\mathrm{lub}\{\alpha_{\bar\nu}:\bar\nu\prec\nu\}$*.)*

(d) *Ha* $\bar\nu \triangleleft \nu$ *és* $\lambda=\sup(\pi_{\bar\nu\nu}{}''\bar\nu)$ *akkor* $\bar\nu \triangleleft \lambda$ *és* $\pi_{\bar\nu\lambda}\restriction\bar\nu=\pi_{\bar\nu\nu}\restriction\bar\nu$. *Továbbá, ha* $\bar\mu=\mu_{\bar\nu}>\bar\nu$, $\tilde\eta=\sup(\pi_{\bar\nu\lambda}{}''\bar\mu)$ *és* $\eta=\sup(\pi_{\bar\nu\nu}{}''\bar\mu)$ *akkor* $\tilde\eta \preceq \eta$ *és* $\pi_{\bar\nu\nu}=\pi_{\tilde\eta\eta}=\pi_{\bar\nu\lambda}$.

(e) *Legyen* $\bar\nu \triangleleft \nu=\mathrm{lub}(\pi_{\bar\nu\nu}{}''\bar\nu)$ *ahol* ν *limesz* S_{α_ν} *-ben, és legyen* $\alpha^o \in \cap\{\alpha_\eta : \tau \prec \eta \prec \pi_{\bar\nu\nu}(\tau), \tau\in S_{\alpha_{\bar\nu}} \cap \bar\nu\}$. *Ekkor* $\bar\nu \prec \tau^o \triangleleft \nu$ *valamely* $\tau^o \in S_{\alpha^o}$ *rendszámra. Jelölje most* $\bar\nu \prec_* \nu$ *azt, hogy* $\bar\nu$ *közvetlen megelőzője* ν *-nek* $\prec$ *szerint.*

(f) *Legyen* $\bar\nu \triangleleft \nu$, $\bar\mu=\mu_{\bar\nu}>\bar\nu$ *és* $\mu=\mu_\nu$. *Ekkor*

(f1) *Ha* $\bar\mu$ *limesz* $\prec$ *szerint, akkor* μ *is limesz* $\prec$ *-ben, és minden* $\bar\eta \triangleleft \bar\mu$, $\eta=\pi_{\bar\nu\nu}(\bar\eta)$ *esetén* $\pi_{\bar\nu\nu}\circ\pi_{\bar\eta\bar\mu}=\pi_{\eta\mu}\circ\pi_{\bar\nu\nu}\restriction M_{\bar\eta}$

(f2) *Ha* $\bar\mu$ *minimális* $\prec$ *szerint, akkor* μ *is az* $\prec$ *-ben. Továbbá, ha* $\pi_{\bar\nu\nu}$ *kofinális (azaz* $\nu=\mathrm{lub}(\pi_{\bar\nu\nu}{}''\bar\nu)$*), akkor* $\mu=\mathrm{lub}(\pi_{\bar\nu\nu}{}''\bar\mu)$.

(f3) *Legyen* $\bar\eta \prec_* \bar\mu$, *ahol* $\pi_{\bar\eta\bar\mu}$ *nem kofinális,* $\bar\lambda=\sup(\pi_{\bar\eta\bar\mu}{}''\bar\eta)$, *és* $\pi_{\bar\nu\nu}(\bar\eta)=\eta$, $\pi_{\bar\nu\nu}(\bar\lambda)=\lambda$. *Ekkor* $\eta \prec_* \mu$, $\lambda=\sup(\pi_{\eta\mu}{}''\eta)$, *és* $\pi_{\bar\nu\nu}\circ\pi_{\bar\eta\bar\mu} = \pi_{\eta\mu}\circ\pi_{\bar\nu\nu}\restriction M_{\bar\eta}$. *Továbbá, ha* $\pi_{\bar\nu\nu}$ *kofinális, akkor* $\pi_{\bar\nu\nu}{}''\bar\mu=\mu$.

(f4) *Legyen* $\bar\eta \prec_* \bar\mu$ *ahol* $\pi_{\bar\eta\bar\mu}$ *kofinális, és* $\alpha=\pi_{\bar\nu\nu}(\alpha_{\bar\eta})$. *Ekkor van olyan* $\eta\in S_\alpha$ *amelyre* $\eta \prec_* \mu$, $\pi_{\eta\mu}$ *is kofinális, és* $\pi_{\bar\nu\nu}\circ\pi_{\bar\eta\bar\mu} = \pi_{\eta\mu}\circ\pi_{\bar\nu\nu}\restriction M_{\bar\eta}$

(g) *Ha* $\bar\nu \triangleleft \nu$ *és* $S_{\bar\nu}=\emptyset$, *akkor* $S_\nu=\emptyset$.

III./ (vö.1.0.Def.) *Tetszőleges* $\kappa>\omega_o$ *reguláris számosságra a fenti tulajdonságú* $\mathfrak{M}$ *mocsárkezdemény* **$(\kappa,1)$-mocsár**, *ha minden* $s\in\mathcal{S}$ *esetén* $|s|<1$, $\kappa=\max(S^o)=\sup(S^o\cap\kappa)$ *és* $\kappa^+=\nu_\kappa=\sup(S_\kappa\cap\kappa^+)$. $\mathfrak{M}$ **$(\kappa,2)$-mocsár**, *ha* $\kappa=\max(S^o)=\sup(S^o\cap\kappa)$, $\kappa^+=\nu_\kappa=\sup(S_\kappa\cap\kappa^+)$ *és* $\kappa^{++}=\nu_{\kappa^+}=\sup(S_{\kappa^+}\cap\kappa^{++})$. *Végül* $\mathfrak{M}$ **univerzális (κ,n)-mocsár** (n=1,2), *ha* $M_\kappa=H_{\kappa^{+n}}$. □

Mint említettük, R.B.Jensen [Je1] -ben bebizonyította, hogy L -ben minden lehetséges κ és n -re létezik univerzális (κ,n)-mocsár. Egyszerűsített $(\kappa,2)$-mocsarat nyilván nem definiálhatunk úgy, hogy a $(\kappa,1)$-egyszerűsített mocsár definíciójába egyszerűen csak beírjuk a $\varphi_\kappa=\kappa^{++}$ formulát.

A dolgozat hátralévő részében minden mocsár *egyszerűsített*. Velleman ötlete a következő: κ lépésben kell κ^{++} -t felépítenünk, κ-nál kisebb objektumok felhasználásával. Ezt elérhetjük úgy, hogy κ lépésben építünk egy $(\kappa^+,1)$- mocsarat (hiszen ebben $\varphi_{\kappa^+}=\kappa^{++}$), méghozzá κ -nál kisebb méretű, 1-résű mocsárkezdeményekből. Persze ezeket, és a közöttük ható beágyazásokat is definiálnunk kell:

1.24. DEFINÍCIÓ [Ve8] *Legyen* $\kappa\ge\omega_0$ *reguláris számosság .*

(i) $\mathcal{M} = \langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ θ **-magas** κ **-nál kisebb méretű 1 -résű mocsár-kezdemény** *("fake gap-1 morass segment), ha kielégíti az 1.13. Definíció feltételeit, a következő változtatással :*

(o) $\vec{\varphi} = \langle\varphi_\alpha:\alpha\le\theta\rangle$, $\vec{\mathcal{F}} = \langle F_{\alpha\beta}:\alpha<\beta\le\theta\rangle$, $\varphi_\kappa\le\kappa$

(ii) *Legyen* $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *és* $\mathcal{N}=\langle\vec{\varphi}',\vec{\mathcal{G}}'\rangle$ θ *- ill.* θ' *-magas 1-résű mocsárkezdemények. Egy* $\mathbf{f}=\langle f^-,\vec{f},\vec{\vec{f}}\rangle$ *függvény* $\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ - **beágyazás**, *ha*

(1) $f^-:(\theta+1)\to(\theta'+1)$ *rendezéstartó leképezés,* $f^-(\theta)=\theta'$

(2) $\vec{f}=\langle f_\zeta:\zeta\le\theta\rangle$ *és* $f_\zeta:\varphi_\zeta\to\varphi_{f^-(\zeta)}$ *rendezéstartó leképezés* $(\zeta\le\theta)$

(3) $\vec{\vec{f}}=\langle f_{\zeta\xi}:\zeta<\xi\le\theta\rangle$ *és* $f_{\zeta\xi}:\mathcal{G}_{\zeta\xi}\to\mathcal{G}_{f^-(\zeta),f^-(\xi)}$ *leképezés* $(\zeta<\xi\le\theta)$

(4) $f(\sigma_\zeta)=\sigma'_{f^-(\zeta)}$ *ahol* $\sigma_\zeta\in\varphi_\zeta$ *és* $\sigma'_\zeta\in\varphi'_{f^-(\zeta)}$ *a hasadási pontok* $(\zeta<\theta)$

(5) $f_{\zeta\eta}(c\circ b) = f_{\xi\eta}(c)\circ f_{\zeta\xi}(b)$ *ha* $b\in\mathcal{G}_{\zeta\xi}$, $c\in\mathcal{G}_{\xi\eta}$, $\zeta<\xi<\eta\le\theta$

(6) $f_\xi\circ b = f_{\zeta\xi}(b)\circ f_\zeta$ *ha* $b\in\mathcal{G}_{\zeta\xi}$, $\zeta<\xi\le\theta$

(iii) *Legyen* $\mathcal{M}$ *valódi* **kezdőszelete** $\mathcal{M}'$**-nek** , *azaz* $\theta<\theta'$, $\varphi'_\zeta=\varphi_\zeta$ $(\zeta\le\theta)$, $\mathcal{G}'_{\zeta\xi}=\mathcal{G}_{\zeta\xi}$ $(\zeta<\xi\le\theta)$. *Ekkor* $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ **baloldali beágyazás** *("left-branching embedding"), ha* $f^-\restriction\theta=id$, $f_\zeta=id$ $(\zeta<\theta)$, $f_{\zeta\xi}=id$ $(\zeta<\xi<\theta)$ *és* $f_\theta\in\mathcal{G}'_{\theta\theta'}$; *azaz* $f^-(\theta)=f_{\theta'}$, *és* $f_{\zeta\theta}(b) = f_{\zeta\theta}(b)\circ f_\zeta =$ $= f_\theta\circ b$ *ha* $\zeta<\theta$ *és* $b\in\mathcal{G}_{\zeta\theta}$.

(iv) $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ **jobboldali beágyazás** *("right-branching embedding"), ha* $\mathcal{M}$ *valódi kezdőszelete* $\mathcal{M}'$*-nek, továbbá valamely* $\eta\le\theta$ *rendszámra*

(1) $f^-\restriction\eta=id$ *és* $f^-(\eta+\zeta)=\theta+\zeta$ *(ha* $\eta+\zeta\le\theta$*)*

(2) $f_\zeta=id$ *(ha* $\zeta<\eta$*)* *és* $f_\eta\in\mathcal{G}_{\eta\theta}$

(3) $f_{\zeta\xi}=id$ *(ha* $\zeta<\xi<\eta$*)* *és* $f_{\zeta\xi}{}''\mathcal{G}_{\zeta\xi}=\mathcal{G}'_{f^-(\zeta),f^-(\xi)}$ *ha* $\eta\le\zeta<\xi\le\theta$

(v) $\mathcal{F}$ **amalgám**, *ha* $\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ *beágyazások olyan családja, amely tartalmazza az összes lehetséges baloldali beágyazást* $(f_\theta\in\mathcal{G}'_{\theta\theta'})$, *és pontosan egy jobboldali beágyazást.*

(vi) $\mathfrak{M} = \langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{G}},\vec{\theta},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ $(\kappa,2)$ **-egyszerűsített mocsár**, *ha*

(o) (a) $\mathcal{M}_\kappa=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *egy* $(\kappa^+,1)$ *-mocsár*

(b) $\mathcal{M}_\alpha := \langle\vec{\varphi}\restriction\theta_\alpha,\mathcal{G}\restriction\theta_\alpha\rangle$ θ_α *-magas* κ *-nál kisebb méretű 1-résű mocsárkezdemény, ahol* $\alpha<\kappa$ *és* $\vec{\theta}=\langle\theta_\alpha:\alpha\le\kappa\rangle$, $\theta_\kappa=\kappa^+$

(c) $|\mathcal{G}_{\zeta\xi}|<\kappa$ *ha* $\zeta<\xi\le\theta_\alpha$ $(\alpha<\kappa)$

(d) $\vec{\mathcal{F}}=\langle\mathcal{F}_{\alpha\beta}:\alpha<\beta\le\kappa\rangle$ *és* $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}:\mathcal{M}_\alpha\to\mathcal{M}_\beta$ *-beágyazások egy családja* $(\alpha<\beta\le\kappa)$

(1) $(\forall\alpha<\beta<\kappa)$ $|\mathcal{F}_{\alpha\beta}|<\kappa$

(2) $(\forall\alpha<\beta<\gamma\leq\kappa)$ $\mathcal{F}_{\alpha\gamma} = \mathcal{F}_{\beta\gamma}\circ\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \{f\circ g: f\in\mathcal{F}_{\beta\gamma}, g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}\}$

(3) $(\forall\alpha<\kappa)$ $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ *amalgám*

(4) *Ha* $\alpha\leq\kappa$ *limesz,* $\beta_1,\beta_2<\alpha$, $f_1\in\mathcal{F}_{\beta_1\alpha}$, $f_2\in\mathcal{F}_{\beta_2\alpha}$ *akkor létezik olyan* γ *,* $\beta_1,\beta_2<\gamma<\alpha$ *és* $h_1\in\mathcal{F}_{\beta_1\gamma}$, $h_2\in\mathcal{F}_{\beta_2\gamma}$, $g\in\mathcal{F}_{\gamma\alpha}$ *amelyekre* $f_1=g\circ h_1$ *és* $f_2=g\circ h_2$

(5) $(\forall\alpha\leq\kappa$ *limesz*$)$ **(a)** $\theta_\alpha=\cup\{f^{-}{}''\theta_\beta: f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}\}$

(b) $(\forall\zeta\leq\theta_\alpha)$ $\varphi_\zeta = \cup\{ f_{\bar\zeta}{}''\varphi_{\bar\zeta} : (\exists\beta<\alpha)\ f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}\ \&\ f^{-}(\bar\zeta)=\zeta \}$

(c) $(\forall\zeta<\xi\leq\theta_\alpha)$ $\mathcal{G}_{\zeta\xi} = \cup\{f_{\bar\zeta\bar\xi}{}''\varphi_{\bar\zeta\bar\xi}: (\exists\beta<\alpha)\ f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}, f^{-}(\bar\zeta)=\zeta, f^{-}(\bar\xi)=\xi\}$ □

Könnyen látható, hogy ekkor $\langle\vec\theta,\vec{\mathcal{F}}^{-}\rangle$ is $(\kappa,1)$ - egyszerűsített mocsár, ahol $\vec{\mathcal{F}}^{-}=\langle F^{-}_{\alpha,\beta}:\alpha<\beta\leq\kappa\rangle$ és $F^{-}_{\alpha,\beta}=\{f^{-}\restriction\theta_\alpha: f\in F_{\alpha,\beta}\}$ $(\alpha<\beta\leq\kappa)$.

Vellemann [Ve8] tetszőleges κ reguláris számosságra forszolással megmutatta $(\kappa,2)$-egyszerűsített mocsár létezésének konzisztenciáját, és a 3-résű kétszámosság tételt levezette 2-résű egyszerűsített mocsarak segítségével. Ezzel egyidőben Jensen [Je2] -ben konstruált egyszerűsített mocsarakat szokásos 2-résű mocsarakból (1.23.Definíció), melyek tudvalevőleg léteznek L-ben.

Továbbá, [Ve5] -höz hasonlóan, [Ve9] -ben megtalálhatjuk a következő tétel bizonyítását:

1.25.TÉTEL [Ve9] (ZFC) *Pontosan akkor létezik* $(\omega_0,2)$ *-egyszerűsített mocsár, ha létezik* $(\omega_1,1)$*-egyszerűsített mocsár.* □

Már 1.17.-ben utaltunk nagyobbrésű mocsarak és Souslin -fák kapcsolatát érintő sejtésre. Ezenkívül nagyobbrésű mocsarak létezésével ekvivalens forszolási elveket sem ismerünk (pl. [SS0]).

1.c. NAGYOBBRÉSŰ MOCSARAK

Nagyobbrésű mocsarak általános definíciója elég körülményes, ráadásul csak a kiadatlan [Jel] és [StO,1.38.Def.(65-68.old.)] művekre hivatkozhatunk, [Del]-ben mindössze csak féloldalnyi bevezetést találunk. (Így nem meglepő, hogy a nagyobbrésű mocsarak eddig ismert egyetlen felhasználása a kétszámosság -tétel nagyobbrésű változata.)

Most ismertetjük az általunk definiált többrésű ($n<\omega_o$) egyszerűsített mocsarak fogalmát. (Alapvető tulajdonságaikat a következő fejezetben vizsgáljuk.)

A fejezet hátralevő részében minden mocsár *egyszerűsített.*

1.26. DEFINÍCIÓ (i) $\mathcal{M}$ **egyszerűsített 0 -résű mocsárkezdemény,** röviden **SMS** (simplified morass segment), *ha* $\mathcal{M}=\alpha=\theta+1$ *rákövetkező rendszám. Ekkor* $\mathbf{ht}(\mathcal{M})=\theta$ *az* $\mathcal{M}$ **magassága.** $\alpha=\kappa\in\mathrm{Card}$ *reguláris esetén* $\mathcal{M}$ **egyszerűsített 0 -résű** κ **-magas mocsár**, *röviden* $(\kappa,0)$*-mocsár* , *vagy* $(\kappa,0)$ - **SM** *(simplified morass)* . $\mathcal{M}$ **kezdőszelete** $\mathcal{N}$ **-nek** , *jelben* $\mathcal{M}\le\mathcal{N}$, *ha ez rendszám - értelemben igaz.*

(ii) *Ha* $\mathcal{M}=\theta+1$ *és* $\mathcal{N}=\Theta+1$ *0-résű mocsárkezdemények, akkor* $\mathbf{f}:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ **beágyazás**, *ha rendezéstartó és* $f(\theta)=\Theta$.

(iii) *Egy* $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ $(\mathcal{M}=\alpha=\theta+1,\mathcal{N}=\Theta+1)$ *beágyazás* **emelés (shift)** *vagy* **jobbra ágazó (right branching)**, *ha valamely* $\sigma<\theta$ *rendszámra* $f\restriction\sigma=id$ *és* $f(\sigma+\rho)=\Theta+\rho$ $(\forall\rho\in On,\sigma+\rho<\alpha)$. *Ekkor* σ *-t* f **hasadó (splitting) pontjának** *nevezzük.*

(iv) $\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ *beágyazások egy* $\mathcal{F}$ *családja* **amalgám**, *ha* $\mathcal{F}=\{id\restriction\theta,r\}$, *ahol* r *egy emelés függvény.* □

Legyen most $m<\omega_o$ rögzített, és tegyük fel, hogy az m -résű (egyszerűsített) mocsárkezdeményekre vonatkozó (a fenti definícióban bevezetett) fogalmakat már definiáltuk. Ekkor definiálhatjuk az (m+1)-résű fogalmakat. (Ha teljesen szabatosak akarnánk lenni, akkor az 1.27.-1.32. Definíciókban bevezetett fogalmakat mind $m<\omega_o$ -ra, a mocsár résére való indukcióval kellene szimultán definiálnunk.)

1.27. DEFINÍCIÓ (i) $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ **egyszerűsített (m+1) -résű mocsár kezdemény,** *röviden* **(m+1)-SMS,** *ha*

(o) $\vec{\mathcal{M}}=\langle\mathcal{M}_i:i<\alpha\rangle$ *m-résű mocsárkezdemények egy sorozata,* $\alpha=\theta+1$, $\mathcal{M}_i\le\mathcal{M}_j$ *ha* $i<j<\alpha$, *valamint* $\vec{\mathcal{F}}=\langle\mathcal{F}_{ij}:i\le j<\alpha\rangle$ *ahol* $\mathcal{F}_{ij}:\mathcal{M}_i\to\mathcal{M}_j$ *beágyazások egy családja* ($i\le j<\alpha$) *az alábbi tulajdonságokkal:*

(a) $\mathcal{F}_{ii}=\{id\restriction\mathcal{M}_i\}$, $\mathcal{F}_{i,i+1}$ *amalgám a* $\sigma_i\le ht(\mathcal{M}_i)$ *hasadó ponttal* ($i<\alpha$)

(b) $\mathcal{F}_{ij} = \{ f\circ g : f\in\mathcal{F}_{kj} , g\in\mathcal{F}_{ik} \}$ *ha* $i\le j\le k<\alpha$

(c) $\mathcal{M}_i = \cup\{ f''\mathcal{M}_j : f\in\mathcal{F}_{ji} , j<i \}$ *ha* $i<\alpha$ *limeszrendszám*

(d) $(\forall i<\alpha$ *limesz*$)$ $(\forall j<i)$ $(\forall f_1,f_2\in\mathcal{F}_{ji})$ $(\exists k, j\le k<i)$ $(\exists h\in\mathcal{F}_{ki})$

$(\exists h_1,h_2\in\mathcal{F}_{jk})$ $f_1=h\circ h_1$ & $f_2=h\circ h_2$ (*ún.* amalgám tulajdonság)

θ *-t ekkor* $\mathcal{M}$ **magasságának** *nevezzük, és* **ht**$(\mathcal{M})$ *-vel jelöljük.*

(ii) *Az (m+1) -résű* $\mathcal{N}=\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *SMS* **kezdőszelete** $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *-nek, jelben* $\mathcal{N}\trianglelefteq\mathcal{M}$, *ha* $\beta=ht(\mathcal{N})\le\alpha=ht(\mathcal{M})$, $\mathcal{N}_i=\mathcal{M}_i$ *és* $\mathcal{G}_{ij}=\mathcal{F}_{ij}$ *minden* $i\le j\le\beta$ *indexpárra.* □

($\trianglelefteq$ fogalmát Jensen is definiálta [Je2, §4]-ben.)

1.28. DEFINÍCIÓ (i) *Legyen* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *és* $\mathcal{N}=\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *(m+1) -SMS ,* $\alpha=\theta+1=ht(\mathcal{M})$ *és* $\beta=\Theta+1=ht(\mathcal{N})$. *Ekkor* $\mathbf{f}=\langle f^-,\vec{f},\vec{\vec{f}}\rangle : \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ **beágyazás,** *ha*

(a) $f^-:\alpha\to\beta$ *rendezéstartó* , $f^-(\theta)=\Theta$,

(b) $\vec{f}=\langle f_i:i<\alpha\rangle$, $f_i:\mathcal{M}_i\to\mathcal{N}_{f^-(i)}$ *m-résű beágyazások* ($i<\alpha$) ,

(c) $\vec{\vec{f}} = \langle f_{i,j}:i\le j<\alpha\rangle$, $f_{i,j} : \mathcal{F}_{i,j} \to \mathcal{G}_{f^-(i),f^-(j)}$ *függvények, amelyekre minden* $i\le j<\alpha$ *indexpárra (d)-(f) teljesül:*

(d) *ha* $k\in\mathcal{F}_{i,i+1}$ *shift és hasadási pontja* σ_i *, akkor* $f_{i,i+1}(k)\in$ $\in\mathcal{G}_{f^-(i),f^-(i)+1}$ *is shift, és hasadási pontja* $f_i^-(\sigma_i)$ $(\forall i<\theta)$

(e) $f_{ik}(c\circ b) = f_{jk}(c)\circ f_{ij}(b)$ *ha* $b\in\mathcal{F}_{ij}$, $c\in\mathcal{F}_{jk}$, $i<j<k<\alpha$,

(f) $f_j\circ b = f_{ij}(b)\circ f_i$ *és*

ha $b\in\mathcal{F}_{ij}$, $i<j<\alpha$,

(ii) **$f''(\mathcal{M})$:= Range(f) :=**

$\mathrm{Range}(f^-) \cup \cup\{\mathrm{Range}(f_i)\cup\mathrm{Range}(f_{ij}):\ i\le j<\alpha\ \}$

(itt diszjunkt úniókat használunk)

(iii) *Tetszőleges* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *(m+1)-résű SMS esetén az* $\mathrm{id}\restriction\mathcal{M}:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ **identitás** *beágyazást az alábbiak szerint definiáljuk m-re vonatkozó indukcióval:*

$\mathrm{id}\restriction\mathcal{M}=\langle f^-,\vec{f},\vec{\vec{f}}\rangle$, $f^-=\mathrm{id}\restriction\mathrm{ht}(\mathcal{M})$, $f_i=\mathrm{id}\restriction\mathcal{M}_i$ *és* $f_{ij}=\mathrm{id}\restriction\mathcal{F}_{ij}$ *ha* $i\le j<\mathrm{ht}(\mathcal{M})$ ($\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *megfelelő (m+1) -SMS*) □

A beágyazások kompozícióját és egyenlőségét természetes módon definiáljuk. Időnként egyszerűen csak *f(x)* -et írunk $f^-(x)$ helyett (ha $x<\mathrm{ht}(\mathcal{M})$) , illetve $f_i(x)$ helyett (ha $x\in\mathcal{M}_i$, $i<\mathrm{ht}(\mathcal{M})$) , sőt $f_{ij}(x)$ helyett (ha $x\in\mathcal{M}_{ij}$, $i\le j<\mathrm{ht}(\mathcal{M})$) is.

1.29. DEFINÍCIÓ *Legyen* $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ *beágyazás,* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *és* $\mathcal{N}=\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *(m+1)-SMS ,* $\mathcal{M}\le\mathcal{N}$ *(kezdőszelet) ,* $\mathrm{ht}(\mathcal{M})=\alpha=\theta+1$, $\mathrm{ht}(\mathcal{N})=\beta=\Theta+1$, *és* $f=\langle f^-,\vec{f},\vec{\vec{f}}\rangle$. *Ekkor*

(i) f **balra ágazó (left branching)**, *ha* $f^-\restriction\theta=\mathrm{id}$, $f_i=\mathrm{id}\restriction\mathcal{M}_i$ $(\forall i<\theta)$, $f_\theta\in\mathcal{G}_{\theta\Theta}$ *és* $f_{ij}=\mathrm{id}\restriction\mathcal{F}_{ij}$ $(\forall i\le j<\theta)$.

(Ekkor persze $f_{i\theta}(b)=f_\theta\circ b$ ha $b\in\mathcal{F}_{i\theta}$, $i\le\theta$.)

(ii) f **emelés (shift)** *vagy* **jobbra ágazó (left branching)**, *ha valamely* $\sigma<\theta$ *rendszámra*

(a) $f\restriction\sigma=\mathrm{id}$

(b) $f(\sigma+j)=\theta+\rho$ *ha* $\sigma+j<\alpha$

(c) $f_i=\mathrm{id}\restriction\mathcal{M}_i$ *ha* $i<\sigma$

(d) $f_{ij}=\mathrm{id}\restriction\mathcal{F}_{ij}$ *ha* $i\leq j<\theta$

(e) $f_\sigma\in\mathcal{F}_{\sigma\theta}$

(f) $\mathcal{G}_{f^-(i),f^-(j)} = f_{i,j}\,''\,\mathcal{F}_{i,j}$ *ha* $\sigma\leq i\leq j<\alpha$

Ekkor σ *-t* f **hasadó (splitting) pont**_jának nevezzük._ □

1.30. DEFINÍCIÓ $\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ *beágyazások egy* $\mathcal{F}$ *családját* **amalgámnak** *nevezzük* ($\mathcal{M},\mathcal{N}$ $(m+1)$*-résű SMS), ha* $\mathcal{M}\leq\mathcal{N}$ *és* $\mathcal{F}$ *tartalmaz minden lehetséges balra ágazó és pontosan egy jobbra ágazó beágyazást, és ezenkívül semmi mást.* □

A 2.30. Tétel felhasználásával azonnal kapjuk, hogy tetszőleges $\mathcal{M}$ $(m+1)$-résű SMS, $\sigma<\mathrm{ht}(\mathcal{M})=\theta+1$ és tetszőleges $f\in\mathcal{F}_{\sigma\theta}$ esetén létezik egy, egyértelműen meghatározott $\mathcal{N}$ $(m+1)$-résű SMS és egy, szintén egyértelmű $\hat{f}:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ jobbra ágazó beágyazás, amelyre $\hat{f}_\sigma=f$. Így, ha $\mathcal{F}:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ amalgám, akkor jobbra ágazó elemére használhatjuk az $\hat{f}_\sigma$ jelölést, ha $\sigma<\mathrm{ht}(\mathcal{M})$ a hasadó pont.

1.31. DEFINÍCIÓ (i) $\mathcal{M}$ **egyszerűsített 0 -résű mocsár,** *röviden 0-résű* **SM** (simplified morass), *vagy* **$(\kappa,0)$-SM,** *ha* $\mathcal{M}=\alpha=\kappa+1$ *egy* $\kappa+1$ *magas 0-résű egyszerűsített mocsár.*

(ii) *Tetszőleges* $m<\omega_0$ *és* $\kappa\in\mathrm{Card}$ *reguláris számosság esetén* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ **egyszerűsített κ -magas $(m+1)$ -résű mocsár,** *röviden $(m+1)$--résű* **SM** (simplified morass), *vagy* **$(\kappa,m+1)$-SM,** *ha* $\mathcal{M}$ *egy egyszerű-*

sített (m+1) -résű mocsárkezdemény, amelyre

(a) $ht(\mathcal{M}) = \kappa+1$,

(b) $|\mathcal{F}_{ij}| < \kappa$ *ha* $i\le j\le\kappa$,

(c) $size(\mathcal{M}_i) < \kappa$ *ha* $i<\kappa$, *(ld. az 1.32. Definíciót)*

(d) $\mathcal{M}_\kappa$ (κ^+, m) *- SM* . □

A fentiekből $top(\mathcal{M})=\kappa^{+m+1}$ könnyen belátható (ld. a következő definíciót.)

Az alábbi definíciókra a mocsarak (és a kezdemények) felépítésének tanulmányozásakor lesz szükségünk. A fogalmakat és a jelöléseket a mocsár résére ($m<\omega_o$) való indukcióval vezetjük be.

1.32. DEFINÍCIÓ *Legyenek* $M=a=t+1$, $N=b=r+1$ *tetszőleges 0 - résű, valamint* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$, $\mathcal{N}=\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *(m+1)-résű (egyszerűsített) mocsárkezdemények* ($m<\omega_o$, $ht(\mathcal{M})=\alpha=\theta+1$, $ht(\mathcal{N})=\beta=\Theta+1$, $t,r,\theta,\Theta\in On$ *rögzítettek)* . *Ekkor*

(i) $N\le M$ *(ill.* $\mathcal{N}\le\mathcal{M}$*) esetén* $\mathbf{idd}_{NM}:N\to M$ *(ill.* $\mathbf{idd}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$*) az* $idd_{NM}\restriction ht(N):=id\restriction N$ *és az* $(idd_{\mathcal{N}\mathcal{M}})_{ht(\mathcal{N})} := idd_{\mathcal{M}_{ht(\mathcal{N})},\mathcal{M}_{ht(\mathcal{M})}}$ *egyenlőségekkel definiált balra ágazó beágyazás.*

(ii) $\mathbf{top(M)}:=M$ *és* $\mathbf{top}(\mathcal{M}):=top(\mathcal{M}_\theta)$ M *ill.* $\mathcal{M}$ **teteje**

(iii) $\mathcal{M}\restriction(\tau+1):=\mathcal{N}=\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *az* $\mathcal{M}$ **megszorítása** $(\tau+1)$**-re** *(*$\tau<ht(\mathcal{M})$*), ha* $\mathcal{N}\le\mathcal{M}$ *(*$\tau+1$*)-magas (m+1)-résű SMS (azaz* $\mathcal{N}_i=\mathcal{M}_i$ *és* $\mathcal{G}_{ij}=\mathcal{F}_{ij}$ *ha* $i\le j\le\tau$*)*

(iv) $\mathbf{ing(M)}:=\emptyset$ *és* $\mathbf{ing}(\mathcal{M}):=ing(\mathcal{M}_\theta)\bigcup\cup\{\mathcal{F}_{ij}: i\le j\le\theta\}$ M ill. $\mathcal{M}$ **alkotórészei (ingredients)**

(v) $\mathbf{Fl_o(M)}:=\emptyset$ *és* $j<m$ *esetén* $\mathbf{Fl_j}(\mathcal{M}):=Fl_j(\mathcal{M}_\theta)$ *és* $\mathbf{Fl_m}(\mathcal{M}):=\{\mathcal{F}_{ij}: i\le j\le\theta\}$ **M** *ill.* $\mathcal{M}$ **szintjei (floor)**

(vi) **size**$(\mathcal{M}):=|\mathrm{ing}(\mathcal{M})\cup \mathrm{size}(\mathcal{M}_\theta)\cup \mathrm{ht}(\mathcal{M})|$ $\mathcal{M}$ **mérete**

(vii) *tetszőleges* $f:M\to N$ *beágyazásra* $\mathbf{f}^+:=f$, *valamint* $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, $f=\langle f^-,\vec{f},\vec{\vec{f}}\rangle$ *esetén* $\mathbf{f}^+:=f^-\bigcup\cup\{f_i^+: i\leq\theta\}\bigcup\cup\{f_{ij}: i\leq j\leq\theta\}$ *(diszjunkt úniók).* (Megjegyezzük, hogy $\mathrm{Dom}(f^+)\supseteq\mathrm{ing}(\mathcal{M})$ és $\mathrm{Range}(f^+)\subseteq$ $\subseteq\mathrm{ing}(\mathcal{N})$.)

(viii) $\mathbf{st}_o(\mathbf{M}):=t$, $\mathbf{st}_o(\mathcal{M}):=\mathrm{ht}(\mathcal{M})$, *és* $j<m$ *esetén* $\mathbf{st}_{j+1}(\mathcal{M}):=$ $=st_j(\mathcal{M}_\theta)$ M *ill.* $\mathcal{M}$ **lépcsői (stairs)**

(ix) $\mathbf{pt}^{(o)}(\mathbf{M}):=t$, $j<m$ *esetén* $\mathbf{pt}^{(j)}(\mathcal{M}):=\mathrm{pt}(\mathcal{M}_\theta)$, *és* $\mathbf{pt}^{(m)}(\mathcal{M}):=\mathcal{M}$ M *ill.* $\mathcal{M}$ **toronyszobái (penthouse)**

(x) $\langle\vec{K}_{\mathcal{M}}^{(j+1)},\vec{\vec{\mathcal{K}}}_{\mathcal{M}}^{(j+1)}\rangle:=\mathrm{pt}^{(j+1)}(\mathcal{M})$ *ha* $j<m$, *magassága* $\Theta^{(j+1)}$ □

Könnyen látható, hogy $\mathrm{pt}^{(o)}(\mathcal{M})=\mathrm{top}(\mathcal{M})$, $\mathrm{pt}^{(m-1)}(\mathcal{M})=\mathcal{M}_\theta$, és minden $j<m$ esetén $\mathrm{pt}^{(j+1)}(\mathcal{M})$ $(j+1)$-résű SMS , vagyis (x) értelmes. Továbbá $\mathrm{idd}_{\mathcal{M}\mathcal{M}}=\mathrm{id}\upharpoonright\mathcal{M}$ és $\mathrm{idd}_{\mathcal{N}\mathcal{K}}=\mathrm{idd}_{\mathcal{M}\mathcal{K}}\circ\mathrm{idd}_{\mathcal{N}\mathcal{M}}$ ha $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}\subseteq\mathcal{K}$.

2. MOCSARAK ALAPVETŐ TULAJDONSÁGAI

E fejezetben a mocsarak néhány alapvető tulajdonságát mutatjuk be. A 2.1.-2.9., 2.20-2.42. Állítások és Definíciók a mocsarak struktúráját írják le, legtöbbjüket később felhasználjuk, míg mások segítségével megpróbáljuk szemléltetni a mocsarak alkalmazhatóságát a kombinatorikus halmazelméletben.

A 2.7, 19. Állítások, valamint a nagyobbrésű mocsarakra vonatkozó állítások önálló eredmények. Ez utóbbiak [Ve8] 2. fejezetében található állítások általánosításai, közülük kiemelkedik a 2.30. Tétel. 2.6. és 2.9.-2.15. más szerzők eredményei, azonban az általunk közölt bizonyítások tömörebbek az idézett művekben találhatóknál, és közvetlen mocsár - konstrukciók; míg a 2.8. Állítás és bizonyítása a jelzett műből való.

A továbbiakban legyen minden mocsár *egyszerűsített* (ld. 1.13., 1.24. és 1.26. - 1.30. definíciókat.) Ha mégis másfajta ("Jensen-féle") mocsarakra utalnánk, akkor a *"szokásos"* jelzőt használjuk.

2.a. 1- RÉSŰ MOCSARAK TULAJDONSÁGAI

Ebben a részben elsősorban az 1- résű mocsarak alapvető tulajdonságait és felhasználásait mutatjuk be. A tulajdonságok nagy része általánosítható nagyobbrésű mocsarakra is, ezeket a 2.b részben bizonyítjuk. Azonban, ha a bizonyítás nem igényel sok változtatást, már a 2.a részben az általános eredményt mondjuk ki és igazoljuk.

Az alábbiakban, ha mást nem mondunk, $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathfrak{F}}\rangle$ egy tetszőleges (egyszerűsített) $(\kappa,1)$ -mocsár, $\kappa\in\mathrm{Card}$ reguláris .

2.0. ÁLLÍTÁS *Mocsár kezdőszelete tetszőlegesen elhagyható illetve megváltoztatható. (Akár 1- akár nagyobbrésű a mocsár.)*

Azaz ha $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathfrak{F}}\rangle$ (κ,m) -mocsár $(\kappa\in\mathrm{Card},m<\omega_o)$, $\alpha<\kappa$ akkor az $\mathcal{M}'_\zeta:=\mathcal{M}_{\zeta+\alpha}$ és $\mathcal{F}'_{\zeta\xi}:=\mathcal{F}_{\zeta+\alpha\ \xi+\alpha}$ $(\zeta<\xi\le\kappa)$ választással kapott $\mathcal{M}'=\langle\vec{\mathcal{M}}',\vec{\mathfrak{F}}'\rangle$ szerkezet is (κ,m) -mocsár. Hasonlóan, ha $\mathcal{M}$ a fenti és $\mathcal{N}=\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathfrak{G}}\rangle$ egy $\beta+1<\kappa$ magas (κ,m)-mocsárkezdemény és $\mathcal{N}_\beta=\mathcal{M}_o$, akkor az $\mathcal{M}'_\zeta:=\mathcal{N}_\zeta$, $\mathcal{F}'_{\zeta\xi}:=\mathcal{G}_{\zeta\xi}$ $(\zeta<\xi\le\beta)$, $\mathcal{M}'_{\beta+\zeta}:=\mathcal{M}_\zeta$, $\mathcal{F}_{\beta+\zeta\ \beta+\xi}:=\mathcal{F}'_{\zeta\xi}$ $(\zeta<\xi\le\kappa)$, $\mathcal{F}'_{\zeta\xi}:=\mathcal{F}_{\beta\xi}\circ\mathcal{G}_{\zeta\beta}=$ $=\{f\circ g: f\in\mathcal{F}_{\beta\xi}, g\in\mathcal{G}_{\zeta\beta}\}$ $(\zeta\le\beta\le\xi\le\kappa)$ egyenletekkel definiált $\mathcal{M}'=\langle\vec{\mathcal{M}}',\vec{\mathfrak{F}}'\rangle$ szerkezet is (κ,m) -mocsár. $\square$

Az alábbi állítások zöme [Ve2] ill. [Je2] -ből való, néhányukat kissé élesítettük, bizonyításukat sokszor egyszerűsítettük.

2.1. ÁLLÍTÁS *Ha $f,g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, $a,b\in\varphi_{\alpha}$, $\alpha<\beta\leq\kappa$ és $lub(f''a)=lub(g''b)$ akkor $a=b$ és $f\restriction a=g\restriction b$.*

BIZONYÍTÁS Mint általában az 1 -résű mocsarak esetében, indukcióval $\beta\leq\kappa$ -ra. Az állítás igaz ha $\beta=\alpha+1$. Az indukciós lépés $\beta=\nu+1$ esetén egyszerű. Ha pedig $\beta\leq\kappa$ limeszrendszám, akkor legyen $\alpha<\gamma<\beta$, $f'\in\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$, $g'\in\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$ és $h\in\mathcal{F}_{\gamma\beta}$ olyanok, hogy $f=f'\circ h$ és $g=g'\circ h$ Ekkor az indukciós feltevést alkalmazhatjuk $\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$ -ra, ami alapján kapjuk a bizonyítandó állítást. □

2.2. KÖVETKEZMÉNY *Ha $f(a)=g(b)$, $f,g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, $a,b\in\varphi_{\alpha}$ és $\alpha<\beta\leq\kappa$ akkor $a=b$ és $f\restriction a=g\restriction b$.* □

(Lásd még a 2.6.Állítást is.)

2.3. ÁLLÍTÁS *Tetszőleges $f\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ és $a\in\varphi_{\alpha}$ $(\alpha<\beta\leq\kappa)$ esetén van olyan $g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ amelyre $g\restriction a=f\restriction a$ és $g(a)=lub(f''a)$. Ezenkívül, ha $lub(f''a)\notin Range(f)$ akkor $sup(Range(g))<sup(Range(f))$.*

BIZONYÍTÁS Indukcióval $\beta\leq\kappa$ -ra. $\beta=\alpha+1$ esetén az állítás triviális. Ha $\beta=\nu+1$, $f=h\circ f'$, $h\in\mathcal{F}_{\nu\beta}$, $f'\in\mathcal{F}_{\alpha\nu}$ és $a':=lub(f'\restriction a)$ akkor $lub(f\restriction a)=lub(h\restriction a')$, és így használva az indukciós feltételt a h és f' függvényekre kapjuk a g_h és g' függvényeket és könnyen láthatóan $g_h\circ g'$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Ha β limeszrendszám, akkor legyen $f=h\circ f'$ ahol $f'\in\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$ és $h\in\mathcal{F}_{\gamma\beta}$ $\alpha<\gamma<\beta$ olyanok, melyekre $c:=lub(f)=h(c')$ valamilyen $c'\in\varphi_{\gamma}$ pontra. Ekkor pedig $g:=h\circ g'$ megfelel a követelményeknek , ahol g' az indukciós feltétel alapján az f' függvényhez tartozó függvény. □

2.4. ÁLLÍTÁS *Legyenek f és a mint az előző állításban, $b:=lub(f\restriction a)$. Ekkor létezik olyan $g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ függvény amelyre $g(a+n)=b+n$ amennyiben $a+n<\varphi_\alpha$.*

BIZONYÍTÁS Legyen $g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ az előző állítás feltételeit kielégítő olyan függvény, amelyre $\sup(Range(g))$ minimális. Ha g mégsem megfelelő, akkor $g(m)\neq lub(g\restriction m)$ valamilyen $a<m<\varphi_\alpha$ számra. Most az előző állítást $g\restriction m$ -re alkalmazva kapunk egy g_2 függvényt amelyre $g_2\restriction m=g\restriction m$ és $\sup(Range(g_2))<\sup(Range(g))$ ami ellentmond g választásának. □

2.5. KÖVETKEZMÉNY $id\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ *és így* $\mathcal{F}_{\alpha\beta}\subseteq\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$ *ha* $\alpha<\beta<\gamma\leq\kappa$.

BIZONYÍTÁS Az előző állításban írjunk a helyére 0 -át, továbbá az állítás második része következik az elsőből. □

Most közvetlen, általánosított bizonyítást adunk Velleman [Ve2, Cor.3.5] eredményére.

2.6. ÁLLÍTÁS *Legyen $\lambda<\kappa$ reguláris és $\alpha<\beta\leq\kappa$.*

(i) *Ha $f_i\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ $(i<\lambda)$ és*

$$(*) \qquad lub(\cup\{Range(f_i): i<\lambda\})<\varphi_\beta \quad \text{és} \quad cof(\beta)>\lambda$$

akkor létezik olyan γ és $h\in\mathcal{F}_{\gamma\beta}$ amelyekre $\alpha<\gamma<\beta$ és $f_i=h\circ\bar{f}_i$ valamely $\bar{f}_i\in\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$ függvényre $(i<\lambda)$.

(ii) *Ha $s\in[\varphi_\beta]^{<\lambda}$ és $\sup(s)<\varphi_\beta$, akkor $s=f''\bar{s}$ valamely $\bar{s}\subseteq\varphi_\gamma$, $f\in\mathcal{F}_{\gamma\beta}$, $\gamma<\beta$ értékekre.*

$\beta=\kappa$ esetben $(*)$ triviálisan teljesül. Nem tudom, hogy tetszőleges β rendszámra $(*)$ elhagyható-e.

BIZONYÍTÁS (i) Legyen $b\in\varphi_\beta\setminus lub(\cup\{Range(f_i):i<\lambda\})$ és $f_\lambda\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ olyan amelyre $b=f_\lambda(\bar{b})$ valamely $\bar{b}\in\varphi_\alpha$ pontra. Legyenek ekkor $\beta_o<\beta$, $g_i\in\mathcal{F}_{\beta_o\beta}$, $\bar{f}_i\in\mathcal{F}_{\alpha\beta_o}$ $(i\le\lambda)$ olyanok, hogy $f_i=g_i\circ\bar{f}_i$ és $f_\lambda=g_i\circ\bar{f}_\lambda$ ha $i<\lambda$, valamint legyen $\bar{\bar{b}}:=\bar{f}_\lambda(\bar{b})$. Könnyen látható, hogy $g_i(\bar{\bar{b}})=b$ minden $i\le\lambda$ indexre, így a 2.2.Következmény felhasználásával kapjuk, hogy $Range(\bar{f}_i)\subset\bar{\bar{b}}$ $(i<\lambda)$, és mivel $g_i\restriction\bar{\bar{b}}$ nem függ i-től $(i\le\lambda)$, bármelyik $i\le\lambda$ megfelel a keresett h függvény feltételeinek.

(ii) Könnyen következik (i) - ből. □

A fenti segédállításokat a dolgozat hátralevő részében szinte minden sorban használjuk, különösebb hivatkozás nélkül.

Mocsarak felhasználásakor (pl.a 4.8.Tételben) sokszor a következő tulajdonság könnyebben lenne alkalmazható mint a lineáris sorozatok: $\varphi_\alpha=\cup\{\varphi_\beta:\beta<\alpha\}$ $\forall\alpha<\kappa$ limesz rendszámra. Azonban igaz a:

2.7. ÁLLÍTÁS *Létezik olyan $\alpha<\kappa$ limesz amelyre* $\varphi_\alpha>\sup\{\varphi_\beta:\beta<\alpha\}$

BIZONYÍTÁS Legyen $\lambda_o<\kappa$ és $f_o\in\mathcal{F}_{\lambda_o,\kappa}$ tetszőleges, és legyen $\tau<\kappa^+$ olyan amire $\tau>\sup(f_o''\varphi_{\lambda_o})+\kappa(\kappa+1)$. Más szóval van $\kappa+1$ diszjunkt üres $[\kappa\rho,\kappa\rho+\kappa)$ $(\rho<\kappa^+)$ alakú intervallum $f_o''\varphi_{\lambda_o}$ és τ között. Legyen $\lambda_1>\lambda_o$ és $f_1\in\mathcal{F}_{\lambda_1,\kappa}$ melyre $f_o=f_1\circ h$ valamely $h\in\mathcal{F}_{\lambda_o\lambda_1}$ és $\tau\in Range(f_1)$.

Most definiáljuk a $\langle\lambda_n:n<\omega\rangle$ és az $\langle f_n\in\mathcal{F}_{\lambda_n,\kappa}:n<\omega\rangle$ sorozatokat és az $S_n=f_n''\varphi_{\lambda_n}$ halmazokat a következő tulajdonságokkal: $\tau\in Range(f_n)$ és $tip(\cup\{S_n:n<\omega\})>\sup\{tip(S_n):n<\omega\}$. Jelöljük a $[\kappa,\kappa\rho)$ intervallumot I_ρ -val $(\rho<\kappa^+)$, és tetszőleges A,B halmazok esetén az $A\cup B$ halmazt $A\overset{<}{\cup}B$ - vel jelöljük abban az esetben, ha $a<b$ igaz minden $a\in A$, $b\in B$ elemre. Most legyen $\lambda_{n+1}>\lambda_n$ és $f_n\in\mathcal{F}_{\lambda_n,\kappa}$ olyan, hogy ha $S_{n+1}:=f_{n+1}''\varphi_{\lambda n+1}$, akkor teljesüljön az

$$S_{n+1} \supseteq \cup\{[\kappa\rho,\kappa\rho+\phi_{\lambda n}):I_\rho\cap S_n\cap\tau\neq\emptyset\} \cup \cup\{T_i:i\in\phi_{\lambda v}\} \cup \{\kappa\xi,\kappa\xi+\mu) \cup \{\tau\}$$

reláció, ahol $T_i=[\kappa\xi_i,\kappa\xi_i+\phi_{\lambda i})$ $(\xi_i<\kappa)$ ha $i\in\phi_{\lambda n}$ és $\mu<\kappa$ elég nagy AI (additív felbonthatatlan) rendszám. (Ugye az összes fennt definiált objektum κ -nál kisebb méretű.) Mivel τ rögzített, így $f_n=f_{n+1}\circ h_n$ valamely $h_n\in\mathcal{F}_{\lambda n,\lambda n+1}$ függvényre.

Ekkor persze $tip(S)\geq\zeta\times\zeta$ ahol $S=\cup\{S_n:n<\omega\}$ és $\zeta=\sup\{\varphi_{\lambda n}:n<\omega\}$. Ha ekkor $\alpha=\sup\{\lambda_n:n<\omega\}$ és $f\in\mathcal{F}_{\alpha,\kappa}$ olyan, amelyre $f_n=f\circ k_n$ ahol $k_n\in\mathcal{F}_{\lambda n,\alpha}$ $(n<\omega)$, akkor $\tau\in Range(f)$ miatt $\varphi_\alpha=tip(Range(f))>tip(S)\geq\zeta\times\zeta$ □

2.8. TÉTEL *(R.B. Jensen, [Je3]) Nincs olyan $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ $(\omega_1,1)$ -mocsár, melyre a hasadási pontok $\langle\sigma_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$ sorozata monoton növő.* ($\sigma_\alpha\in\varphi_\alpha$ az $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha+1}$ definíciójában szereplő hasadási (split) pont.)

BIZONYÍTÁS Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathcal{M}$ ellenpélda. Legyen ekkor $X \prec \langle H_{\omega_3},\mathcal{M}\rangle$ egy megszámlálható elemi részmodell , és $\alpha:=X\cap\omega_1$. Legyen továbbá $\langle H,\bar{\mathcal{M}}\rangle$ modell és F olyanok, melyekre $F:\langle H,\bar{\mathcal{M}}\rangle\to\langle X,\mathcal{M}\rangle$ elemi ekvivalencia, és $F(\alpha)=\omega_1$, $F\restriction\alpha=id$. (Azaz $\alpha=crit(F)$.) Ekkor persze $\mathcal{M}\restriction\alpha=\bar{\mathcal{M}}\restriction\alpha=(\langle\varphi_\gamma:\gamma<\alpha\rangle,\langle\mathcal{F}_{\gamma\delta}:\gamma<\delta<\alpha\rangle)$.

A továbbiakban gyakran használunk olyan $x=(\delta,\nu)$, $y=(\gamma,\eta)$ párokat, melyekre $\delta,\gamma\leq\omega_1$ és $\nu\in\varphi_\delta$, $\eta\in\varphi_\gamma$. Ha x és y ilyenek, sőt még $\gamma<\delta$ és $\nu=f(\eta)$ valamely $f\in\mathcal{F}_{\gamma\delta}$ függvényre, akkor használni fogjuk az $\mathbf{y}\prec\mathbf{x}$ vagy $\mathbf{y}\prec_{\mathcal{M}}\mathbf{x}$, és $f\restriction y$ helyett a $\pi_{\mathbf{yx}}$ vagy $\pi^{\mathcal{M}}_{\mathbf{yx}}$ jelöléseket.

Legyen most $\bar{x}:=(\alpha,\bar{\nu})$ ahol $\bar{\nu}\in\bar{\varphi}_\alpha:=(\varphi_\alpha)^{\bar{\mathcal{M}}}$ és $y:=(\gamma,\nu)\prec_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{x}$ $(\gamma<\alpha)$ tetszőlegesek. Ekkor $y\prec_{\mathcal{M}}x:=(\omega_1,\nu)$ ha $\nu=F(\bar{\nu})$, és $F(\pi^{\bar{\mathcal{M}}}_{y\bar{x}})=\pi^{\mathcal{M}}_{yx}$.
Most $x':=(\alpha,\nu')\prec_{\mathcal{M}}x$ valamely $\nu'\in\varphi_\alpha$ elemre. Belátjuk: $\bar{x}=x'$.

Nyilván α limesz, és $\{y:y\prec x'\} = \{y=(\gamma,\eta):y\prec x \,\&\, \gamma<\alpha\} = \{y:y\prec_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{x}\}$.

Így $\mathrm{Range}(\pi^{\mathcal{M}}_{x',x})=\cup\{\mathrm{Range}(\pi^{\mathcal{M}}_{yx})\}$, és így $(\nu',\pi_{yx}) = \mathrm{limdir}(\vec{\nu},\vec{\pi})$ (struktúrák direkt limesze) ahol $\vec{\pi}=\langle\pi_{yy'}:y\prec y'\prec x'\rangle$ és $\vec{\nu} = \langle\nu': y\prec y'\prec x' \,\&\, y'=(\gamma',\nu')\rangle$. Az elemi ekvivalencia miatt ekkor $(\bar{\nu},\pi^{\bar{\mathcal{M}}}_{y\bar{x}}) = \mathrm{limdir}(\vec{\nu}^-,\vec{\pi}^-)$ ahol $\vec{\pi}^-=\langle\pi_{yy'}:y\prec y'\prec_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{x}\rangle$ és $\vec{\nu}^- = \langle\nu' : y\prec y'\prec_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{x} \,\&\, y'=(\gamma',\nu')\rangle$. Azonban $y\prec y'\prec_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{x}$ pontosan akkor teljesül, ha $y\prec y'\prec_{\mathcal{M}}x$ hiszen $y'\in\mathcal{M}\restriction\alpha$. Vagyis $\bar{x}=x'$ valóban, és így $y\prec_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{x} \Leftrightarrow y\prec_{\mathcal{M}}x$ és $\pi^{\bar{\mathcal{M}}}_{y\bar{x}}=\pi^{\mathcal{M}}_{yx'}$.

Most belátjuk, hogy $\pi_{x\bar{x}}=F\restriction\bar{\nu}$. Legyen ugyanis $\xi<\bar{\nu}$ tetszőleges, majd $y\prec\bar{x}$ amelyre $\xi=\pi_{y\bar{x}}(\xi_o)$. Ekkor $\pi_{x\bar{x}}(\xi)=\pi_{yx}(\xi_o)=F(\pi_{y\bar{x}}(\xi_o))=F(\xi)$.

Legyen most $\bar{\nu}:=(\omega_1+\omega_1)^{\bar{H}}=\alpha+\alpha$. Így $\bar{\nu}<\bar{\varphi}_\alpha=\omega_2^H$, továbbá a fenti állítás alapján:

$$\pi_{x\bar{x}}\restriction\alpha = \mathrm{id}\restriction\alpha$$

$$\pi_{x\bar{x}}(\alpha+i) = \omega_1+i \qquad (i<\alpha)$$

$$\pi_{x\bar{x}}(\bar{\nu}) = \omega_1+\omega_1 > \sup\{\pi_{x\bar{x}}(\xi):\xi<\bar{\nu}\}$$

Legyen most z_1 a legkisebb olyan rendszám amelyre $z_1\prec x$ és

$$\pi_{x\bar{z}_1}(\bar{\nu}) > \sup\{\pi_{x\bar{z}_1}(\alpha+i):i<\alpha\}$$

Nyilván $z_1=(\gamma+1,\nu_1)$. Ha most $z_o:=(\gamma,\nu_o)\prec(\gamma,\nu_1)$, akkor

$$\pi_{x\bar{z}_o}(\alpha+i) = \pi_{x\bar{z}_o}(\alpha)+i \qquad (i\le\alpha)$$

vagyis $\nu_o= \pi_{x\bar{z}_o}(\alpha)+\alpha$, azaz $\nu_o=\sigma_\gamma\in\varphi_\gamma$ hasadási pont.

Ha most a hasadási pontok sorozata $\langle\sigma_\alpha:\alpha<\omega_1\rangle$ monoton növő , akkor $\sigma_{\gamma'}>\nu_o$ minden $\gamma'>\gamma$ rendszámra. Így $\mathrm{crit}(\pi_{z_1x})>\nu_o$, és ebből $\pi_{z_1x}\pi_{x\bar{z}_1}(\alpha)=\pi_{x\bar{z}_1}(\alpha)<\omega_1$, míg $\pi_{x\bar{x}}(\alpha)=\omega_1$, amely ellentmondás. □

Az 1-résű mocsarak néhány további alaptulajdonságát a 4.8.Tétel bizonyításában említjük. Most lássunk néhány alkalmazást. Először rövid, közvetlen bizonyítást adunk Velleman [Ve4] nyomdokain, $(\omega_o,1)$ -mocsár segítségével Shelah [Sh] tételére.

2.9. TÉTEL *Ha ZFC tetszőleges modelljéhez egy Cohen -valóst adjungálunk, akkor az új modellben van ω_1-Souslin fa.*

BIZONYÍTÁS Legyen $V\models ZFC$ és $\mathcal{M}=(\vec{n},\vec{\mathcal{F}})\in V$ egy $(\omega_o,1)$-mocsár.[1] Először azt vegyük észre, hogy ha $\mathfrak{A}_i=\langle n_i,R_i,\ldots\rangle$ tetszőleges véges, azonos típusú struktúrák $(i<\omega_o)$ és $\mathcal{F}_{ij}$ elemei elemi beágyazások, akkor egyszerűen definiálhatjuk az $\mathfrak{A}=\langle\omega_1,R,\ldots\rangle$ struktúrát: legyen $\bar{x}\in[\omega_1]^k$ vektorra $\mathfrak{A}\models R(\bar{x})$ pontosan akkor ha $\mathfrak{A}_i\models R_i(\bar{\bar{x}})$ valamely $i<\omega_o$ indexre, amelyre $\bar{\bar{x}}\in[n_i]^k$ és $\bar{x}=f(\bar{\bar{x}})$ valamely $f\in\mathcal{F}_{i\omega_1}$ függvényre (ha R k-változós reláció).

Vagyis a beforszolt Cohen -valós segítségével elegendő minden $i<\omega_o$ indexre egy (megfelelő) $<_i\subset[n_i]^2$ fa-rendezést megadnunk. [2] (Könnyen belátható, hogy ekkor a származtatott $<$ rendezés fa lesz ω_1 -en.) Tehát $G\subset\mathbb{P}$ egy Cohen-generikus valós V felett, és G segítségével vizsgáljuk $<_i$ -t .

Azt mondjuk, hogy $<_{i+1}$ szabad amalgám, ha $<_{i+1}\ \supset\ <_i\cup^*(f_i''<_i)$ (diszjunkt únió) ahol $f_i\in\mathcal{F}_{i,i+1}$ a hasadási függvény. $\mathcal{F}_{ii+1}$ felépítése miatt szabad amalgám persze mindig létezik. Sőt, ha $x,y\in\varphi_i$ és $\sigma_i\leq x\leq_i y$ ($\sigma_i\in\varphi_i$ a hasadási pont, $\leq$ a szokásos rendezés φ_i-n) , akkor készíthető olyan $\mathfrak{A}_{i+1}$ (pontosabban $\leq_{i+1}$) szabad amalgám , amelyre $y\leq_{i+1} f_{i+1}(x)$.

Legyen most $\mathbb{P}:=\{\ \mathfrak{A}:\ \mathfrak{A}=\langle n_i,\leq'\rangle \text{ fa },\ \leq'\subseteq\leq\ ,\ i<\omega_o\ \}$,

---

[1] Velleman [VeS]-ben bizonyította $(\omega_o,1)$-mocsarak létezését ZFC -ben, e cikkben további érdekes példákat láthatunk $(\omega_o,1)$ -mocsarak felhasználására, és így ZFC-tételek bizonyítására.

[2] Pontosabban egy $\leq_i\subset[n_i]^2$ relációt definiálunk, de ennek $=_i$ -része megegyezik a szokásos $=$ relációval.

továbbá legyen $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\in\mathbb{P}$, $\mathfrak{A}=<n_i,\leq'>$, $\mathfrak{B}=<n_j,\leq''>$, $i,j<\omega_o$ esetén $\mathfrak{B}\ll\mathfrak{A}$ pontosan akkor ha $i\leq j<\omega_o$ és $\mathcal{F}_{ij}$ minden eleme $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ beágyazás (e célból legyen $\mathcal{F}_{ii}:=\{id\restriction\varphi_i\}$ ha $i<\omega_o$). Nyilván $(\mathbb{P},\ll)$ izomorf a Cohen- kényszerképzettel.

Most belátjuk, hogy $V^{\mathbb{P}}$ -ben $\mathcal{M}[G]$ (azaz G-ből $\mathcal{M}$ segítségével a fenti módon szerkesztett ω_1-fa) Souslin-fa . Legyen ugyanis pl. $\mathfrak{A}_i\models$ " $\dot{A}\subseteq\check{\omega}_1$ megszámlálhatatlan antilánc " . $|\mathbb{P}|\leq\aleph_o$ és $|\dot{A}|\geq\aleph_1$ miatt feltehető, hogy $A\in V$, és minden $\alpha,\beta\in A$ esetén $\alpha_i=\beta_i$. (Tetszőleges $\alpha\in\varphi_{\omega.}=\omega_1$ és $i<\omega_o$ esetén $\alpha_i\in\varphi_i$ amelyre $\alpha=f(\alpha_i)$ valamely $f\in\mathcal{F}_{i\omega_o}$ függvényre.) Legyen $\alpha,\beta\in A$, továbbá $n<\omega_o$ minimális, amelyre $\alpha=f(\alpha_n)$ és $\beta=f(\beta_n)$ valamely $f\in\mathcal{F}_{n\omega.}$ függvényre. Majd legyen $g,h\in\mathcal{F}_{in}$ olyan, hogy $\alpha_n=g(\alpha_i)$ és $\beta_n=h(\beta_i)$, mondjuk $g=g_{n-1}\circ g_{n-2}\circ\ldots\circ g_{i+1}\circ g_i$ és $h=h_{n-1}\circ h_{n-2}\circ\ldots\circ h_{i+1}\circ h_i$. Indukcióval j -re , $i<j\leq n$, definiáljuk a $<_j$ rendezést a szabad amalgámoknál leírt módszerrel. A lényeg : α_j és β_j mindig összehasonlíthatók legyenek $<_j$ szerint. ($\alpha_i =_i \beta_i$ persze, a $g_{j-1}=h_{j-1}$ és az $\alpha_{j-1},\beta_{j-1}\leq\sigma_{j-1}$ esetek nem érdekesek, máskor, ha pl. $\sigma_{j-1}\leq\alpha_{j-1}\leq_{j-1}\beta_{j-1}$ akkor készíthető olyan $\leq_j$, amely szerint α_j és β_j összehasonlíthatók.) Ekkor pedig $\mathfrak{A}_n\models$ "α és β összehasonlíthatók" vagyis A nem lehet antilánc.

Hasonlóan lehet belátni azt is, hogy $\mathcal{M}[G]$ -ben $\aleph_1$ hosszú C lánc sincs: legyenek $\mathfrak{A}_i$, $\alpha<\beta\in C$, n , g,h mint fent, és könnyen definiálhatjuk indukcióval j -re , $i<j\leq n$, a $<_j$ rendezéseket úgy, hogy $\alpha_j\geq_j\beta_j$ mindig teljesüljön, és így persze $\mathfrak{A}_n\models$ " $\alpha\geq\beta$ " □

T. Carlson és R. Laver eredményei szerint a fenti tétel állítása Sacks-valósokra független ZFC+SH -tól, sőt $MA_{\aleph_1}$ esetén tetszőleges számú véletlen (random) valós adjungálása esetén sem igaz.

S. Shelah és L. J. Stanley [SS0] -ban bevezetnek egy, a mocsarak létezésével ekvivalens S_μ forszolási elvet (mely hasonló D. Vellemann [Ve0] -beli "leiírhatatlan" elvéhez), majd ennek felhasználásával készítenek szuper Souslin fákat. Először megmutatjuk, hogy egyszerűsített mocsarakból közvetlenül konstruálható szuper Souslin fa. Majd vázoljuk, hogy szintén egyszerűsített mocsár felhasználásával S_μ is könnyebben levezethető, mint S. Shelah és L. J. Stanley eredeti bizonyításában.

2.10. DEFINÍCIÓ ([SS0]) *Legyen κ tetszőleges reguláris számosság. Ekkor egy normális, κ^{++} magas* $\mathbf{T}=(T,\leq)$ *fa* κ^{++} - **szuper Souslin fa**, *ha az alábbiak teljesülnek:* $\lambda=\mathrm{ht}(T)$, $a=\langle a_i : i<\lg(a)\rangle\subseteq T_\alpha$ **szintsorozat**, *ha* $\alpha<\lambda$, $\lg(a)=a$ *hossza* $\in On$, $a_i\neq a_j$ *ha* $i\neq j$, $T_\alpha\subseteq T$ *az* α *-dik szint.* $\mathbf{Lev}_\beta(\mathbf{T}):=\{a\subseteq T$ szintsorozat, $\lg(a)=\beta\}$ $(\beta\in On)$. T *tetszőleges* a, b *szintsorozataira legyen* $a\prec b$ *ha* $\lg(a)=\lg(b)=\lg$ *és* $a_i\leq b_i$ *minden* $i<\lg$ *indexre. Végül* $[\mathbf{Lev}_\beta(\mathbf{T})]^2:=\{(a,b)\in Lev_\beta(T): a\prec b\}$ $(\beta\in On)$, *és legyen tetszőleges* $x,y\in T$ *elemekre* $x\| y$ *ha* $x\leq y$ *vagy* $y\leq x$.

Ekkor **T** κ^{++}**-szuper Souslin fa,** *ha létezik olyan* $\mathbf{F}: [Lev_\kappa(T)]^2\to\kappa^+$ *függvény, amelyre*

$$(*)\quad \forall(a,b),(a,c)\in[Lev_\kappa(T)]^2 \qquad F(a,b)=F(a,c) \Rightarrow (\exists i<\kappa)\ b_i\| c_i \qquad \square$$

2.11. ÁLLÍTÁS *Ha* T κ^{++}*-szuper Souslin fa, akkor van benne* κ^{++}*-Souslin részfa, amely szintén* κ^{++}*-szuper Souslin fa.*

BIZONYÍTÁS Egy κ^{++}-szuper Souslin fa nem feltétlenül κ^{++}-Souslin fa. Legyen azonban T egy κ^{++}-szuper Souslin fa, $a\subseteq T$ tetszőleges κ-antilánc, $a=(a_i : i<\kappa)$. Ekkor könnyen belátható, hogy valamely $i<\kappa$ indexre $T_{a_i}:=\{y\in T: y\geq a_i\}$ κ^{++}-Souslin fa. □

2.12. TÉTEL *Ha* $2^\kappa=\kappa^+$ *és létezik* κ^+*-SMS, akkor van* κ^{++}*-szuper Souslin fa.*

BIZONYÍTÁS Legyen $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\vec{\mathcal{F}}}\rangle$ κ^+-*SMS*. [Ve2] vagy [Je2] alapján feltehetjük, hogy $\varphi_\alpha=\theta_\alpha+1$ rákövetkező rendszám minden $\alpha<\kappa^+$ indexre. Most $\alpha\leq\kappa^+$-ra indukcióval konstruálunk φ_α-magas $(T^\alpha,\prec^\alpha)$ normális fákat, és T^{κ^+} lesz a kívánt κ^{++}-szuper Souslin fa. $T^\alpha\neq\varphi_\alpha$, csak $\varphi_\alpha=ht(T^\alpha)$. T^α i-dik szintjét T^α_i jelöli $(i\leq\theta_\alpha)$, $T^\alpha|x:=\{y\in T^\alpha: x\prec y^\alpha\}$. A konstrukcióban T^β kezdőszelete lesz T^α-nak minden $\beta<\alpha\leq\kappa^+$ esetén, azaz $T^\beta_i=T^\alpha_i$ ha $i<\varphi_\beta=ht(T_\beta)$. Továbbá $x\in\varphi_\beta$, $y\in\varphi_\alpha$ esetén x, y helyett gyakran írunk (β,x) -et ill. (α,y) -t. Legyen továbbá $x\triangleleft y$, ha $y=f(x)$ valamely $f\in\mathcal{F}_{\beta,\alpha}$ függvényre. Ezenkívül minden $f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}$ $(\beta<\alpha\leq\kappa^+)$ függvényre megadunk egy $\hat{f}: T^\beta\to T^\alpha$, $\hat{f}=\langle\hat{f}_i: i\in\varphi_\beta\rangle$, $\hat{f}_i: T^\beta_i\to T^\alpha_{f(i)}$ függvényt, amelyre többek között teljesül:

$$(*)\quad x\prec^\alpha\hat{f}_i(x)\ \&\ \hat{f}_j(z)\prec^\alpha\hat{f}_i(x)\qquad \text{ha } z\in T^\beta_j,\ x\in T^\beta_i,\ z\prec^\beta x,\ j<i,\ f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}$$

Legyen T^0 tetszőleges φ_0-magas fa.

Ha most $\alpha=\beta+1$, $\sigma.=\sigma_\beta<\varphi_\beta$ a hasadási pont, $\mathcal{F}_{\beta\alpha}=\{id,f_{\sigma.}\}$, akkor legyen $(T^{\beta+1},\prec^{\beta+1})$ olyan $\varphi_{\beta+1}$ -magas fa, melynek T^β kezdőszelete, és minden $y\in T^\beta_{\theta.}$ $(\theta.=\theta_\beta)$, $x\in T^\beta_{\sigma.}$, $x\prec^\beta y$ esetén $T^{\beta+1}|y\cong T^\beta|x$, azaz $T^{\beta+1}=T^\beta\cup^\prec(T^\beta_{\theta.}\times T^\beta_{\sigma.})$. (Speciálisan $T^{\beta+1}|y\cong T^{\beta+1}|x$ minden $x,y\in T^{\beta+1}$ elemre, ha x és y azonos szinten vannak $T^{\beta+1}$ -ben.) Ekkor persze $(\hat{f}_{\sigma.})_i=id\restriction T^\beta_i$ ha $i<\sigma_\beta$, továbbá válasszuk az $x':=(\hat{f}_{\sigma.})_i(x)$ értékeket i -re $(\sigma_\beta\leq i\leq\theta_\beta)$ indukcióval tetszőlegesen úgy, hogy $(*)$ teljesüljön.

$\alpha\leq\kappa$ limeszrendszámra T^α "egyszerűen" a már létező T^β -k és $\hat{f}: T^\beta\to T^\gamma$ beágyazások $(f\in\mathcal{F}_{\beta\gamma},\beta<\gamma<\alpha)$ direkt limesze. Pontosabban :

legyen $i\in\varphi_\alpha$ esetén:

$$(T^\alpha_i \, , \, <\hat{f}_{\bar{i}}:\bar{i}\lhd i, \bar{i}\in\varphi_\beta, \beta<\alpha, f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}, f(\bar{i})=i>) :=$$

$$:= \mathrm{limdir}\ (<T^\beta_{\bar{i}}:\bar{i}\lhd i, \bar{i}\in\varphi_\beta, \beta<\alpha> \, , \, <\hat{g}_{\bar{i}}:\bar{i}\in\varphi_\beta, g(\bar{i})\lhd i, g\in\mathcal{F}_{\beta\gamma}, \beta<\gamma<\alpha,>)$$

a lehetséges legkisebb olyan T^α_i ,amelyre a $\hat{f}_{\bar{i}}:T^\beta_{\bar{i}} \to T^\alpha_i$ beágyazások $(\bar{i}\lhd i, \bar{i}\in\varphi_\beta, \beta<\alpha, f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}, f(\bar{i})=i)$ sorozata létezik; továbbá $x\in T^\alpha_i$, $y\in T^\alpha_j$, $i<j<\varphi_\alpha$ esetén legyen $x\prec^\alpha y$ pontosan akkor, ha létezik olyan $\beta<\alpha$, $f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}$, $\bar{i}<\bar{j}<\varphi_\beta$, $\bar{x}\in T^\beta_{\bar{i}}$, $\bar{y}\in T^\beta_{\bar{j}}$ amelyekre $f(\bar{i})=i$, $f(\bar{j})=j$, $\hat{f}_{\bar{i}}(\bar{x})=x$, $\hat{f}_{\bar{j}}(\bar{y})=y$ és $\bar{x}\prec^\beta\bar{y}$. Vellemann [Ve2] -beli konstrukciójában esetleg nem minden $\alpha<\kappa$ limeszrendszámra teljesül,hogy $\theta_\alpha\in\cup\{f''\varphi_\beta:\beta<\alpha, f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}\}$, bár Jensen [Je2] -beli, és a jelen dolgozatban használt mocsarakra ez nem fordulhat elő. Ha mégis, akkor $T^\alpha_{\theta_\alpha}$ megkapható a $<T^\alpha_i:i<\theta_\alpha>$ sorozat direkt limeszeként.

Most belátjuk, hogy T^{κ^+} megfelelő,azaz κ^{++}-szuper Souslin fa. $|T^{\kappa^+}_i|\le\kappa^+$ $(i<\kappa^{++})$ hiszen a felhasznált mocsár minden φ_{κ^+} -tól különböző alkatrésze $<\kappa^+$, magassága pedig κ^+. A mocsár - tulajdonságok miatt könnyen belátható, hogy T^{κ^+} normális.

$\mathbf{F}(a,b)\in\kappa^+$ azt fogja kódolni, hogy az (a,b) szintsorozat -pár pontosan mikor és hol jelent meg a fenti konstrukcióban. Vagyis $F(a,b)=F(a,c)$ esetén b és c "őse" ugyanaz, de a következő szinten $b_i\prec c_i$ teljesül valamely $i<\kappa$ indexre, a konstrukció miatt.

F definiálásához néhány újabb jelölést vezetünk be.Legyen τ_i: $\mathrm{Lev}_\kappa(T^i)\to\kappa^+$ bijekció $(i<\kappa^+)$, és $a\in\mathrm{Lev}_\kappa(T^{\kappa^+})$, $a\subset T^{\kappa^+}_i$ esetén legyen $\delta(a)$ a legkisebb olyan $\delta<\kappa^+$ amelyre $a=\hat{f}_{\bar{i}}(\bar{a})$ és $f(\bar{i})=i$ valamely $f\in\mathcal{F}_{\delta\kappa^+}$ függvényre és $\bar{a}\subset T^\delta_{\bar{i}}$ szintsorozatra. Végül legyen $\chi:(\kappa^+)^4\to\kappa^+$ injekció (rendszámhatvány) és egyszerűen:

$$F(a,b) := \chi(\delta(a),\delta(b),\tau_\delta(a),\tau_\delta(b))$$

ahol $\delta(a,b)=\max\{\delta(a),\delta(b)\}$ ha $a,b\in \mathrm{Lev}_\kappa(T^{\kappa^+})$.

Megmutatjuk, hogy F jó. Legyen tehát $(a,b),(a,c)\in[\mathrm{Lev}_\kappa(T)]^2$, $\bar{b}\subset T_i^{\delta\cdot}$, $\bar{c}\subset T_j^{\delta\cdot}$ $(i,j<\kappa^+)$ és $F(a,b)=F(a,c)$, vagyis $\delta(b)=\delta(c)=\delta_o$ és $\tau_\delta(b)=\tau_\delta(c)$. Mindezekből még az is következik, hogy ha $b=\hat{f}_{\bar{i}}(\bar{b})$ és $c=\hat{g}_{\bar{i}}(\bar{c})$ $(\bar{b}\subset T_{\bar{i}}^{\delta\cdot},\bar{c}\subset T_{\bar{j}}^{\delta\cdot}$, $f,g\in\mathcal{F}_{\mu\kappa^+}$, $\bar{i},\bar{j}\in\varphi_\mu$, $f(\bar{i})=i,g(\bar{j})=j$, $\mu=\delta_o)$, akkor: $\bar{i}=\bar{j}$ és $\bar{b}=\bar{c}$! Legyen most $\mu\geq\delta_o$ a *legnagyobb* fenti tulajdonságú rendszám, azaz ha $\nu=\mu+1$, $f(\bar{\bar{i}})=i$, $g(\bar{\bar{j}})=j$, $f,g\in\mathcal{F}_{\nu\kappa^+}$, $\bar{\bar{i}},\bar{\bar{j}}\in\varphi_\nu$,akkor $\bar{\bar{i}}=h(\bar{i})$ és $\bar{\bar{j}}=id(\bar{j})$ (vagy fordítva), ahol $\mathcal{F}_{\mu\nu}=\{id,h\}$, $\bar{i}=\bar{j}\in\varphi_\mu$, $\bar{b}=\bar{c}\subset T_{\bar{i}}^{\mu}$. De $T^\nu=T^{\mu+1}$ konstrukciója miatt ekkor pl. $\bar{\bar{b}}_x=\hat{id}_{\bar{i}}(\bar{b}_x) \not<^\nu \hat{h}_{\bar{i}}(\bar{b}_x)=\bar{\bar{c}}_x$, ami miatt $b_x\not< c_x$ valamely $x<\kappa$ indexre. □

Shelah és Stanley [SS0] -ban κ^{++}-szuper Souslin fát az S_μ forszolási elv (ld.1.6.Definíció) segítségével konstruáltak, az S_μ elvet pedig (amely hasonlít Velleman [Ve0] -ban bevezetett "leírhatatlansági" (indescribable) elvéhez) mocsarak felhasználásával igazolták. Bár a fenti bizonyítás szerint S_μ kikerülhető, megmutatjuk, hogy egyszerűsített mocsarakból könnyen levezethető.

2.13. ÁLLÍTÁS *Tetszőleges μ reguláris számosságra S_μ ekvivalens egy $(\mu,1)$ -SM létezésével.*

BIZONYÍTÁS S_μ -ből könnyen következik Velleman leírhatatlansági elve, és Velleman eredménye szerint ebből $(\mu,1)$ -mocsár létezése.

Legyen most $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ μ-*SMS* . Legyen továbbá $\langle P,\leq,\mathcal{T}\rangle$ egy μ -speciális részben rendezett halmaz (poset) , $\langle D_t:t<\mu\rangle$ pedig $\mathcal{T}$-ben sűrű halmazok sorozata. Legyen ekkor μ egy partíciója μ számosságú részhalmazokra $\langle X_t : t<\mu \rangle$. Most definiáljuk a $\bar{p}_i \in \mathcal{T}$ kifejezéseket $i<\mu$ -re indukcióval, melyekre az alábbiak teljesülnek:

(T1) $\bar{p}_i(id{\restriction}\varphi_i) \le \bar{p}_j(id{\restriction}\varphi_j)$ ha $j<i$

(T2) $\bar{p}_i(id{\restriction}\varphi_i) \le \bar{p}_j(f)$ ha $f\in\mathcal{F}_{ji}$, $j<i$

(T3) $\bar{p}_i \in D_t$ ha $i\in X_t$

Ez nem nehéz: keressünk először olyan $\bar{p}_i^* \in \mathcal{T}$ elemet, amelyre (T1) és (T2) teljesül: a 2.13. Segédállítás és P erős zártsága felhasználásával. Majd egyszerűen $\bar{p}_i \in D_t$ kiterjeszti $\bar{p}_i^*$ -t .

2.14. SEGÉDÁLLÍTÁS *Ha* $i_o \le \mu$ *és a* $\langle \bar{p}_i : i<i_o \rangle$ *sorozatra* (T1) *és* (T2) *teljesül minden* $i<i_o$ *-ra, akkor* $\bar{p}_j(f)$ *és* $\bar{p}_k(g)$ *összehasonlíthatóak* P *-ben minden* $f\in\mathcal{F}_{j,i}$, $g\in\mathcal{F}_{k,i}$ *függvényre és* $j\le k<i_o$ *indexre.*

BIZONYÍTÁS Természetesen $\mathcal{F}_{j,j}=\{id{\restriction}\varphi_j\}$ ha $j<\mu$. Két eset van:

1.ESET: $f=h\circ f'$ és $g=h\circ g'$ valamely $f'\in\mathcal{F}_{j,i}$, $g'\in\mathcal{F}_{k,i}$, $h\in\mathcal{F}_{i,i}$. függvényekre, $j\le k\le i<i_o$. (T2) alapján $\bar{p}_i(id{\restriction}\varphi_i)$ alsó korlátja $\bar{p}_j(f')$ és $\bar{p}_k(g')$ -nek. A leírhatatlansági tulajdonság miatt ekkor $\bar{p}_i(h)$ alsó korlátja $\bar{p}_j(h\circ f')$ és $\bar{p}_j(h\circ g')$ -nek.

2.ESET: $f=(id{\restriction}\varphi_i)\circ f'$ és $g=h\circ g'$ ahol $f'\in\mathcal{F}_{j,i}$, $g'\in\mathcal{F}_{k,i}$, $i+1=i_o$ és $\mathcal{F}_{i,i}.=\{id{\restriction}\varphi_i,h\}$. Most is $\bar{p}_i(id{\restriction}\varphi_i)$ alsó korlátja $\bar{p}_j(f')$-nek és $\bar{p}_k(g')$ -nek. P amalgám-tulajdonsága miatt ekkor $\bar{p}_i(id{\restriction}\varphi_i)$ és $\bar{p}_i(h)$ összehasonlíthatóak. □

Hasonló gondolatmenettel lehet azt is belátni, hogy az alábbi G μ -irányított: $G:=\{\bar{p}_i(f):f\in\mathcal{F}_{i\mu},i<\mu\}$. A fenti segédállítás miatt már csak azt kell belátnunk, hogy G mindegyik $D_t^{\#}$ halmazt uniform módon metszi. Legyen tehát $t<\mu$, $s\in[\mu^+]^{<\mu}$. A 2.6. Állítás segítségével ismét találhatunk egy olyan $j<\mu$ indexet és $f\in\mathcal{F}_{j,\mu}$ függvényt amelyre $\mathrm{Range}(f)\supseteq s$. Ha $i>j$, $i\in X_t$, $f=h\circ f'$, $f'\in\mathcal{F}_{ji}$ és

$h\in\mathcal{F}_{1,\mu}$ akkor $\bar{p}_1\in D_t$ és $\mathrm{Range}(f)\supseteq s$. □

Megemlítjük, hogy H.D.Donder [DoO]-ban ún. "gazdag" κ-fák alkalmazásával kapott eredménye is megkapható egyszerűsített mocsarakból:

2.15. DEFINÍCIÓ *Tetszőleges* κ, τ, λ_ν $(\nu<\tau)$, $n<\omega_o$ *számosságokra* $\kappa\to[\lambda_\nu]^n_\tau$ *teljesül, ha tetszőleges* $f:[\kappa]^n\to\tau$ *függvényre található olyan* $\nu<\tau$, $X\in[\kappa]^{\lambda_\nu}$ *amelyre* $\nu\notin f''[X]^n$. □

2.16. ÁLLÍTÁS *Ha* $\kappa>\omega_o$, $\omega_o\le\lambda_\nu\le\kappa$ $(\nu<\tau)$ *mind regulárisak,* $n\ge1$ *és létezik* $(\kappa,1)$*-SM, akkor* $\kappa\nrightarrow[\lambda_\nu]^n_\tau$ *-ből* $\kappa^+\nrightarrow[\lambda_\nu]^{n+1}_\tau$ *következik.* □

J.Baumgartner és S.Shelah [BS] konzisztencia eredménye is megkapható egyszerűsített mocsarakból:

2.17. ÁLLÍTÁS *Ha* $2^{\aleph_o}=\aleph_1$ *és van* $(\kappa,1)$*-SM, akkor van* ω_2+1 *magas szuperatomos Boole Algebra, melynek minden szintje* $\aleph_o$ *méretű, míg legfelső szintje legalább* $\aleph_2$ *méretű.* □

L.J.Stanley [StO,40.old] megjegyzi, hogy a dolgozatában definiált univerzális $(\kappa,1)$-mocsarak létezéséből $2^\kappa=\kappa^+$ is következik. A.Kanamori [KaO]-ban megmutatja, hogy a Silver-féle W_κ $(\kappa=\mu^+)$ elvből $2^\mu=\mu^+$ könnyen levezethető. W_κ $(\kappa=\mu^+)$ is könnyen készíthető $(\mu,1)$-SM *és* $2^\mu=\mu^+$ felhasználásával, a 3.2 Tétel m=1 esetéhez hasonló módon. Azonban egy $(\mu,1)$-SM létezéséből $2^\mu=\mu^+$ nyilvánvalóan nem következik, hiszen egy $(\mu,1)$-SM felfelé abszolút minden olyan modellkiterjeszjesztéssel szemben, amikor μ^+ nem omlik.

A továbbiakban $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ egy $(\kappa,1)$ SM $\langle(\beta^\alpha_\delta,f^\alpha_\delta):\delta<\tau^\alpha\rangle$ lin. sorozatokkal ($\alpha<\kappa$ limesz), az 1.18.Definíció szerint.

2.18. ÁLLÍTÁS (i) $C_\alpha:=\{\beta^\alpha_\delta:\delta<\tau^\alpha\}\subseteq\alpha$ *kofinális és zárt.*
(ii) $\varphi_\alpha=\cup\{\mathrm{Range}(f^\alpha_\delta):\delta<\tau^\alpha\}$ *ha* $\alpha<\kappa$ *limesz* (Vö.2.7.Állítás)

BIZONYÍTÁS (i) (b)$\Rightarrow C_\alpha$ és $C_{\bar\alpha}$ kofinális, (c)$\Rightarrow C_\alpha$ zárt. **(ii)** (b) miatt. □

2.19. ÁLLÍTÁS *Vannak olyan* $\langle(\mathfrak{B}^\alpha_\delta,\mathfrak{F}^\alpha_\delta):\delta<\tau^\alpha\rangle$ *lin. sorozatok, melyekre* $\mathfrak{B}^\alpha_\delta$ *rákövetkező rendszám ha* $\delta<\tau^\alpha$ *rákövetkező* ($\alpha<\kappa$ *limesz).*

BIZONYÍTÁS Legyen $\mathfrak{B}^\alpha_\delta:=\beta^\alpha_\delta+1$ ha $\delta<\tau^\alpha$ rákövetkező, $\mathfrak{B}^\alpha_\delta:=\beta^\alpha_\delta$ máskor. Majd $\alpha<\kappa$ limeszre indukcióval definiáljuk a $\mathfrak{F}^\alpha_\delta\in\mathcal{F}_{\mathfrak{B}^\alpha_\delta\,\alpha}$ függvényeket: $\mathfrak{F}^\alpha_\delta:=f^\alpha_\delta$ ha $\delta<\tau^\alpha$ limesz, $\mathfrak{F}^\alpha_\delta:=f^\alpha_\gamma\circ\mathfrak{F}^{\mathfrak{S}}_\delta$ ha van $\gamma\in(\delta,\tau^\alpha)$ limesz, $\mathfrak{S}=\mathfrak{B}^\alpha_\gamma$, végül $\mathfrak{F}^\alpha_\delta\in\mathcal{F}_{\mathfrak{B}^\alpha_\delta\,\alpha}$ tetszőleges: $f^\alpha_\delta:=\mathfrak{F}^\alpha_\delta\circ\ell$ ahol $\ell\in\mathcal{F}_{\mathfrak{B}^\alpha_\delta\,\beta^\alpha_\delta}$ ha nincs ilyen γ . □

2.b. m - RÉSŰ MOCSARAK TULAJDONSÁGAI

Az alábbiakban az általános (egyszerűsített) m+1 -résű mocsarak ($m<\omega_o$) alapvető tulajdonságait mutatjuk be. Néhányuk az 1 - résű mocsaraknál megismert tulajdonságok általánosításai, míg mások éppen azt mutatják, hogy az 1-nél nagyobb résű mocsarak néhány tulajdonsága lényegesen eltér az 1-résűek tulajdonságaitól.

Az alábbiakban, ha mást nem írunk, $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ egy (m+1)-résű, $\mathcal{N}=\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{R}}\rangle$ pedig (m+2)-résű SMS (egyszerűsített mocsárkezdemény), $m<\omega_o$, $\alpha=\mathrm{ht}(\mathcal{M})+1=\theta+1$, $\beta=\mathrm{ht}(\mathcal{N})+1=\Theta+1$ (ld. 1.26.-1.32. Definíciók).

2.20. ÉSZREVÉTEL $\mathrm{top}(\mathcal{M}_\alpha) = \cup\,\{\, (f^+)"\mathrm{top}(\mathcal{M}_\beta) : \beta<\alpha\ ,\ f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha} \,\}$ *ha* $\alpha<\theta$ *limeszrendszám*. □

2.21. ÁLLÍTÁS *Legyen* $\alpha<\beta\le\theta$ *és* $b^{(1)},b^{(2)}\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ *és* $\bar{\mathcal{M}}$ *m-résű SMS, és a* $c^{(1)},c^{(2)}: \bar{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}_\alpha$ *beágyazások rögzítettek. Ekkor* $b^{(1)}\circ c^{(1)}=b^{(2)}\circ b^{(2)}$ *esetén* $c^{(1)}=c^{(2)}$ *és* $b^{(1)}\restriction\mathrm{Range}(c^{(1)})= = b^{(2)}\restriction\mathrm{Range}(c^{(2)})$.

A 2.21.-2.24. Állításokat egyszerre bizonyítjuk, szimultán indukcióval $m<\omega_o$ -ra.

2.22. DEFINÍCIÓ *Tetszőleges* $f:\varepsilon\to\delta$ $(\varepsilon,\delta\in\mathrm{On})$ *és* $x\in\varepsilon$ *esetén legyen* $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}):=\mathrm{ssup}(\varphi"x)=\min\{\eta\in\mathrm{On}:\eta\ge\varphi"x\}$. *Továbbá, ha* $f=\langle f^-,\vec{f},\vec{\bar{f}}\rangle$ *(m+2)-résű mocsarak közötti beágyazás, akkor* $x\in\mathrm{Dom}(f^-)$ *esetén egyszerűen* $\overline{f^-(x)}$ *helyett* $\bar{f}(x)$ *-et írunk.* □

Az alábbiakban [Ve8] Lemmáit általánosítjuk tetszőleges m-résű mocsarakra ($m<\omega_o$) .

2.23. ÁLLÍTÁS *Legyen* $\alpha<\beta\le\Theta$, $f=\langle f^{-},\vec{f},\vec{\vec{f}}\rangle\in\mathcal{H}_{\alpha\beta}$, $\zeta\le\Theta_\alpha=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\alpha)$, $\mathcal{N}_\alpha=\langle\vec{\mathcal{N}}^{(\alpha)},\vec{\vec{\mathfrak{R}}}^{(\alpha)}\rangle$, $\mathcal{N}_\beta=\langle\vec{\mathcal{N}}^{(\beta)},\vec{\vec{\mathfrak{R}}}^{(\beta)}\rangle$. *Ekkor egyértelműen léteznek olyan* $\bar{f}_\zeta : \mathcal{N}^{(\alpha)}_\zeta \to \mathcal{N}^{(\beta)}_{\bar{f}(\zeta)}$ *és* $f^{\#}_\zeta \in \mathcal{H}^{(\beta)}_{\bar{f}(\zeta),f(\zeta)}$ *beágyazások , valamint* $\bar{f}_{\xi\zeta} : \mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi\zeta} \to \mathcal{H}^{(\beta)}_{f(\xi),\bar{f}(\zeta)}$ $(\xi<\zeta)$ *függvények, amelyekre*

(a) $f_\zeta = f^{\#}_\zeta\circ\bar{f}_\zeta$

(b) $f_{\xi\zeta}(b) = f^{\#}_\zeta\circ\bar{f}_{\xi\zeta}(b)$ *ha* $b\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi\zeta}$, $\xi<\zeta$

(c) $\bar{f}_{\eta\zeta}(b\circ c) = \bar{f}_{\xi\zeta}(b)\circ\bar{f}_{\eta\xi}(c)$ *ha* $b\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi\zeta}$, $c\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta\xi}$, $\eta<\xi<\zeta$

(d) *ha* $\alpha<\beta<\gamma\le\Theta$, $f\in\mathcal{H}_{\beta\gamma}$, $g\in\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ *és* $\xi\le\zeta\le\Theta_\alpha$ *akkor*

(d1) $\overline{(f\circ g)_\zeta} = \bar{f}_{\bar{g}(\zeta)}\circ\bar{g}_\zeta$

(d2) $(f\circ g)^{\#}_\zeta = \bar{f}_{\bar{g}(\zeta),g(\zeta)}(g^{\#})\circ f^{\#}_{\bar{g}(\zeta)}$

(d3) $\overline{(f\circ g)}_{\xi\zeta} = \bar{f}_{g(\xi),\bar{g}(\zeta)}\circ\bar{g}_{\xi\zeta}$

2.24. ÁLLÍTÁS *Legyen* $\alpha<\beta\le\Theta=\mathrm{ht}(\mathcal{N})$, $f,g\in\mathcal{H}_{\alpha\beta}$, $\zeta_1,\zeta_2\le\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\alpha)$ *és* $\bar{f}(\zeta_1)=\bar{g}(\zeta_2)$. *Ekkor* $\zeta_1=\zeta_2=\zeta$, $f^{-}\upharpoonright\zeta=g^{-}\upharpoonright\zeta$, *és minden* $\xi<\eta<\zeta$ *indexhármasra* $f_\xi=g_\xi$, $\bar{f}_{\xi\zeta}=\bar{g}_{\xi\zeta}$ *és* $f_{\xi\eta}=g_{\xi\eta}$.

A fenti egyenlőségek teljesülése esetén azt mondjuk, hogy **f és g megegyezik ζ-ig**. A fenti állítás alapján persze $f_\zeta=g_\zeta$ azonnal következik, ha $f^{-}(\zeta)=g^{-}(\zeta)$.

BIZONYÍTÁS Most szimultán bebizonyítjuk a 2.21. - 2.24. Állításokat, $m<\omega_o$ -ra vonatkozó indukcióval. Vagyis $m=m'+1$ adott, és a 2.21.-2.24. Állításokat már beláttuk minden $m''\leq m'$ -re.

2.21. ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA : Tudjuk, hogy

$$\left[\langle ht(\mathcal{M}_\alpha):\alpha<ht(\mathcal{M})\rangle \;,\; \langle f^-:\langle f^-,\vec{f},\vec{\vec{f}}\rangle\in\mathcal{F}_{\alpha\beta},\alpha<\beta<ht(\mathcal{M})\rangle \right]$$

1-résű SMS , így a 2.1.Állítás alapján $c^{(1)-}=c^{(2)-}=c^-$, és $b^{(1)-}(c^-(u))=b^{(2)-}(c^-(u))=b^-(c^-(u))$ ha $u\leq\bar\theta=ht(\bar{\mathcal{M}})$, vagyis $\overline{b^{(1)}}(c^-(\bar\theta))=\overline{b^{(2)}}(c^-(\bar\theta))$. Ez utóbbi, és a 2.24 állítás alapján $\overline{b^{(1)}_{c(u)}} = \overline{b^{(2)}_{c(u)}} = \bar{b}_{c(u)}$ ha $u\leq\bar\theta$. Legyen most $u\leq\bar\theta$ rögzített. Ekkor a 2.23.állítás felhasználásával kapjuk:

$$(b^{(1)}\circ c^{(1)})_u = b^{(1)\#}_{c(u)}\circ c^{(1)}_u = b^{(2)\#}_{c(u)}\circ c^{(2)}_u = (b^{(2)}\circ c^{(2)})_u$$

ami alapján $c^{(1)}_u\circ c^{(1)}_u = c_u$ és

$$b^{(1)\#}_{c(u)}(c_u(x))_u = b^{(2)\#}_{c(u)}(c_u(x))_u = b^{\#}_{C(u)}(c_u(x))$$

ha $u\leq\bar\theta$ és $x\in\bar{\mathcal{M}}_u$, ahol $\bar{\mathcal{M}}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\vec{\mathcal{F}}}\rangle$. Végül, tetszőleges $v<u\leq\bar\theta$ és $d\in\bar{\mathcal{F}}_{v,u}$ esetén kapjuk:

$$(b^{(1)}\circ c^{(1)})_{v,u}(d) \;=\; b^{\#}_{c(u)}\circ\bar{b}_{c(v),c(u)}(c^{(1)}_{v,u}(d)) \;=$$

$$= b^{\#}_{c(u)}\circ\bar{b}_{c(v),c(u)}(c^{(2)}_{v,u}(d)) \;=\; (b^{(2)}\circ c^{(2)})_{v,u}(d)$$

amiből $c^{(1)}_{v,u}(d)=c^{(2)}_{v,u}(d)$, és így

$$b^{(1)}_{c(v),c(u)}(c^{(1)}_{v,u}(d)) = b^{(2)}_{c(v),c(u)}(c^{(2)}_{v,u}(d))$$

könnyen következik. □

2.23. ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA :

Először is vegyük észre, hogy a 2.24. Állítás alapján $f^{\#}_{\zeta}$, $\bar{f}_{\zeta}$ és $\bar{f}_{\xi\zeta}$ egyértelműek minden $\xi<\zeta\leq\Theta_{\alpha}=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_{\alpha})$ indexpárra. Létezésüket pedig β -ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.

0. ESET: $\beta=\alpha$ - triviális.

1. ESET: $\beta=\alpha+1$. A bizonyítás csak akkor érdekes, ha f jobbra ágazó és $\zeta\geq\sigma_{\alpha}$ ahol σ_{α} $\mathcal{H}_{\alpha,\alpha+1}$ hasadó pontja, hiszen minden más esetben $\bar{f}(\zeta)=f(\zeta)$ és $\bar{f}_{\zeta}=f^{\#}_{\zeta}=f=\mathrm{id}$ és $f_{\xi\zeta}=\mathrm{id}$.
$\zeta=\sigma_{\alpha}$ esetén $\bar{f}(\zeta)=\zeta$, $f^{\#}_{\zeta}=f_{\sigma_{\alpha}}\in\mathcal{H}^{(\beta)}_{\sigma_{\alpha}\Theta_{\alpha}}$, $f_{\xi\zeta}(b)=f_{\sigma_{\alpha}}\circ b$ és így $\bar{f}_{\xi\zeta}=\mathrm{id}$ minden $\zeta<\xi$ indexre (itt $\mathcal{N}_{\beta}=<\vec{\mathcal{N}}^{(\beta)},\vec{\mathcal{H}}^{(\beta)}>$) .
Továbbá $\sigma_{\alpha}<\zeta\leq\Theta_{\alpha}$, $\Theta_{\alpha}=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_{\alpha})$ esetén $\bar{f}(\zeta)=f(\zeta)$, és így $\bar{f}_{\zeta}=f_{\zeta}$, $f^{\#}_{\zeta}=\mathrm{id}$ és $\bar{f}_{\xi\zeta}=f_{\xi\zeta}$.

2. ESET: $\beta=\gamma+1$. Legyen $f=g\circ h$ ahol $g\in\mathcal{H}_{\gamma\beta}$, $h\in\mathcal{H}_{\alpha\gamma}$, és legyen $\zeta'=h(\zeta)$. Ekkor $\bar{f}(\zeta)=\bar{g}(\bar{h}(\zeta))$, majd az 1.28.f) Definíció és az indukciós feltevés alapján kapjuk:

$$(*)\qquad f_{\zeta}=g_{h(\zeta)}\circ h_{\zeta}=g_{h(\zeta)}\circ h^{\#}_{\zeta}\circ\bar{h}_{\zeta}=g_{\bar{h}(\zeta),h(\zeta)}(h^{\#}_{\zeta})\circ g_{\bar{h}(\zeta)}\circ\bar{h}_{\zeta}=$$
$$=g_{\bar{h}(\zeta),h(\zeta)}(h^{\#}_{\zeta})\circ g^{\#}_{\bar{h}(\zeta)}\circ\bar{g}_{\bar{h}(\zeta)}\circ\bar{h}_{\zeta}$$

így $f^{\#}_{\zeta}=g_{\bar{h}(\zeta)|h(\zeta)}(h^{\#}_{\zeta})\circ g^{\#}_{\bar{h}(\zeta)}$ és $\bar{f}_{\zeta}=\bar{g}_{\bar{h}(\zeta)}\circ\bar{h}_{\zeta}$ megfelelő függvények. Továbbá tetszőleges $\xi<\zeta$ és $b\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi\zeta}$ esetén igaz, hogy

$$(\ast)\qquad f_{\xi\zeta}(b)=g_{h(\xi),h(\zeta)}(h_{\xi\zeta}(b))=g_{h(\xi),h(\zeta)}(h^{\#}_{\zeta}\circ\bar{h}_{\xi\zeta}(b))=$$
$$=g_{\bar{h}(\zeta),h(\zeta)}(h^{\#}_{\zeta})\circ g_{h(\xi),\bar{h}(\zeta)}(\bar{h}_{\xi\zeta}(b))=$$
$$=g_{\bar{h}(\zeta),h(\zeta)}(h^{\#}_{\zeta})\circ g^{\#}_{\bar{h}(\zeta)}\circ\bar{g}_{h(\xi),\bar{h}(\zeta)}(\bar{h}_{\xi\zeta}(b))\quad,$$

ismét az 1.28.f) Definíció és az indukciós feltevés alapján.
Ez pedig azt jelenti, hogy az $\bar{f}_{\xi\zeta} := g_{h(\xi),\bar{h}(\zeta)} \circ \bar{h}_{\xi\zeta}$ függvény kielégíti a feltételeket.

Végül (*), (⁑) és a 2.21.Állítás alapján (d1), (d2) és (d3) mindkét esetben teljesül.

3.ESET: β limeszrendszám. Legyenek $\gamma<\beta$, $g\in\mathcal{H}_{\gamma\beta}$, $h\in\mathcal{H}_{\alpha\gamma}$ olyanok, hogy $\bar{f}(\zeta)\in\mathrm{Range}(g\restriction\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\gamma))$ és $f=g\circ h$. Ekkor nyilván $\bar{f}(\zeta)=$ $=g(\bar{h}(\zeta))$, és így az indukciós feltétel és az 1.28.f) Definíció alapján kapjuk

$$f_\zeta = g_{h(\zeta)} \circ h_\zeta = g_{h(\zeta)} \circ h_\zeta^{\#} \circ \bar{h}_\zeta = g_{\bar{h}(\zeta),h(\zeta)}(h_\zeta^{\#}) \circ g_{\bar{h}(\zeta)} \circ \bar{h}_\zeta$$

Így $f_\zeta^{\#} = g_{\bar{h}(\zeta),h(\zeta)}(h_\zeta^{\#})$ és $\bar{f}_\zeta = g_{\bar{h}(\zeta)} \circ \bar{h}_\zeta$ megfelelő függvények.
Továbbá tetszőleges $\xi<\zeta$ és $b\in\mathcal{H}_{\xi\zeta}^{(\alpha)}$ esetén ismét igaz, hogy

$$f_{\xi\zeta}(b) = g_{h(\xi),h(\zeta)}(h_{\xi\zeta}(b)) = g_{h(\xi),h(\zeta)}(h_\zeta^{\#} \circ \bar{h}_{\xi\zeta}(b)) =$$

$$= g_{\bar{h}(\zeta),h(\zeta)}(h_\zeta^{\#}) \circ g_{h(\xi),\bar{h}(\zeta)}(\bar{h}_{\xi\zeta}(b)) =$$

megint az 1.28.f) Definíció és az indukciós feltevés alapján.
Ekkor pedig az $\bar{f}_{\xi\zeta} := g_{h(\xi),\bar{h}(\zeta)} \circ \bar{h}_{\xi\zeta}$ függvény ismét megfelelő. □

2.24. ÁLLÍTÁS BIZONYÍTÁSA : β -ra egyszerű indukcióval, és a 2.3. Állítás felhasználásával. □

A továbbiakban a 2.23.Állításban bevezetett $f_\zeta^{\#}$, $\bar{f}_\zeta$, $\bar{f}_{\xi\zeta}$ függvények néhány hasznos tulajdonságát bizonyítjuk be.

2.25. ÁLLÍTÁS *Legyenek* $\alpha<\beta\le\Theta=\mathrm{ht}(\mathcal{N})$, $\zeta\le\Theta_\alpha=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\alpha)$, $f\in\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ *rögzítettek. Ekkor*

(a) $\bar{f}_\zeta\circ b=\bar{f}_{\xi\zeta}(b)\circ f_\xi$ *ha* $\xi<\zeta$, $b\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi\zeta}$

(b) $\bar{f}_{\eta\zeta}(b\circ c)=\bar{f}_{\xi\zeta}(b)\circ f_{\eta\xi}(c)$ *ha* $\eta<\xi<\zeta$, $b\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi\zeta}$, $c\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta\xi}$

(c) $(\forall\xi<\bar{f}(\zeta))(\forall b\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi,\bar{f}(\zeta)})\ (\exists\eta<\zeta)(\exists c\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta\zeta})(\exists d\in\mathcal{H}^{(\beta)}_{\xi,f(\eta)})$

$$b=\bar{f}_{\eta\zeta}(c)\circ d$$

(c) -ben természetesen $\xi\le f^{-}(\eta)\le\bar{f}(\zeta)$ és $\zeta>0$.

Továbbá (a) az $\bar{f}_{\eta\zeta}(b)$ függvényeknek a linearizáló sorozatokhoz hasonló fedési tulajdonságait írja le.

BIZONYÍTÁS (Tetszőleges m -re.)

(a) $f^{\#}_\zeta\circ\bar{f}_\zeta\circ b=f_\zeta\circ b=f_{\xi\zeta}(b)\circ f_\xi=f^{\#}_\zeta\circ\bar{f}_{\xi\zeta}(b)\circ f_\xi$ és a 2.21. Állítás alapján.

(b) $f^{\#}_\zeta\circ\bar{f}_{\eta\zeta}(b\circ c)=f_{\eta\zeta}(b\circ c)=f_{\xi\zeta}(b)\circ f_{\eta\xi}(c)=f^{\#}_\zeta\circ\bar{f}_{\xi\zeta}(b)\circ f_{\eta\xi}(c)$ és a 2.21. Állítás alapján.

(c) β -ra indukcióval. Vagyis $\zeta<\bar{f}(\zeta)$ és $b\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi,\bar{f}(\zeta)}$. Legyen $\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\alpha)=\Theta_\alpha$, $\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\beta)=\Theta_\beta$.

I.ESET : $\beta=\alpha+1$. Ha f balra ágazó, akkor $f^{-}(\zeta)=\bar{f}(\zeta)=\zeta$ és $\bar{f}_{\eta\zeta}(c)=c$ minden $\eta<\zeta$, $c\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta\zeta}$ esetén, így bármely $\eta<\zeta$ megfelel, hiszen $f^{-}(\eta)=\eta$. Tehát legyen f jobbra ágazó, és legyen emelő függvénye $f^{*}\in\mathcal{H}^{(\beta)}_{\sigma,\Theta_\alpha}$. $\zeta\le\sigma$ rendszámokra ismét könnyű a bizonyítás. Legyen tehát $\zeta=\sigma+\delta>\sigma$, ekkor $f^{-}(\zeta)=\bar{f}(\zeta)=\Theta_\alpha+\delta>\Theta_\alpha$. $\xi=\Theta_\alpha+\varepsilon$ esetén $\eta=\sigma+\varepsilon$ megfelel, hiszen $b=f_{\eta\zeta}(\bar{b})$ valamely $\bar{b}\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta\zeta}$ függvényre, és $\bar{f}_{\eta\zeta}=f_{\eta\zeta}$. (Itt felhasználtuk a $\mathcal{H}^{(\beta)}_{f(\eta),f(\zeta)}=f_{\eta\zeta}$ " $\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta\zeta}$ egyenlőséget, ahol $\sigma\le\eta\le\zeta\le\theta_\alpha$. Ez pedig az 1.29.ii)f) Definícióból könnyen következik.) Vagyis $\xi<\theta_\alpha$. Ez esetben legyen $b=e\circ d$ valamely $e\in\mathcal{H}^{(\beta)}_{\theta_\alpha,\bar{f}(\zeta)}$, $d\in\mathcal{H}^{(\beta)}_{\xi,\theta_\alpha}$ függvényekre, hiszen $\eta=\sigma$, $f^{-}(\zeta)=\bar{f}(\zeta)$ és $e=f_{\eta\zeta}(c)=\bar{f}_{\eta\zeta}(c)$ valamely $c\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta\zeta}$ függvényre.

II.ESET : $\beta=\gamma+1>\alpha+1$. Legyen ekkor $f=g\circ h$, $g\in\mathcal{F}_{\gamma\beta}$, $h\in\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$. Tehát $\xi<\bar{f}(\zeta)=\bar{g}(\bar{h}(\zeta))$ és $\forall b\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\xi,\bar{f}(\zeta)}$. Az I.Eset felhasználásával $b=\bar{g}_{\eta',\zeta'}(b')\circ d'$ ahol $\eta'<\zeta'=\bar{h}(\zeta)$ és $b'\in\mathcal{H}^{(\gamma)}_{\eta',\zeta'}$, $d'\in\mathcal{H}^{(\beta)}_{\xi,g(\eta')}$. Az indukciós feltételt $\alpha<\gamma$, h , $\eta'<h(\zeta)=\zeta'$ és b' -re alkalmazva kapunk olyan $\eta<\zeta$ rendszámot és $c\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta,\zeta}$, $d''\in\mathcal{H}^{(\gamma)}_{\eta',h(\eta)}$ függvényeket, melyekre $b'=\bar{h}_{\eta,\zeta}(c)\circ d''$. Ekkor a 2.23.d3) Állítás miatt

$$b=\bar{g}_{\eta',\zeta'}(b')\circ d'=\bar{g}_{\eta',\zeta'}(\bar{h}_{\eta,\zeta}(c)\circ d'')\circ d'=\bar{f}(c)\circ(\bar{g}_{\eta',\zeta'}(d'')\circ d')$$

III.ESET : β limeszrendszám . Ekkor az 1.27.i)c) Állítás alapján van olyan γ , $g\in\mathcal{F}_{\gamma\beta}$, $h\in\mathcal{F}_{\alpha\gamma}$, $\eta'<\zeta'<\theta_\gamma$ és $b'\in\mathcal{H}^{(\gamma)}_{\eta',\zeta'}$ amelyekre $\alpha<\gamma<\beta$, $f=g\circ h$ és $b=g_{\eta',\zeta'}(b')$. Vegyük észre, hogy $\bar{f}(\zeta)=\bar{g}(\bar{h}(\zeta))$ és így $\zeta'=\bar{h}(\zeta)$. Az indukciós feltételt alkalmazva: $b'=\bar{h}_{\eta\zeta}(c)\circ d''$, $\eta<\zeta$, $c\in\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\eta,\zeta}$, $d''\in\mathcal{H}^{(\gamma)}_{\eta',h(\eta)}$. Ekkor $b=g(b')=g(\bar{h}_{\eta,\zeta}(c))\circ g(d'')=\bar{f}_{\eta\zeta}(c)\circ g(d'')$. Végül alkalmazzuk a fenti észrevételt, a 2.21. Állítást, és az $f^{\#}_{\zeta}=g(h^{\#}_{\zeta})$ egyenlőséget. □

2.26. ÁLLÍTÁS *Legyenek* $\alpha<\beta\le\Theta=\mathrm{ht}(\mathcal{N})$, $f\in\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ *és* $b\in\mathcal{H}^{(\beta)}_{\bar{f}(\Theta_\alpha),\Theta_\beta}$ *rögzítettek* ($\Theta_\alpha=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\alpha),\Theta_\beta=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\beta)$) . *Ekkor létezik olyan* $g\in\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ *beágyazás, amelyre* $\bar{g}(\Theta_\alpha)=\bar{f}(\Theta_\alpha)$ *de* $g^{\#}_{\Theta_\alpha}=b$.

BIZONYÍTÁS β -ra indukcióval. I.ESET: $\beta=\alpha+1$ – könnyű.

II.ESET : $\beta=\gamma+1$, $\gamma>\alpha$. Legyen $f=h\circ k$, $h\in\mathcal{H}_{\gamma\beta}$, $k\in\mathcal{H}_{\alpha\gamma}$. Ekkor $\bar{h}(\bar{k}(\Theta_\alpha))=\bar{f}(\Theta_\alpha)$.

(a) ALESET : $\bar{k}(\Theta_\alpha)=\Theta_\gamma$. Az I.Esetet alkalmazva kapunk egy

$h' \in \mathcal{H}_{\gamma\beta}$ függvényt, amelyre $\bar{h}'(\Theta_\gamma)=\bar{h}(\Theta_\gamma)=\bar{f}(\Theta_\alpha)$ és $(h')^{\#}_{\Theta_\gamma}=b$.
Most legyen $g=h'\circ k$, amiből $\bar{g}(\Theta_\alpha) = \bar{h}'(\bar{k}(\Theta_\alpha)) = \bar{h}'(\Theta_\gamma) = \bar{f}(\Theta_\alpha)$ következik, majd a 2.23.d2) Állítást alkalmazva:

$$g^{\#}_{\Theta_\alpha} = (h'\circ k)^{\#}_{\Theta_\alpha} = h'_{\bar{k}(\Theta_\alpha),\Theta_\gamma}(k^{\#}_{\Theta_\alpha}) \circ (h')^{\#}_{\Theta_\gamma} = id\circ b = b \quad .$$

Így tehát $\bar{k}(\Theta_\alpha)<\Theta_\gamma$. A továbbiakban legyen $\zeta:=\bar{k}(\Theta_\alpha)$.

(b) ALESET : $\zeta=\bar{k}(\Theta_\alpha)<\Theta_\gamma$ és $\bar{h}(\zeta)=\zeta$. Mivel $\zeta<\Theta_\gamma$, így legyen $b=c\circ d$, $c\in \mathcal{H}^{(\beta)}_{\Theta_\gamma\Theta_\beta}$, $d\in \mathcal{H}^{(\beta)}_{\zeta,\Theta_\gamma}$. Legyen $h' \in \mathcal{H}_{\gamma\beta}$ azon balra ágazó beágyazás, amelyre $(h')^{\#}_{\Theta_\gamma}=c$, valamint legyen $k' \in \mathcal{H}_{\alpha\gamma}$ amelyre $\bar{k}'(\Theta_\alpha)=\zeta$ és $(k')^{\#}_{\Theta_\gamma}=d$. Ha most $g=h'\circ k'$, akkor

$$\bar{g}(\Theta_\alpha) = \bar{h}'(\bar{k}'(\Theta_\alpha)) = \bar{h}'(\zeta) = \zeta = f(\Theta_\alpha)$$

és

$$g^{\#}_{\Theta_\alpha} = (h')^{\#}_{\Theta_\gamma} \circ h'_{\zeta,\Theta_\gamma}(k^{\#}_{\Theta_\alpha}) = c\circ d = b$$

(c) ALESET : $\zeta=\bar{k}(\Theta_\alpha)<\Theta_\gamma$ és $\zeta<\bar{h}(\zeta)$. Ekkor $h\in\mathcal{H}_{\gamma\beta}$ a jobbra ágazó beágyazás, σ hasadó ponttal és a $h^{*}\in\mathcal{H}^{(\beta)}_{\sigma,\Theta_\alpha}$ emelő függvénnyel, $\zeta>\sigma$ ($\mathcal{H}_{\gamma\beta}$ amalgám). Ekkor viszont $\bar{h}(\zeta)=h(\zeta)$, $\bar{h}(\Theta_\gamma)=\Theta_\beta$ és $h_{\zeta,\Theta_\gamma}(b')=b$ valamely $b'\in\mathcal{H}^{(\gamma)}_{\zeta,\Theta_\gamma}$ függvényre. Legyen $k'\in\mathcal{H}_{\alpha\gamma}$ olyan amelyre $(k')^{\#}_{\Theta_\alpha}=b'$, ekkor $g=h\circ k'$ megfelelő lesz.

III.ESET : β limeszrendszám. Legyen $f=h\circ k$, $h\in\mathcal{H}_{\gamma\beta}$, $k\in\mathcal{H}_{\alpha\gamma}$ és $b\in\mathrm{Range}(h)$ valamely $\alpha<\gamma<\beta$ rendszámra. Ekkor $\bar{h}(\bar{k}(\Theta_\alpha))=\bar{f}(\Theta_\alpha)$ és $b=h_{\zeta,\Theta_\gamma}(b')$ valamely $b'\in\mathcal{H}_{\zeta,\Theta_\gamma}$ függvényre ahol $\zeta=\bar{k}(\Theta_\alpha)$. Az indukciós feltételt γ -ra alkalmazva van olyan $k'\in\mathcal{H}_{\alpha\gamma}$ függvény, amelyre $(k')^{\#}_{\Theta_\alpha}=b'$. Ekkor $g=h\circ k'$ megfelelő. □

2.27. ÁLLÍTÁS *Legyenek* $\alpha<\beta$, $f\in\mathcal{H}_{\alpha\beta}$, $\zeta<\Theta_\alpha=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\alpha)$, $\zeta+\delta\le\Theta_\alpha$ *és* $f(\zeta+\delta')=f(\zeta)+\delta'$ *minden* $\delta'\le\delta$ *rendszámra. Ekkor*

$$f_{\zeta,\zeta+\delta'}\left[\mathrm{idd}_{\mathcal{N}_\zeta^{(\alpha)}\mathcal{N}_{\zeta+\delta'}^{(\alpha)}}\right]=\mathrm{idd}_{\mathcal{N}_\zeta^{(\alpha)}\mathcal{N}_{\zeta+\delta'}^{(\alpha)}}$$

sőt $f_{\zeta,\zeta+\delta'}:\mathcal{H}^{(\alpha)}_{\zeta,\zeta+\delta'}\longrightarrow\mathcal{H}^{(\beta)}_{f(\zeta),f(\zeta)+\delta'}$ *ráképezés (szürjekció)* *minden* $\delta'\le\delta$ *rendszámra.*

BIZONYÍTÁS β -ra és m -re történő indukcióval. □

Az alábbi állítások az 1-résű mocsarak hasonló tulajdonságainak általánosításai.

2.28. ÁLLÍTÁS **(a)** *Legyen* $\alpha<\beta$, $f\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ *és* $\zeta<\Theta_\alpha=\mathrm{ht}(\mathcal{M}_\alpha)$. *Ekkor van olyan* $g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ *beágyazás, amely* ζ *-ig megegyezik* f *-el, valamint* $g^-(\zeta+\delta)=\bar{f}(\zeta)+\delta$ *ha* $\zeta+\delta<\Theta_\alpha$.

(b) *Ha* $f\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, $\alpha<\beta\le\Theta=\mathrm{ht}(\mathcal{M})$, $\nu<\Theta_\alpha=\mathrm{ht}(\mathcal{M}_\alpha)$ *és* $f^-(\nu+\delta)=f(\nu)+\delta$ *ha* $\nu+\delta\le\Theta_\alpha$, *akkor minden* $\eta<\mu$ *rendszámra* $(\nu\le\eta<\mu<\Theta_\alpha)$
$(f_{\eta\mu})''\ \mathcal{F}^{(\alpha)}_{\eta\mu}=\mathcal{F}^{(\beta)}_{f(\eta),f(\mu)}$ *és* $f_{\eta\mu}(\mathrm{idd}_{\eta\mu})=\mathrm{idd}$

(c) $\mathrm{idd}_{\alpha\beta}\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ *ha* $\alpha<\beta\le\Theta=\mathrm{ht}(\mathcal{M})$

(d) *Legyenek* $f\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, $\alpha<\beta\le\Theta=\mathrm{ht}(\mathcal{M})$, $\bar{\nu}<\Theta_\alpha=\mathrm{ht}(\mathcal{M}_\alpha)$, $\nu=f^-(\bar{\nu})=\bar{f}(\bar{\nu})$, $\tau<\nu$, $b\in\mathcal{F}^{(\alpha)}_{\tau\nu}$. *Ekkor van olyan* $\bar{\eta}<\bar{\nu}$, $\tau<\eta=f^-(\bar{\eta})$ *és* $\bar{b}\in\mathcal{F}^{(\alpha)}_{\bar{\eta}\bar{\nu}}$ *amelyre* $b=c\circ f_{\bar{\eta}\bar{\nu}}(\bar{b})$.

BIZONYÍTÁS **(a)** ζ -ra indukcióval. Vegyük észre, hogy m+1 , a SMS résének mérete a bizonyításban nem lényeges, hiszen $sp^{(m)}(\mathcal{M})$ mindig 1-résű mocsár, és mostani állításunk kizárólag csak $sp^{(m)}(\mathcal{M})$ tulajdonságaival foglalkozik, amik a 2.4.Állítás szerint igazak.

(b) - (d) könnyen bizonyíthatóak β -ra vonatkozó indukcióval. □

2.29. ÁLLÍTÁS *Legyen* $\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\vec{\mathcal{F}}}\rangle$ $(\kappa,2)$ *-mocsár,* κ *tetszőleges reguláris számosság, valamint legyen* $s\in[\kappa^{++}]^{<\kappa}$ *és* $b_i\in\mathcal{F}^{(\kappa)}_{\beta,\kappa^+}$ *ahol* $\mathcal{M}_\kappa=\langle\vec{\mathcal{M}}^{(\kappa)},\vec{\vec{\mathcal{F}}}^{(\kappa)}\rangle$ *, ha* $i<\gamma$ *, ahol* $\gamma<\kappa$ *és* $\beta<\kappa^+$ *rögzítettek. Ekkor van olyan* $\alpha<\kappa$, $\bar{\beta}<\theta_\alpha$ *és* $f\in\mathcal{F}_{\beta\kappa}$ *, amelyre* $s\subset f_{\theta_\alpha}''\varphi_{\theta_\alpha}$ *és* $b_i\in(f_{\bar{\beta},\theta_\alpha})''\mathcal{F}^{(\alpha)}_{\bar{\beta},\theta_\alpha}$ $f^-(\bar{\beta})=\beta$ *minden* $i<\gamma$ *esetén.*

Hasonló állítást lehet megfogalmazni nagyobb résű mocsarakra is, bizonyításuk a 2.6. és a jelen Állítás bizonyításához hasonló, de ezzel most nem foglalkozunk.

BIZONYÍTÁS Itt felhasználjuk [Ve10] részleteit is.
Az egyszerűbb jelölések érdekében legyen $\mathcal{M}^{(\kappa)}=\langle\vec{\varphi},\vec{\vec{\mathcal{G}}}\rangle$, azaz $b_i\in\mathcal{G}_{\beta,\kappa^+}$
Válasszunk először olyan $\delta<\kappa^+$, β -nál nagyobb rendszámot, amelyre $b_i=b\circ b'_i$ ahol $b'_i\in\mathcal{G}_{\beta\delta}$ $(i<\gamma)$, $b\in\mathcal{G}_{\delta\kappa^+}$, sőt $s\subseteq\mathrm{Range}(b)$, mondjuk $s=b''\bar{s}$ ahol $\bar{s}=\{\bar{s}_i : i<\gamma\}\subset\varphi_\delta$. Legyenek továbbá $\alpha<\kappa$, $f\in\mathcal{F}_{\alpha\kappa}$ és $\bar{\beta},\bar{\delta}\in ht(\mathcal{M}_\alpha)$ olyanok, hogy $\beta=f^-(\bar{\beta})$ és $\delta=f^-(\bar{\delta})$, sőt $b'_i\in\mathrm{Range}(f_{\bar{\beta}\bar{\delta}})$ $(i<\gamma)$, $b\in\mathrm{Range}(f_{\bar{\delta}\theta_\alpha})$ ha $\theta_\alpha=ht(\mathcal{M}_\alpha)$, és $\bar{s}\subseteq\mathrm{Range}(f_{\bar{\delta}})$. (Ez $cof(\kappa)>\gamma$ és $\mathcal{F}_{ik}=\mathcal{F}_{jk}\circ\mathcal{F}_{ij}$ ha $i<j<k\le\kappa$, valamint a 2.24. Állítás miatt nyilvánvaló.) Legyen például $b'_i=f_{\bar{\beta}\bar{\delta}}(\bar{b}_i)$ $(i<\gamma)$, $b=f_{\bar{\delta}\theta_\alpha}(\bar{b})$ és $\bar{s}=f_{\bar{\delta}}''s^+$. Ekkor $f_{\bar{\beta}\theta_\alpha}(\bar{b}\circ\bar{b}_i)=b\circ b'_i=b_i$ ha $i<\gamma$, valamint

$$(f_{\theta_\alpha})''(\bar{b}''s^+) = (f_{\bar{\delta}\theta_\alpha}(\bar{b}))''(f_{\bar{\delta}}''s^+) = b''\bar{s} = s$$

vagyis $s\subset\mathrm{Range}(f_{\theta_\alpha})$, vagyis f megfelelő. $\square$

Az alábbi állítás nagyobbrésű mocsarak közötti beágyazások kiterjeszthetőségéről szól, [Ve8,L.1.1] általánosítása. Segítségével válik lehetővé m-résű mocsarakból (m+1)-résű mocsarak amalgámjának készítése, és kulcsszerepet játszik általános m-résű mocsarak konzisztencia - létezésének bizonyításában is. Ennek m=2 speciális esetét látjuk [Ve8] -ben .

2.30. TÉTEL *Legyen* $m<\omega_o$ *rögzített, és legyenek* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *és* $\mathcal{E}$ *(m+1)- ill. m-résű SMS -ek, és legyen* $E:\mathcal{M}_o\to\mathcal{E}$ *adott beágyazás.*

Ekkor egyértelműen létezik olyan $\mathcal{N}=\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ *(m+1)-résű SMS és* $F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ *beágyazás, amelyekre* $\mathcal{N}_o=\mathcal{E}$, $ht(\mathcal{N})=ht(\mathcal{M})=\theta$, $F_o=E$ *és* $F^-=id\restriction ht(\mathcal{M})$, $(F=\langle F^-,\vec{F},\vec{\bar{F}}\rangle)$.

Továbbá, ha $\left[E_{\sigma_o,\theta_o}\right]''\,\mathcal{F}_{\sigma_o,\theta_o}=\mathcal{H}_{E(\sigma_o),\Xi_o}$, *ahol* $\theta_o=ht(\mathcal{M}_o)$, $\Xi_o=ht(\mathcal{N}_o)$ *és* $\mathcal{F}_{o,1}$ *hasadási pontja* σ_o , *akkor minden* $i<j\le\theta$ *esetén* $F_{ij}''\mathcal{F}_{ij}=\mathcal{G}_{F^-(i)F^-(j)}$.

BIZONYÍTÁS $m\ge1$ [Ve8,L.1.1] eredménye alapján feltehető. Legyen $\theta=ht(\mathcal{M})$, $\Xi_o=ht(\mathcal{E})$ és $\theta_\xi=ht(\mathcal{M}_\xi)$ midőn $\xi\le\theta$, továbbá legyen $\vec{\mathcal{H}}:=\{f^-:f\in\mathcal{F}_{\xi\zeta},\xi<\zeta\le\theta\}$. Mivel $\langle\vec{\theta},\vec{\mathcal{H}}\rangle$ egy θ-magas 1-résű, és Ξ_o 0-résű SMS, így Velleman fenti eredményét E^--re alkalmazva kapjuk a $\langle\vec{\Xi},\vec{\mathcal{J}}\rangle$ 1-résű mocsarat és a $G:\langle\vec{\theta},\vec{\mathcal{H}}\rangle\to\langle\vec{\Xi},\vec{\mathcal{J}}\rangle$ beágyazást, amelyekre $ht(\vec{\Xi})=ht(\vec{\theta})=\theta$, $G^-=id\restriction\theta$ és $\mathcal{J}_{\xi\zeta}=G_{\xi\zeta}''\mathcal{H}_{\xi\zeta}$ ha $\xi<\zeta\le\theta$.

Legyen most $\xi\le\theta$ rögzített. Definiálnunk kell $\mathcal{N}_\xi$ -t, F_ξ -t és $F_{\zeta\xi}$ -t ha $\zeta<\xi$. Nyilván $ht(\mathcal{N}_\xi)=\Xi_\xi$. [Ve8] -hoz hasonlóan $\mathcal{N}_\xi$ -t $ing(\mathcal{E})\times\cup\{\mathcal{F}_{\zeta\xi}:\zeta<\xi\}$ ekvivalenciaosztályaiként szeretnénk definiálni. De ez már $\xi=1$ esetén sem működik! Hiszen az 1.27. Definícióban csak limeszrendszámra követelhetjük meg az $\mathcal{M}_i=\{f''\mathcal{M}_j : f\in\mathcal{F}_{ji}\}$ egyenlőséget, mert ha például $\mathcal{F}:\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{R}}\rangle\to\langle\vec{\mathcal{N}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ amalgám σ hasadási ponttal , akkor $\mathcal{G}_{\sigma\theta}$ biztosan *valódi* részhalmaza az $\cup\{f''\mathcal{H}_{\alpha\beta}: f\in\mathcal{F}, f^{-}(\alpha)=\sigma, f^{-}(\beta)=\theta, \alpha\le\beta\le\theta\}$ halmaznak, ahol $\theta=\mathrm{ht}(\mathcal{N})$. Azonban a fenti "konstrukció" ξ limeszrendszámra véghezvihető, $\xi=\zeta+1$ esetén pedig $\mathcal{N}_\xi$ -t , F_ξ -t, és $F_{\zeta\xi}$ -t ténylegesen meg tudjuk konstruálni.

A bizonyítás, és az újabb fogalmak bevezetése m-re (és ξ-re) vonatkozó indukcióval történik.

2.31. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\mathcal{M}$ *m-résű SMS,* $m<\omega_0$ *, és* $m\ge1$ *esetén* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *. Ekkor* $\mathbf{sk}_0(\mathcal{M}):=\mathcal{M}$ *ha* $m=0$ *, valamint* $\mathbf{sk}_0(\mathcal{M}):=\mathrm{ht}(\mathcal{M})$ *és* $\mathbf{sk}_{j+1}(\mathcal{M}):=\langle \mathrm{sk}_j(\mathcal{M}_\xi):\xi\le\mathrm{ht}(\mathcal{M})\rangle$ *ha* $j<m$ $\mathcal{M}$ **vázai** *(skeleton)* □

Nyilvánvalóan $f^{+}(\langle\sigma_0,\dots,\sigma_j\rangle)=\langle f^{+}(\sigma_0),\dots,f^{+}(\sigma_j)\rangle$ bármilyen $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ beágyazásra és $\vec{\sigma}\in\mathcal{S}_j(\mathcal{M})$ $(j\le m)$ sorozatra.

Most megkeressük az $\mathcal{M}$ -ben elrejtett kisebb résű SMS -ket:

2.32. DEFINÍCIÓ *Legyen* $m<\omega_0$ *,* $\mathcal{M}$ *m-résű SMS,* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *ha* $m\ge1$.

(i) $\mathbf{fund}_0(\mathcal{M}):=\mathrm{ht}(\mathcal{M})$, *és* $m\ge1$, $j<m$ *esetén*

$$\mathbf{fund}_{j+1}(\mathcal{M}) := (\langle \mathrm{fund}_j(\mathcal{M}_\xi):\xi<\mathrm{ht}(\mathcal{M})\rangle, \langle \mathrm{fund}_j(f): f\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}, \zeta<\xi\le\mathrm{ht}(\mathcal{M})\rangle)$$

$\mathcal{M}$ **alapjai** *(fundaments)*

(ii) *Ha* $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ *beágyazás,* $\mathcal{N}$ *m-résű SMS, akkor legyen* $\mathbf{fund}_0(\mathbf{f}):=f^{-}$ *és* $j<m$ *esetén* $\mathbf{fund}_{j+1}(\mathcal{M})=\langle g,\vec{g},\vec{\vec{g}}\rangle:\mathrm{fund}_{j+1}(\mathcal{M})\to\mathrm{fund}_{j+1}(\mathcal{N})$ *ahol* $g=f^{-}$ *és* $g_\alpha=\mathrm{fund}_j(f_\alpha)$ *és* $g_{\alpha\beta}(\mathrm{fund}_j(b))=\mathrm{fund}_j(f_{\alpha\beta}(b))$ *minden* $\alpha\le\beta\le\mathrm{ht}(\mathcal{M})$ *indexre és* $b\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ *függvényre.* □

Vegyük észre, hogy $\mathrm{fund}_j(\mathcal{M})$ minden $j\le m$ indexre j-résű SMS, sőt $\mathrm{fund}_m(\mathcal{M})=\mathcal{M}$.

2.33. DEFINÍCIÓ *Legyen* m *és* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *mint eddig,* $b\in ing(\mathcal{M})$.

(i) $\mathbf{cord}^{\mathcal{M}}(\mathbf{b}):=\emptyset$ *ha* $b\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$, $\zeta<\xi<ht(\mathcal{M})$, *és* $b\in ing(\mathcal{M}_\xi)$, $\xi\le ht(\mathcal{M})$ *esetén* $\mathbf{cord}^{\mathcal{M}}(\mathbf{b}):=\xi^\frown cord^{\mathcal{M}_\xi}(b)$, **b koordinátái**

(ii) $\mathbf{Cord}^t(\mathcal{M})$:= $ing(\mathcal{M})$ *elemeinek koordinátái közül a* t *hosszúságúak halmaza*

(iii) $\mathbf{low}^{\mathcal{M}}(\mathbf{b}):=\zeta$ *és* $\mathbf{up}^{\mathcal{M}}(\mathbf{b}):=\xi$ *ha* $b\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$, $\zeta<\xi\le ht(\mathcal{M})$, *továbbá* $\mathbf{low}^{\mathcal{M}}(\mathbf{b}):=low^{\mathcal{M}_\xi}(b)$ *és* $\mathbf{up}^{\mathcal{M}}(\mathbf{b}):=up^{\mathcal{M}_\xi}(b)$ *ha* $b\in ing(\mathcal{M}_\xi)$, $\xi\le ht(\mathcal{M})$

(iv) $\mathbf{Ecord}(\mathcal{M}):=ht(\mathcal{M})$ *ha* m=0 , *és nagyobb* m *esetén*

$$\mathbf{Ecord}(\mathcal{M}) := ht(\mathcal{M})\cup\{\xi^\frown\vec{c}:\vec{c}\in Ecord(\mathcal{M}_\xi),\xi\le ht(\mathcal{M})\}$$

$\mathcal{M}$ **kiterjesztett koordinátái** *(extended coordinates) halmaza* . $\mathbf{Ecord}_t(\mathcal{M})$ *a* t *hosszúságú kiterjesztett koordináták halmaza, ha* $t\le m+1$.

(v) $\mathcal{M}(\emptyset):=\mathcal{M}$ *és* $\vec{c}=c_o{}^\frown\vec{d}\in Ecord(\mathcal{M})$ *esetén* $\mathcal{M}(\vec{c}):=\mathcal{M}_{c_o}(\vec{d})$ $\mathcal{M}$ $\vec{c}$**- dik belső mocsara** . □

(Ha $\mathcal{M}$ 0-résű SMS, akkor néha célszerű $\mathcal{M}$-et $\langle\vec{\mathcal{M}}\rangle$ alakban írni, ahol $\mathcal{M}_\xi=\xi$ ha $\xi\le ht(\mathcal{M})$.)

$Ecord_j(\mathcal{M})$ és $sk_j(\mathcal{M})$ elemei között könnyen találhatunk egy természetes megfeleltetést. Továbbá, ha $\vec{c}=cord^{\mathcal{M}}(b)$, akkor $cord(f^+(b))=\langle f^+(c_o),\dots,f^+(c_k)\rangle$, ráadásul $low^{\mathcal{M}}(f^+(b))=f^+(low^{\mathcal{M}}(b))$ és $up^{\mathcal{M}}(f^+(b))=f^+(up^{\mathcal{M}}(b))$. Ezenkívül jelöléseink miatt találhatók olyan $b_o,b_1\in ing(\mathcal{M})$ függvények, amelyek tulajdonképpen *azonosak* , de különböző koordinátákat rendeltünk hozzájuk, vagyis őket külön - böző objektumokként tartjuk nyilván (mert minden mocsár kisebb résű SMS-ek olyan sorozata, melyek egymás kezdőszeletei). Végül, $\mathcal{M}(\vec{c})$ mindig egy $|\vec{c}|$-résű SMS, ahol $|\vec{c}|$ a $\vec{c}$ sorozat hosszát jelöli.

2.34. DEFINÍCIÓ *Tetszőleges* $H:On\hookrightarrow On$ *függvényre és* ζ *rendszámra legyen* $\nu_H(\zeta):=\{\xi\in Dom(H):H(\xi)\le\zeta\}$ □

A továbbiakban az $\mathcal{M}$ felső indexet, ha félreértést nem okoz, elhagyjuk az $up^{\mathcal{M}}$, $cord^{\mathcal{M}}$, $low^{\mathcal{M}}$, $stb^{\mathcal{M}}$ kifejezésekben.

Most pedig folytatjuk a 3.30. Tétel bizonyítását.

ξ LIMESZRENDSZÁM

Tehát $\mathcal{N}_\xi$ -t kell megkonstruálnunk. A ξ-re és m-re vonatkozó indukciós feltételt felhasználva $\mathcal{N}_{\zeta_1}$, F_{ζ_o} és $F_{\zeta_o\zeta_1}$ már rendelkezésünkre áll minden $\zeta_o<\zeta_1<\xi$ indexre, sőt még $sk_j(\mathcal{N}_\xi)$, $(F_{\zeta\xi}(h))^+\restriction$ $\restriction ing(sk_{m-1}(\mathcal{N}_\zeta))$ és $fund_j(F\restriction(\xi+1))$ is, ha $j<m$, $h\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$, $\zeta<\xi$.

Először $\mathcal{N}_\xi(\vec{c})$ -t olyan $\vec{c}$ sorozatokra konstruáljuk meg, melyek $Ecord_m(\mathcal{N}_\xi) = Ecord_m(sk_m(\mathcal{N}_\xi))$ elemei. (Vegyük észre, hogy $\mathcal{N}_\xi(\vec{c})$ ilyenkor egyszerűen csak egy rendszám, egy 0-résű SMS, mert m>0 .) A konstrukció első lépése az alábbi állítás, mely a 2.24. Állítás következménye:

2.35. ÁLLÍTÁS *Legyen* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *m-résű SMS*, $\alpha<\beta$, $\beta+1<ht(\mathcal{M})$, $f,g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, $\zeta<ht(\mathcal{M}_\alpha)$ *és* $f^-(\zeta)=g^-(\zeta)$. *Ekkor* $f_\zeta=g_\zeta$ *és* $f_{\gamma\delta}=g_{\gamma\delta}$ *ha* $\gamma<\delta\le\zeta$. □

Legyen most $L_m^{(\xi)} := \cup\ \{\ Ecord_{m+1}(\mathcal{N}_\zeta)\times\mathcal{F}_{\zeta\xi}\ :\ \zeta<\xi\ \}$, és definiáljuk az $\approx^\xi$ ekvivalencia relációt az $L_m^{(\xi)}$ halmazon az alábbiak szerint: legyen

$$(\vec{c}^\frown\tau^\frown f) \approx^{(\xi)} (\vec{d}^\frown\rho^\frown g)$$

def

<=>

vagy $\mathrm{low}(f)=\mathrm{low}(g)=\bar{\ell}$ & $\vec{c}^\frown\tau=\vec{d}^\frown\rho$ & $f^-\restriction\nu_{F_{\bar{\ell}}}(c_o)=g^-\restriction\nu_{F_{\bar{\ell}}}(c_o)$

vagy $\mathrm{low}(f)<\mathrm{low}(g)$, $f=\bar{f}\circ h$, $h\in\mathcal{F}_{\mathrm{low}(f),\mathrm{low}(g)}$ &

& $\mathcal{N}_{\mathrm{low}(g)}(\vec{d}^\frown\rho) = (F(h))^+(\mathcal{N}_{\mathrm{low}(f)}(\vec{c}^\frown\tau))$ &

& $(\bar{f})^-\restriction\nu_{F_{\mathrm{low}(g)}}(d_o) = g^-\restriction\nu_{F_{\mathrm{low}(g)}}(d_o)$ □

Könnyen látható, hogy m=0 esetben ez Velleman konstrukcióját adja. Továbbá a $\vec{c}^\frown\tau=\vec{d}^\frown\rho$ feltétel helyett a vele ekvivalens $\mathcal{N}_{\bar{\ell}}(\vec{c}^\frown\tau)=\mathcal{N}_{\bar{\ell}}(\vec{d}^\frown\rho)$ is írható.

Először azt kell ellenőriznünk, hogy $\approx^{(\xi)}$ valóban ekvivalencia reláció.

Az alábbi állítás kimondásához idézzük fel a 2.30.Tétel m=0 speciális esetének bizonyításában használt fogalmakat (ld.pl. [Ve8, Lemma 1.1]) Legyen $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\vec{\mathcal{G}}}\rangle$ 1-résű SMS , φ' tetszőleges rendszám, $F:\varphi_o\to\varphi$ monoton növő függvény. Legyen továbbá $\mathcal{M}'=\langle\vec{\varphi}',\vec{\vec{\mathcal{G}}}'\rangle$ 1-résű SMS és $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ beágyazás amelyekre $\mathrm{ht}(\mathcal{M}')=\mathrm{ht}(\mathcal{M})=\theta$, $\varphi_o'=\varphi_o$, $f_o=F$, $(f=\langle f^-,\vec{f},\vec{\vec{f}}\rangle)$, $f^-=\mathrm{id}\restriction(\theta+1)$ és minden $i<j\leq\theta$ esetén $f_{ij}''\mathcal{G}_{ij} = \mathcal{G}'_{f^-(i)f^-(j)}$ .Legyen továbbá $\approx_\zeta$ a következő (ekvivalencia) reláció a $\mathcal{G}_{0\zeta}\times\varphi'$ halmazon: legyen $\langle b_1\tau_1\rangle\approx_\zeta\langle b_2\tau_2\rangle$ pontosan akkor, ha $\tau_1=\tau_2$ és $b_1\restriction\nu(\tau_1)=b_2\restriction\nu(\tau_2)$ ahol $\nu(\tau):=\{\nu<\varphi_o:F(\nu)\leq\tau\}$ ha $\tau\in\varphi'$.

2.36. ÁLLÍTÁS *Ha* $\tau\in\varphi_o'$, $a\in\mathcal{G}_{o\zeta}$, $\zeta\leq\xi$, *akkor*

$$\nu_{f_\zeta}([\langle a,\tau\rangle]_{\approx_\zeta}) = \mathrm{ssup}(a''(\nu_{f_o}(\tau)))$$

BIZONYÍTÁS $\geq$ könnyen belátható, hiszen $\langle a,\tau\rangle=f_{o,\zeta}(a)(\tau)$.

Továbbá tudjuk, hogy tetszőleges $x=y(\bar{x})\in\varphi_\zeta$ $(\bar{x}\in\varphi_o, y\in\mathcal{G}_{o,\zeta})$ esetén

$$x=y(\bar{x}) \le \nu_{f_\zeta}([<a,\tau>]_\approx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f_\zeta(x)=f_\zeta(y(\bar{x})) = [<f_o(\bar{x}),y>]_\approx \le [<a,\tau>]_\approx$$

$$\Leftrightarrow \quad y''(\bar{x}+1)=y(\bar{x}) \le \mathrm{ssup}(a''(\nu_{f_o}(\tau)))$$

$(\approx=\approx_\zeta)$, mivel $\nu_{f_o}(f_o(\bar{x})) = \bar{x}+1$. □

2.37. ÁLLÍTÁS $\approx^{(\xi)}$ *ekvivalencia reláció .*

BIZONYÍTÁS Legyenek $(\vec{c}\hat{}\tau\hat{}f)$, $(\vec{d}\hat{}\rho\hat{}g)$, $(\vec{e}\hat{}\sigma\hat{}k) \in L_m^{(\xi)}$, amelyekre $(\vec{c}\hat{}\tau\hat{}f) \approx^{(\xi)} (\vec{d}\hat{}\rho\hat{}g)$ és $(\vec{c}\hat{}\tau\hat{}f) \approx^{(\xi)} (\vec{e}\hat{}\sigma\hat{}k)$. Azt kell megmutatnunk, hogy $(\vec{d}\hat{}\rho\hat{}g) \approx^{(\xi)} (\vec{e}\hat{}\sigma\hat{}k)$.

Ha pl. $c_o+1=ht(\mathcal{N}_{low(f)})$ akkor persze $d_o+1=ht(\mathcal{N}_{low(g)})$ és $e_o+1=ht(\mathcal{N}_{low(k)})$. Most $\approx^{(\xi)}$ definíciója miatt, ha low(f)<low(g)<<low(k) , akkor $g=\bar{g}\circ h_1$, $f=\bar{\bar{f}}\circ h'_1\circ h_2$ valamely $h_2\in\mathcal{F}_{low(f),low(g)}$, $h'_1, h_1\in\mathcal{F}_{low(g),low(k)}$ és $\bar{g},\bar{\bar{f}}\in\mathcal{F}_{low(k),\xi}$ függvényekre, de ekkor $h'_1=h_1$ és $\bar{g}=\bar{\bar{f}}=k$.

Tehát feltehetjük, hogy $c_o+1<ht(\mathcal{N}_{low(f)})$, $d_o+1<ht(\mathcal{N}_{low(g)})$ és $e_o+1<ht(\mathcal{N}_{low(k)})$.

1.ESET: low(g)≤low(f)≤low(k) . Az $(F(h_1\circ h_2))^+=(F(h_1))^+\circ(F(h_2))^+$ egyenlőség minden $h_1\in\mathcal{F}_{\alpha\xi}$, $h_2\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}$ $(\beta\le\alpha\le\xi)$ függvényre teljesül, és ez alapján kapjuk:

$$(*) \qquad \mathcal{N}_{low(k)}(\vec{e}\hat{}\sigma) = (F(h_1\circ h_2))^+(\mathcal{N}_{low(g)}(\vec{d}\hat{}\rho))$$

ahol $g=\bar{\bar{g}}\circ h_1\circ h_2$, $f=\bar{f}\circ h'_1$ valamely $h_2\in\mathcal{F}_{low(g),low(f)}$, $h'_1,h_1\in$ $\in\mathcal{F}_{low(f),low(k)}$ és $\bar{\bar{g}},\bar{f}\in\mathcal{F}_{low(k),\xi}$ függvényekre. Hiszen $c_o=(F(h_2))^+(d_o)$ és ekkor a 2.35. és 2.36. Állítások alapján $(h_1)^-\restriction\nu(c_o)=(h'_1)^-\restriction\nu(c_o)$ így $F(h_1)$ és $F(h'_1)$ c_o-ig megegyezik, és ebből (*) következik.

A 2.35. Állítás újbóli alkalmazásával kapjuk: $(\bar{\bar{g}})^-\restriction\nu(e_o)=k^-\restriction\nu(e_o)$.

2. ESET : $low(f)<low(g)$ és $low(f)<low(k)$. Legyen például $low(f)<low(g)\le low(k)$. Ekkor ismét $g=\bar{g}\circ h_1'$, $f=\bar{\bar{f}}\circ h_1\circ h_2$ valamely $h_2\in\mathcal{F}_{low(f),low(g)}$, $h_1',h_1\in\mathcal{F}_{low(f),low(k)}$ és $\bar{g},\bar{\bar{f}}\in\mathcal{F}_{low(k),\xi}$ függvényekre. A 2.36. Állítás és a $(h_1)^{-}\restriction\nu(d_o)=(h_1')^{-}\restriction\nu(d_o)$ egyenlőség alapján ismét kapjuk, hogy $F(h_1)$ és $F(h_1')$ d_o-ig megegyezik, és így $\mathcal{N}_{low(k)}(\vec{e}\hat{\ }\sigma) = (F(h_1))^{+}(\mathcal{N}_{low(g)}(\vec{d}\hat{\ }\rho)) = =(F(h_1'))^{+}(\mathcal{N}_{low(g)}(\vec{d}\hat{\ }\rho))$. Ismét a 2.35. Állítás újbóli alkalmazásával kapjuk, hogy $(\bar{g})^{-}\restriction\nu(e_o)=k^{-}\restriction\nu(e_o)$. □

Most már képesek vagyunk $\mathcal{N}_\xi$ vázát felépíteni. Legyen $\vec{\varepsilon}\in Ecord_m(\mathcal{N}_\xi)$ esetén

$$L^{(\xi)}(\vec{\varepsilon}) := \{ (\vec{c}\hat{\ }\tau\hat{\ }f)\in L_m^{(\xi)} : (F^{+}(f))^{+}(\vec{c})=\vec{\varepsilon} \}$$

és definiáljuk a $\le^{(\xi)}$ rendezést a fenti halmazon mint :

$$(\vec{c}_1\hat{\ }\tau_1\hat{\ }f_1) \le^{(\xi)} (\vec{c}_2\hat{\ }\tau_2\hat{\ }f_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \vec{c}_1=\vec{c}_2 \ \&\ \tau_1\le\tau_2$$

Könnyen belátható, hogy $\langle L^{(\xi)}(\vec{\varepsilon}),\le^{(\xi)}\rangle$ jólrendezett, így $\mathcal{N}_\xi(\vec{\varepsilon})$ -t definiálhatjuk e jólrendezett halmaz rendtípusaként. Természetesen $(F_{\zeta\xi}(f))^{+}(\vec{c}\hat{\ }\tau)$ nem más, mint az $[(\vec{c}\hat{\ }\tau\hat{\ }f)]_{\approx^{(\xi)}}$ ekvivalencia-osztály, ha $f\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$, $(\vec{c}\hat{\ }\tau)\in Ecord_{m+1}(\mathcal{N}_\zeta)$, $\zeta<\xi$.

Már csak az alábbiakat kell definiálnunk:

(a) $ing(\mathcal{N}_\xi)$ azon p elemeit, amelyekre $|cord^{\mathcal{N}_\xi}(p)|=m-1$

(b) $b^{+}(p)$ ha $p\in ing(\mathcal{N}_\xi)$, $|cord^{\mathcal{N}_\xi}(b)|=m-2$, $p\in Dom(b^{+})$

(c) $F_\xi^{+}(q)$ ha $q\in ing(\mathcal{M}_\xi)$, $|cord^{\mathcal{M}_\xi}(p)|=m-1$

(d) $(F_{\zeta\xi}(h))^{+}(r)$ ha $r\in ing(\mathcal{N}_\zeta)$, $|cord^{\mathcal{N}_\zeta}(p)|=m-1$, $h\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$

A fentiek definiálásához vegyük észre, hogy p tulajdonképpen a 0-résű $\mathcal{N}_\xi(\mathrm{cord}^{\mathcal{N}_\xi}(p)\hat{}\,\mathrm{low}^{\mathcal{N}_\xi}(p))$ és $\mathcal{N}_\xi(\mathrm{cord}^{\mathcal{N}_\xi}(p)\hat{}\,\mathrm{up}^{\mathcal{N}_\xi}(p))$ SMS -k között egy beágyazás, és hasonló állítás igaz q és r -re is. A pontosabb hivatkozások érdekében bevezetünk néhány újabb jelölést:

2.38. DEFINÍCIÓ (i) *Tetszőleges* $\mathcal{M}$ *m-résű SMS* ($1\le m<\omega_o$) *és esetén* $\langle\vec{\varphi}^{\mathcal{M}(\vec{x})},\vec{\mathcal{G}}^{\mathcal{M}(\vec{x})}\rangle:=\mathcal{M}(\vec{x})$

(ii) *Ha* $\vec{x}\in\mathrm{Ecord}_{m-1}(\mathcal{N}_\xi)$, $y<z<\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\xi(\vec{x}))$, *akkor legyen*

$$\mathcal{P}(\vec{x},y,z) := \Big\{ \langle r,f\rangle : (F(f))^+(\mathrm{cord}^{\mathcal{N}_\zeta}(r))=\vec{x},\ (F(f))^+(\mathrm{low}^{\mathcal{N}_\zeta}(r))=y,\ (F(f))^+(\mathrm{up}^{\mathcal{N}_\zeta}(r))=z,\ r\in\mathrm{ing}(\mathcal{N}_\zeta),\ f\in\mathcal{F}_{\zeta\xi},\ \zeta<\xi \Big\}$$

(iii) *Tetszőleges* $\langle r,f\rangle\in\mathcal{P}(\vec{x},y,z)$ *esetén legyen* $\prod_f(r)$ *a következő függvény:*

$$\mathrm{Dom}(\Pi_f(r)) := (F(f)^+)''\left[\varphi_{\mathrm{low}(r)}^{\mathcal{N}_\zeta(\vec{x}')}\right] \subseteq \varphi_y^{\mathcal{N}_\xi(\vec{x})}$$

és

$$(\Pi_f(r)) := (F(f)^+)''\left[\varphi_{\mathrm{low}(r)}^{\mathcal{N}_\zeta(\vec{x}')}\right] \subseteq \varphi_y^{\mathcal{N}_\xi(\vec{x})}$$

és

$$(\Pi_f(r))\circ(F(f)^+) = (F(f)^+)\circ r$$

ahol $\vec{x}'=\mathrm{cord}^{\mathcal{N}_\zeta}(r)$, $\zeta=\mathrm{low}(f)$.

(iv) *Legyenek* $\vec{x},y,z$ *rögzítettek,* $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\vec{x},y,z)$. *Definiáljuk a* $\approx^{\mathcal{P}}\subseteq\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ *ekvivalenciarelációt: legyen* $\langle r_1,f_1\rangle\approx^{\mathcal{P}}\langle r_2,f_2\rangle$ *ha*

vagy $\mathrm{low}(f_1)=\mathrm{low}(f_2)$ & $r_1=r_2$

vagy $\mathrm{low}(f_1)<\mathrm{low}(f_2)$ & $\Pi(r_1)\subseteq\Pi(r_2)$

(v) *Ha* $\pi\in\approx^{\mathcal{P}}$ *egy tetszőleges ekvivalenciaosztály, akkor legyen*

$$\prod(\pi):=\cup\{\Pi_f(r):\langle r,f\rangle\in\pi\}$$

□

Például $\varphi_\tau^{\mathcal{M}(\vec{x})}=\mathcal{M}(\vec{x}\hat{}\tau)$. Az is könnyen belátható. hogy $\approx^{\mathcal{P}}$ valóban ekvivalenciareláció. Az egyszerűsített mocsarak és $\approx^{\mathcal{P}}$

tulajdonságait felhasználva könnyen ellenőrizhetjük, hogy

$\Pi(\pi) : \varphi_y^{\mathcal{N}_\xi(\vec{x})} \to \varphi_z^{\mathcal{N}_\xi(\vec{x})}$ függvény . Most, ha

$$\mathcal{G}_{y,z}^{\mathcal{N}_\xi(\vec{x})} := \{\, \Pi(\pi) : \pi\subseteq\mathcal{P}\times\mathcal{P} \text{ ekvivalenciareláció },\ \mathcal{P}=\mathcal{P}(\vec{x},y,z) \,\}$$

akkor $\langle \vec{\varphi}^{\mathcal{N}(\vec{x})}, \vec{\mathcal{G}}^{\mathcal{N}(\vec{x})} \rangle$ egy 0-résű SMS ($\mathcal{N}_\xi=\mathcal{N}$) . Ez bizonyítja (a) -t. Továbbá, a következő definíció is értelmes: $F_{\zeta\xi}(h)^+ := \Pi([\langle r,h\rangle]_\approx^{P})$ ha $r\in ing(\mathcal{N}_\zeta)$, $|cord^{\mathcal{N}_\zeta}(p)|=m-1$, $h\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$, ami bizonyítja (d) -t . Ha pedig $b\in ing(\mathcal{N}_\xi)$, $|cord^{\mathcal{N}_\xi}(b)|=m-2$, $p=[\langle r,h\rangle]_\approx^{P} \in Dom(b^+)$,akkor legyen $\zeta<\xi$, $low(f)\le\zeta$ és $g\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$, $b',r'\in ing(\mathcal{N}_\zeta)$ olyanok, amelyekre $\langle r',g\rangle \approx^{\mathcal{P}} \langle r,f\rangle$, $r'\in Dom((b')^+)$, és legyen $b^+(r):=(F_{\zeta\xi}(h))^+((b')^+(r'))$ ami bizonyítja (b) -t. Végül, ha $q\in ing(\mathcal{M}_\xi)$ és $|cord^{\mathcal{M}_\xi}(p)|=m-1$, akkor legyenek $\zeta<\xi$, $f\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$ és $\bar{q}\in ing(\mathcal{M}_\zeta)$ olyanok, amelyekre $q=f^+(\bar{q})$, és legyen $F_\xi^+(q):=(F_{\zeta\xi}(f))^+\circ F_\zeta^+(\bar{q})$, ami bizonyítja (c) -t.

Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy a konstrukció működik.

$\xi=\zeta+1$ RÁKÖVETKEZŐ RENDSZÁM

Most ténylegesen megkonstruáljuk $\mathcal{N}_\xi$ -t. Mivel a technikai részletek nyilvánvalóak, ezért csak vázoljuk a bizonyítást.

Az m=0 eset bizonyítása megtalálható [Ve8] -ban.

Tehát m>0 . $\mathcal{G}_{\zeta,\zeta+1}$ nyilvánvalóan amalgám, hasadási pontja $F_\zeta^-(\sigma_\zeta)$ ahol σ_ζ $\mathcal{F}_{\zeta,\zeta+1}$ hasadási pontja.

(I) A 2.30. Tételt m-1 -re alkalmazva $\mathcal{N}_\xi$ -t könnyen definiálhatjuk: legyen $\mathcal{G}_{\zeta,\zeta+1}$ emelő függvénye $F_\zeta^+(b)$ ahol $b\in\mathcal{F}_{\zeta,\zeta+1}$ is emelő függvény. Hogy egy kicsit precízebbek legyünk, 2.30. -ban

$\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$ és E helyére írjuk az

$$(\langle \mathcal{N}^{\zeta}_{F^{-}_{\zeta}(\sigma_{\zeta})},\dots,\mathcal{N}^{\zeta}_{F^{-}_{\zeta}(\theta_{\zeta})} \rangle , \langle \mathcal{G}^{\zeta}_{\alpha\beta} : F^{-}_{\zeta}(\sigma_{\zeta}) \le \alpha < \beta < F^{-}_{\zeta}(\theta_{\zeta}) \rangle)$$

valamint az $\mathcal{N}^{\zeta}_{F^{-}_{\zeta}(\theta_{\zeta})}$ és $F^{+}_{\zeta}(f)$ értékeket, és így kapjuk az

$(F_{\zeta,\zeta+1}(f))\restriction[ht(\mathcal{N}_{\zeta}),ht(\mathcal{N}_{\xi})]$ és $(\mathcal{N}_{\xi})\restriction[ht(\mathcal{N}_{\zeta}),ht(\mathcal{N}_{\xi})]$ szerkezeteket,

ahol $\theta_{\zeta}=ht(\mathcal{M}_{\zeta})$ és $f\in\mathcal{F}_{\zeta,\zeta+1}$ a $b\in\mathcal{M}^{(\xi)}_{ht(\mathcal{M}_{\zeta}),ht(\mathcal{M}_{\xi})}$ -nek megfelelő jobbra ágazó beágyazás. (Itt $\mathcal{M}_{\xi}=\langle\vec{\mathcal{M}}^{(\xi)},\vec{\mathcal{F}}^{(\xi)}\rangle$, és hasonlóan $\mathcal{M}_{\zeta}$ és $\mathcal{N}_{\zeta}$ esetében.) A részleteket a 2.29. Állításban megtaláljuk.

(II) Tehát $\mathcal{N}_{\xi}$ -t megkonstruáltuk. Megjegyezzük, hogy ezzel egyidőben $\mathcal{G}_{\zeta,\zeta+1}$ -t is definiáltuk, hiszen $\mathcal{G}_{\zeta,\zeta+1}$ nem más, mint az $F^{+}_{\zeta}(b)$ függvény által meghatározott jobbra ágazó beágyazás, továbbá $\mathcal{G}^{(\xi)}_{ht(\mathcal{N}_{\zeta}),ht(\mathcal{N}_{\xi})}$ meghatározza az összes balra ágazó beágyazást.

(III) Következik F_{ξ} elkészítése. Megemlítjük, hogy $\mathcal{N}_{\xi}$ -t $\mathcal{N}_{\zeta}$ -ből és $F^{+}_{\zeta}(b)$ -ből éppen úgy definiáltuk, mint ahogyan $\mathcal{M}_{\xi}$ épül fel $\mathcal{M}_{\zeta}$ -ből és b -ből. Nevezetesen, ha $x\in\mathcal{F}^{(\xi)}_{\alpha,\beta}$ akkor legyen $x=y\circ z\circ u$, $y\in\mathcal{F}^{(\xi)}_{\theta_{\zeta},\beta}$, $z\in\mathcal{F}^{(\xi)}_{\sigma_{\zeta},\theta_{\zeta}}$ és $u\in\mathcal{F}^{(\xi)}_{\alpha,\sigma_{\zeta}}$ (ha szükséges), legyen továbbá $\bar{y}\in\mathcal{F}^{(\xi)}_{\alpha,\beta}$ olyan, amelyre $f_{\sigma_{\alpha},\bar{\beta}}(\bar{y})=y$, és ekkor definiáljuk:

$$(F_{\xi})_{\alpha\beta}(x) := (F_{\zeta\xi}(f)\circ F^{+}_{\zeta})(\bar{y})\circ F^{+}_{\zeta}(z)\circ F^{+}_{\zeta}(u)$$

ahol természetesen $F_{\zeta\xi}(f)\in\mathcal{G}_{\zeta\xi}$ jobbra ágazó beágyazás, melynek hasadó függvénye $F^{+}_{\zeta}(b)$.

Végezetül, ha $\tau \in ing(\mathcal{M}^{(\xi)}_{\alpha}) \cup \{\mathcal{M}_{\xi}(\vec{c}):\vec{c}\in Ecord_{m+1}(\mathcal{M}_{\xi})\}$, akkor legyen

$$(F_{\xi})^{+}(\tau) := \begin{cases} (F_{\zeta})^{+}(\tau) & \text{ha} \quad \alpha\le\theta_{\zeta} \\ (F_{\zeta\xi})(f)^{+}(\bar{\tau}) & \text{ha} \quad \alpha>\theta_{\zeta} \end{cases}$$

ahol $\tau=f^{+}(\bar{\tau})$. Nem nehéz belátni, hogy a fenti konstrukció jó.

(IV) Végül megadjuk az $F_{\zeta\xi}$ függvényt. Nyilvánvalóan, ha

$f\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$ a jobbra ágazó beágyazás, akkor $F_{\zeta\xi}(f)\in\mathcal{G}_{\zeta\xi}$ is a jobbra ágazó beágyazás. Ha pedig $g\in\mathcal{F}_{\zeta\xi}$ egy, a $b\in\mathcal{F}^{(\xi)}_{\theta_\zeta\theta_\xi}$ függvény által meghatározott balra ágazó beágyazás, akkor $F_{\zeta\xi}(f)$ legyen az $F_\xi(b)$ $\in\mathcal{G}^{(\xi)}_{\mathrm{ht}\mathcal{N}_\zeta),\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\xi)}$ függvény által meghatározott balra ágazó beágyazás.

Ezzel a $\xi=\zeta+1$ eset bizonyításának végére értünk.

F és $\mathcal{N}$ egyértelműsége pedig az amalgám definíciójából és az indukciós feltételből következik.

Ezzel a 2.30.Tétel bizonyítását befejeztük. ■

Most lássuk a fenti Tétel néhány következményét. Az alábbiakban, ha mást nem mondunk, $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{G}}\rangle$ mindig egy θ-magas, m -résű tetszőleges, rögzített SM, $m\geq 1$.

2.39. ÁLLÍTÁS *Legyenek* $\eta<\theta$ *és* $b\in\mathcal{G}_{\eta\theta}$ *tetszőlegesek. Ekkor létezik olyan* $\mathcal{F}:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ *amalgám, amelynek jobbra ágazó* f *elemére* $f^-\restriction\eta=\mathrm{id}$, $f^-(\eta)=\theta$ *és* $f_\eta=b$ *teljesül.*

BIZONYÍTÁS Használjuk a 2.30 Állítást. □

2.40. ÁLLÍTÁS $\mathrm{idd}_{\mathcal{M}_\alpha\mathcal{M}_\beta}\in\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ *minden* $\alpha\leq\beta\leq\theta$ *indexre.*

BIZONYÍTÁS m-re és β-ra vonatkozó kettős indukcióval.

$\beta=\delta+1$ rákövetkező rendszám esetén elegendő azt megjegyeznünk, hogy $\mathcal{G}_{\delta,\delta+1}$ minden lehetséges balra ágazó beágyazást tartalmaz, és így az indukciós feltevést alkalmazhatjuk.

Ha β limszrendszám, akkor használjuk a 2.38. Állítás $\zeta=0$ esetét, a 2.26. Állítást a $b=\mathrm{idd}_{\mathcal{M}^{(\alpha)}_{\mathrm{ht}(\mathcal{M}_\alpha)},\mathcal{M}^{(\beta)}_{\mathrm{ht}(\mathcal{M}_\beta)}}$ függvényre és az indukciós feltevést. □

2.41. ÁLLÍTÁS $\mathrm{idd}_{\mathcal{M}_\beta \mathcal{M}_\gamma} \circ f \in \mathcal{G}_{\alpha\gamma}$ *ha* $\alpha<\beta<\gamma\le\theta$ *és* $f\in\mathcal{G}_{\alpha\beta}$. □

(A fenti állítást írhatnánk röviden a $\mathcal{G}_{\alpha\beta}\subseteq\mathcal{G}_{\alpha\gamma}$, $\alpha<\beta<\gamma\le\theta$ képlettel is.)

Most, az 1.18.Definíció általánosításaként definiáljuk nagyobbrésű mocsarak *teljes lineáris sorozatait*, és *rész-mocsarait*, melyekre a következő fejezetben lesz szükségünk.

2.42. DEFINÍCIÓ **(i)** ([Ve3]) *Ha* $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ *1-résű SM, akkor*

(*) $$\langle \langle b_j^{(\beta)},\xi_j^{(\beta)}\rangle : j<\tau^{(\beta)} \rangle \qquad (\ \beta<\mathrm{ht}(\mathcal{M}) \text{ limesz })$$

linearizáló sorozatok, *ha* $\xi_j^{(\beta)}<\beta$ *és* $b_j^{(\beta)}\in\mathcal{F}_{\xi_j^{(\beta)},\beta}$ *(*$j<\tau^{(\beta)}$*) és minden* $\beta<\mathrm{ht}(\mathcal{M})$ *limeszrendszámra:*

(a) $(\forall\ i<j<\tau^{(\beta)})\quad \xi_i^{(\beta)}<\xi_j^{(\beta)}\ \ \&\ \ (\exists\ g\in\mathcal{F}_{\xi_i^{(\beta)},\xi_j^{(\beta)}})\ \ b_i^{(\beta)}=b_j^{(\beta)}\circ g$

(b) $(\forall\delta<\beta)(\forall f\in\mathcal{F}_{\delta\beta})(\exists i<\tau^{(\beta)})\quad \delta<\xi_i^{(\beta)}\ \ \&\ \ (\exists\ g\in\mathcal{F}_{\delta,\xi_i^{(\beta)}})\ \ f=b_i^{(\beta)}\circ g$

(c) $(\forall\gamma<\tau^{(\beta)}\text{limesz}),\ \bar{\beta}=\xi_\gamma^{(\beta)}$ *is limesz*, $\tau^{(\bar{\beta})}=\tau^{(\beta)}$,

és $\xi_i^{(\bar{\beta})}=\xi_i^{(\beta)}$, $b_i^{(\beta)}=b_\gamma^{(\beta)}\circ b_i^{(\bar{\beta})}$ *minden* $i<\gamma$ *indexre*

A fenti sorozatokat mi most **teljes** *-nek nevezzük.*

(ii) *Ha* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ (m+2)*-résű SM*, $m<\omega_o$ *,akkor a* (*)*-beli sorozatok* **felső linearizáló sorozatok** *,ha:* $\xi_j^{(\beta)}<\beta$ *és* $b_j^{(\beta)}\in\mathcal{F}_{\xi_j^{(\beta)},\beta}$ *minden* $j<\tau^{(\beta)}$ *és* $\beta<\mathrm{ht}(\mathcal{M})$ *limeszrendszámra, és (a)-(c) teljesül minden* $\beta<\mathrm{ht}(\mathcal{M})$ *limeszrendszámra* .

(iii) *Ha* $\mathcal{M}$ (m+2)*-résű SM*, $m<\omega_o$, *akkor* $\mathcal{M}$ *rendelkezik* **teljes linearizáló sorozatokkal** , *ha vannak felső linearizáló sorozatai, és* $\mathcal{M}_\theta$ *-ben vannak teljes linearizáló sorozatok.* $(\theta=\mathrm{ht}(\mathcal{M}))$ □

2.43. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\mathcal{M}=\langle\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ m *-résű SMS* . m=0 *esetben* $\mathcal{M}$ *-nek csak egyetlen* **rész-SMS mocsara** *van: önmaga. Ha pedig* m>0 , akkor $\mathcal{K}=\langle\vec{\mathcal{K}},\vec{\mathcal{H}}\rangle$ *rész-SMS mocsara* $\mathcal{M}$ *-nek,* ($\mathcal{M}$ *kiterjeszti* $\mathcal{K}$ *-t*) , *jelben* $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{M}$, *ha*

(o) $\vec{\mathcal{K}}=\{\mathcal{K}_s:s\in S\}$ *valamely* $S\subseteq ht(\mathcal{M})+1$ *részhalmazra* , $\theta=ht(\mathcal{M})\in S$

(a) $\mathcal{K}_s$ *rész-SMS mocsara* $\mathcal{M}_s$ *-nek* *ha* $s\in S$

(b) $\mathcal{H}_{s,r}\subseteq\mathcal{F}_{s,r}\restriction\mathcal{K}_s := \{f\restriction\mathcal{K}_s : f\in\mathcal{F}_{s,r}\}$ *ha* $s,r\in S$, $s\leq r$ □

Természetesen a fenti $\mathcal{K}$ esetén $ht(\mathcal{K})=max(S)=ht(\mathcal{M})$.

A következő fejezetekben az (általános m-résű) egyszerűsített mocsarak két alkalmazását mutatjuk be, elsősorban e fejezetben bizonyított állítások felhasználásával.

3. SZABAD RÉSZHALMAZOK

Jelen fejezetben az ún. "szabad részhalmaz" - problémával foglalkozunk. Többrésű mocsarak felhasználásával bebizonyítunk egy általános tételt (3.2.Tétel). Előtte azonban definiálnunk kell a szabad részhalmazokat, majd bemutatjuk a kapcsolódó eredményeket. Tételünk m=1 speciális esete J.P.Burgess [Bu]-ben megjelent eredménye, melyet Burgess ω_1 -láp felhasználásával bizonyított.

3.0. DEFINÍCIÓ *Legyen* κ *tetszőleges számosság. Egy* $f: [\kappa]^n \to \kappa$ *leképezést* **n-edrendű halmazleképezés***nek nevezünk* κ *-án, ha* $f(V) \notin V$ *minden* $V \in Dom(f)$ *esetén.* κ *-nak egy tetszőleges* H *részhalmaza* **szabad f -re nézve** , *ha* $f(V) \notin H$ *minden* $V \in Dom(f)$, $V \subseteq H$ *esetén.* **Free(**κ,n,λ**)** *a következő állítást jelöli : minden,* κ *-án értelmezett* n *-edrendű halmazleképezéshez található* λ *-nagy szabad részhalmaz.* $\neg$**Free(**κ,n,λ**)** *a fenti állítás tagadása.* □

A fenti fogalmat Erdős Pál és Hajnal András vezette be 1958-ban megjelent cikkében, S.Ruziewicz egy régi, 1936-os kérdése, valamint Erdős Pál és Fodor Géza korábbi vizsgálatainak felhasználásával. Az összefüggések jobb megértéséhez célszerű megismerkednünk az ún. "Hajnal-Komjáth" elvvel:

3.1 DEFINÍCIÓ ([HK]) $n<\omega_0$, $\kappa\in\mathrm{Card}$ *esetén* $H_n(\kappa)$ *igaz, ha létezik egy* $F\colon [\kappa]^n \to \left[[\kappa]^{\aleph_0}\right]^{\le\aleph_0}$ *függvény a következő tulajdonságokkal:*

(*i*) $A \in Dom(F) \;\cup\; F(A) \subseteq min(A)$

(*ii*) $(\forall\alpha<\omega_1)(\forall X\in[\kappa]^{\omega_1})\,(\exists A\in[X]^n)(\exists Y\subseteq X) \quad Y\in F(A)\ \&\ tip(Y)\ge\alpha$ □

$\neg\mathrm{Free}(\kappa,n+1,\omega_1)$ könnyen következik $H_n(r)$-ből. $\mathrm{Free}(\kappa,n,\lambda)$ értékét különböző κ,n,λ számosságokra több dolgozatban vizsgálták, azonban a probléma távolról sincs teljesen megoldva. A témakör részletes összefoglalását adja [EH, §9] és [EHMR, Ch. X]. Most csak a dolgozatunkhoz kapcsolódó eredményeket és kérdéseket említjük meg röviden.

Erdős Pál és Hajnal András már 1958-ban, az Erdős-Rado tétel felhasználásával megmutatta: $\mathrm{Free}(\exp_n(\kappa)^+,n+1,\kappa^+)$ tetszőleges κ számosság és $n<\omega_0$ esetén, ahol $\exp_0(\kappa)=\kappa$ és $\exp_{i+1}(\kappa):=2^{\exp_i(\kappa)}$ ha $i<\omega_0$. Így például GCH esetén $\mathrm{Free}(\omega_{n+2},n+1,\omega_1)$. [EH] -ban a szerzők már sejtették, hogy a fenti eredmény a lehető legjobb, azaz $\neg\mathrm{Free}(\omega_{n+1},n+2,\omega_1)$ konzisztens ZFC + GCH -val. $n=0$ esetén a sejtést Hajnal András igazolta még 1958-ban: CH $\Rightarrow \neg\mathrm{Free}(\omega_1,2,\omega_1)$, sőt CH $\Rightarrow H_1(\omega_1)$. Csak jóval később, a 70-es évek elején sikerült Hajnal Andrásnak és Máté Attilának igazolni ZFC+GCH+$\neg\mathrm{Free}(\omega_2,3,\omega_1)$ konzisztenciáját, majd J.P. Burgess konstruált $\neg\mathrm{Free}(\omega_2,3,\omega_1)$ -et, sőt $H_2(\omega_2)$ -át igazoló függvényt CH + ω_2-láp felhasználásával ([Bu], 1979). R. Laver bizonyította be a $V=L \Rightarrow H_2(\omega_2)$ implikációt. (Ez is könnyen következik CH + $(\omega_1,1)$ -mocsár létezéséből, amit a 3.2. Tétel bizonyítása elején röviden vázolunk.)

Sokáig nyitott maradt: vajon $\neg\mathrm{Free}(\omega_3,4,\omega_1)$ és $H_3(\omega_3)$ teljesülnek-e L -ben. Többen ([HK], [Ve7]) úgy vélték, hogy esetleg nagyobb résű mocsarak felhasználásával lehet megfelelő függvényeket konstruálni. Először Hajnal András és Komjáth Péter [HK] -ban igazolta ZFC + GCH + $\neg$Free$(\omega_{n+1}, n+2, \omega_1)$ (sőt $H_n(\omega_n)$) konzisztenciáját, ω_n omlasztásával $(n<\omega_o)$. D. Velleman [Ve7] eredménye szerint $V=L \Rightarrow H_3(\omega_3)$ (vagyis $\neg$Free$(\omega_3, 4, \omega_1)$) . (Velleman $0^{\#}$ -ot és $(\omega_2, 1)$ - mocsarat használt.)

Mindenki legnagyobb megdöbbenésére S. Todorčević [To1] 1987 - -ben igazolta L-ben a $(\forall n<\omega_o)\ H_{n+1}(\omega_{n+1})$ állítás helyességét felhasználva, hogy $L \models$ "$(\forall n<\omega_o)\ \square_{\omega_n}$ " (ún. Jensen -féle $\square$ -elv) , és Todorčevic' speciálisan megmutatta: $\neg$Free$(\omega_n, n+1, \omega_1) + \square_{\omega_n} \Rightarrow$ $\neg$Free$(\omega_{n+1}, n+2, \omega_1)$.

A fejezet hátralévő részében a 3.2. Tételt bizonyítjuk be, mely szerint $\neg$Free$(\omega_{m+1}, 2^{m+1}, \omega_1)$ következik CH és lineáris sorozatokkal rendelkező (ω_1, m) -(egyszerűsített) mocsár létezéséből. (Ennek m=1 speciális esete J.P. Burgess [Bu] -ban megjelent eredménye.) A fejezetben bemutatott tétel segítségével közelebbről megismerked - hetünk az általános nagyobbrésű mocsarak belső szerkezetével. Dan Velleman [Ve8] -ban igazolta $(\omega_1, 2)$ - egyszerűsített, lineáris sorozatokkal rendelkező mocsarak létezésének konzisztenciáját, így a 3.2. Tétel a 2-résű mocsarak vizsgálatán túl majdnem (!) új bizonyítást is ad Velleman és Todorcevic eredményeire.

Jelen dolgozat szerzője még mindig bízik abban, hogy a nagyobbrésű mocsarak szerkezetének alaposabb vizsgálatával, a 3.2. Tételben alkalmazott Δ_j és $\square$ - függvények jobb megismerésével (vagy ügyesebb választásával) a tétel állítása élesíthető, esetleg az eredeti $\neg$Free$(\omega_{n+1}, n+2, \omega_1)$ állítás is igazolható, különösen az az n=2 esetben. (Hiszen "pazaroljuk" a 2^m pontot: két - két x_{2i} , x_{2i+1} ponthoz rendelünk egy $x_i^{(1)} := \delta^{(1)}(x_{2i}, x_{2i+1})$ pontot $(i<2^{m-1})$, ezután két-két $x_{2j}^{(1)}$, $x_{2j+1}^{(1)}$ ponthoz rendeljük az $x_j^{(2)} := \delta^{(2)}(x_{2j}^{(1)}, x_{2j+1}^{(1)})$ pontot $(j<2^{m-2})$, s.i.t. , mert így könnyen biztosíthatjuk e pontok különbözőségét , és így érjük el könnyen, hogy az eljárás végén kapott $\Delta_m<\omega_1$ elegendően nagy legyen.)

3.2. TÉTEL *Ha* $m<\omega$ *,* CH *, és létezik* (ω_1,m) *- mocsár teljes lineáris sorozatokkal, akkor* $\neg Free(\omega_{m+1},2^m+1,\omega_1)$ *teljesül* .

BIZONYÍTÁS A teljes lineáris sorozatokat 2.42.-ben definiáltuk. A bizonyítás ötletének könyebb megértése céljából előbb az m=1 speciális esetet mutatjuk meg röviden.

m=1 : vagyis ha CH és létezik $(\omega_1,1)$-mocsár akkor $\neg Free(\omega_2,3,\omega_1)$ (ez esetben nics szükségünk lineáris sorozatokra). Legyen tehát $\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ egy $(\omega_1,1)$ - mocsár . Legyen $\alpha<\omega_1$ esetén $[\varphi_\alpha]^{\aleph_0} = \{u_i^\alpha : i<\omega_1\}$ (mivel a mocsár tetszőleges kezdőszeletét elhagyhatjuk [2.0.Megjegyzés] , így φ_α -ról feltehetjük, hogy végtelen) , és tetszőleges $x<y<\omega_2$ esetén jelölje $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ a legkisebb olyan $\rho<\omega_1$ rendszámot, amelyre $x=h(x')$ és $y=h(y')$ teljesül valamely $x',y'\in\varphi_\rho$ pontokra és $h\in\mathcal{F}_{\rho\omega_1}$ függvényre. Legyenek $x<y<\omega_2$ rögzítettek, és $z<x$ esetén definiáljuk $F(x,y,z)$ értékét a következők szerint. Legyenek $\rho=\rho(x,y)$ és x',y',h mint előbb, és sorolja fel a $\{w_m^\rho : m<\omega_0\}$ halmaz az $\{f''u_i^\alpha : f\in\mathcal{F}_{\alpha\rho}, \alpha\le\rho, i<\rho\}$ halmaz elemeit. (Célszerű ha feltesszük, hogy $\mathcal{F}_{\rho\rho}=\{id\}$.) Minden $m<\omega_0$ természetes számra válasszunk különböző $t_m,z'_m\in w_m^\rho$ pontokat φ_ρ-ból úgy, hogy $t_m<z'_m$. Végül legyen $\mathbf{F(x,y,z)}:= =k(t_m)$ pontosan akkor, ha $z=k(z'_m)<x$ valamely $k\in\mathcal{F}_{\rho\omega_1}$ függvényre, és definiáljuk $F(x,y,z)$ értékét más esetekben tetszőlegesen.
A 2.2.Állítás szerint F jól definiált.

Most megmutatjuk, hogy F igazolja a $\neg Free(\omega_2,3,\omega_1)$ állítást. Legyen tehát $X\in[\omega_2]^{\omega_1}$ adott. Jelölje s X -nek első ω_0 elemét, és jelölje ρ_o a legkisebb $\rho<\omega_1$ rendszámot, amelyre $s=g''u$ valamely $u\subseteq\varphi_\rho$ és $g\in\mathcal{F}_{\rho\omega,}$ függvényre (ρ_o létezik a 2.c. Állítás szerint). Vagyis $u=u_i^{\rho.}$ valamely $i<\omega_o$ sorszámra. Legyen ρ_1 nagyobb ρ_o -nál és i -nél. Először olyan X -beli $x<y$ elemeket keresünk, amelyekre $x\geq\sup(s)$ és $\rho(x,y)>\rho_1$. Legyen ugyanis y olyan eleme X -nek, amelyre $tip(y\cap X)>\omega_o+^{\cdot}\varphi_{\rho,}$. Ekkor tetszőleges $x<y$ esetén $\rho(x,y)\leq\rho_1$ azt jelenti, hogy $x=f(x')$ és $y=f(y')$ ahol $x',y'\in\varphi_{\rho_1}$ és $f\in\mathcal{F}_{\rho_1\omega_1}$ és így a 2.b. Állítás alapján kapjuk, hogy a fenti y mellett $X\setminus s\setminus f''(\varphi_{\rho_1}\cap y')$ tetszőleges x eleme megfelelő (hiszen sem y' sem $f''(\varphi_{\rho,}\cap y')$ nem függ f-től). Ekkor $s=k''w_m^\rho$ valamely $k\in\mathcal{F}_{\rho\omega_1}$ függvényre és $m<\omega_o$ indexre. A kiválasztott w_m^ρ -beli t_m , z'_m pontokra ekkor pedig teljesül, hogy $z=k(z'_m)$ és $F(x,y,z)=k(t_m)$ mindketten elemei s -nek, és így X -nek . □

A konstrukció apró módosításával $H_2(\omega_2)$ -őt igazoló G függvény is készíthető: legyen $G(x,y):=\{f''(w_m^\rho):m<\rho\}$ ahol $\rho=\rho(x,y)$ és valamilyen $f\in\mathcal{F}_{\rho\omega_1}$ függvényre $x,y\in Ran(f)$.

Nagyobb résű mocsarak esetén a fenti ρ függvény nem ilyen egyszerű, így az általános eset bizonyításához szükségünk lesz néhány újabb fogalomra és jelölésre.

3.3. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\mathcal{M} = \langle\mathcal{M}^{\rightarrow},\mathcal{F}^{\Rightarrow}\rangle$ *tetszőleges rögzített* (κ,m) *- mocsár* ($\kappa\in Card$ *és* $m<\omega_o$ *tetszőlegesek)* . *Legyenek ekkor*

(i) $\quad \mathbf{sp}^{(j+1)}(\mathcal{M}) := \langle \vec{\psi}_{\mathcal{M}}^{(j+1)} , \vec{\Psi}_{\mathcal{M}}^{(j+1)} \rangle \qquad (j<m)$

$\mathcal{M}$ **csigalépcsői** *(spiral stairs)* , *ahol*

$$\vec{\psi}_{\mathcal{M}}^{(j+1)} := \langle\, ht(K_{\mathcal{M}_i}^{j+1}) \;:\; i<ht(pt^{j+1}(\mathcal{M})) \,\rangle$$

és $$\vec{\Psi}_{\mathcal{M}}^{(j+1)} := \langle\, k^- \;:\; k=\langle k^-,\vec{k},\vec{\vec{k}}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{\Rightarrow(j+1)} \,\rangle$$

(A $\langle K^{\rightarrow},\mathcal{K}^{\Rightarrow}\rangle$ struktúrát 1.31.-ben definiáltuk.)

(ii) *Tetszőleges* $j<m$ *és* $x,y\in\psi_\theta$, $\theta=ht(sp^{(j+1)}(\mathcal{M}))$ *esetén jelölje* $\delta_{\mathcal{M}}^{(j+1)-}(x,y)$ *a legkisebb olyan* $\delta<\theta$ *rendszámot amelyre* $x,y\in Range(f)$ *valamely* $f\in\Psi_{\delta\theta}$ *függvényre.* □

Könnyen látható, hogy $sp_{\mathcal{M}}^{(j+1)}$ 1-résű mocsarak ($j<m$), és így (ii) értelmes, továbbá $sp^{(1)}(\mathcal{M})=pt^{(1)}(\mathcal{M})$; valamint $sp^{(1)}(\mathcal{M})$ és $\delta_{\mathcal{M}}^{(o)}$ nem értelmezhetőek. Ezenkívül $Dom(\delta_{\mathcal{M}}^{(j+1)-})\subseteq[st_{m-j+1}(\mathcal{M})]^2$, $Range(\delta_{\mathcal{M}}^{(j+1)-})\subseteq st_{m-j}(\mathcal{M})$; és végül, ha $\mathcal{M}$ 1-résű, akkor $\delta_{\mathcal{M}}^{(1)-}(x,y)$ éppen az $m=1$ speciális eset bizonyításában használt ρ függvény.

Azonban a $\delta_{\mathcal{M}}^{(j+1)-}$ függvények erősebb változatára van szükségünk. A továbbiakban legyen $m<\omega_o$ rögzített és legyen $M:=2^m$.

3.4. DEFINÍCIÓ *Legyen* $H\in[top(\mathcal{M})]^M$ *rögzített. Legyen* $H_o:=H$, $B_o:=\emptyset$ *és* $P_o:H_o\to B_o$ *az egyetlen lehetséges függvény. Tetszőleges* $j<m$, $x,y\in H_j$ *esetén definiáljuk* $\delta_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(x,y)$ *értékét mint a legkisebb olyan* $\delta\in st_{m-j-1}(\mathcal{M})$ *rendszámot, amelyre* $x,y\in Range(g^-)$ *és* $P_j(x)\cup P_j(y)\subseteq Range(g^+)$ *valamely* $g\in\mathcal{K}_{\delta\,\Xi_{j+1}}^{(j+1)}$ *függvényre. Rögzítsünk a továbbiakban egy fenti tulajdonságú* $g_{x,y}\in\mathcal{K}_{\delta\,\Xi_{j+1}}^{(j+1)}$ *függvényt* ($\delta=\delta_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(x,y)$), *amelyre* $x=\bar{g}_{x,y}(\bar{x})$ *és* $y=\bar{g}_{x,y}(\bar{y})$; *legyen* H_j *növő felsorolása* $\langle x_i^{(j)}:i<2^{m-j}\rangle$ *és legyen* $H_{j+1}:=\left\{\delta_{\mathcal{M}}^{(j+1)+}(x_{2i}^{(j)},x_{2i+1}^{(j)})\ :\ i<2^{m-j}\right\}$ (*nyilvánvalóan* $H_{j+1}\subseteq st_{m-j-1}(\mathcal{M})$), *és végül, ha* $z_i^{(j+1)}$ *jelöli a* $\delta_{\mathcal{M}}^{(j+1)+}\left[x_{2i}^{(j)},x_{2i+1}^{(j)}\right]$ *értéket, akkor definiáljuk* :

$$P_{j+1}\left[z_i^{(j+1)}\right]:=\left\{x_{2i}^{(j)},\ x_{2i+1}^{(j)},\ g_{x,y}\right\}\cup P_j\left[x_{2i}^{(j)}\right]\cup P_j\left[x_{2i+1}^{(j)}\right] \quad □$$

3.5. MEGJEGYZÉSEK (i) Előfordulhat, hogy $|H_j|<2^{m-j}$ valamely $j\le m$ indexre. Ezért a H_j és P_j halmazokat (függvényeket) $(j\le m)$ csak abban az esetben definiáljuk, ha $|H_j|=2^{m-j}$ minden $j\le m$ esetén.

(ii) $H_0=\vec{x}$ és $j\le m$ esetén gyakran írunk $H_j(\vec{x})$ -t (néha $H_j^{\mathcal{M}}(\vec{x})$ -t), hiszen a H_j halmazok függnek $\vec{x}$ -től (és $\mathcal{M}$ -től).

A későbbiekben a könyebb olvashatóság érdekében használni fogjuk a $\Delta_j^{\mathcal{M}}(\vec{x}) := \max(H_j^{\mathcal{M}}(\vec{x}))$ rövidítést tetszőleges $\vec{x}\in[\mathrm{top}(\mathcal{M})]^M$ és $j\le m$ esetén.

(iii) Mivel $j\le m$ esetén $st_{m-j}(\mathcal{M})=ht(pt^j(\mathcal{M}))$ és $ht(sp^j(\mathcal{M}))=$ $=ht(pt^j(\mathcal{M}))$, így $\mathrm{Range}(\delta_{\mathcal{M}}^j) \subseteq ht(pt^j(\mathcal{M})) = st_{m-j}(\mathcal{M}))$.

Most rátérünk a 3.2.Tétel bizonyítására.

Legyen tehát $m<\omega_0$, $\mathcal{M} = \langle\mathcal{M}^{\rightarrow},\mathcal{F}^{\Rightarrow}\rangle$ rögzített (ω_1,m) - mocsár teljes lineáris sorozatokkal. Az alábbiakban az alsó és felső " $\mathcal{M}$ " indexeket elhagyjuk. Legyen $pt^{(1)}:=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathfrak{F}}\rangle$, ekkor $\varphi_\alpha<\omega_1$ minden $\alpha<\omega_1$ rendszámra.[1] Így felírhatjuk $[\varphi_\alpha]^{\omega}$. -át $\{u_\beta^{(\alpha)}:\beta<\omega_1\}$ alakban $(\alpha<\omega_1)$.

Adott $\vec{x} = \langle x_0,x_1,\dots,x_{M-1}\rangle \in [\omega_{m+1}]^M$ $(M=2^m)$ sorozatra most definiálnunk kell az $F(\vec{x},z)$ értéket minden $z<\min(\vec{x})$ esetén (eml: $\omega_{m+1}=\mathrm{top}(\mathcal{M})$). j -re történő indukcióval definiáljuk az $\bar{x}_0^{(j+1)}, \bar{x}_1^{(j+1)},\dots, \bar{x}_M^{(j+1)} \in \varphi_{\square(j+1)}$ pontokat és a $\square(j+1) < \omega_1^{+m}$ rendszámokat úgy, hogy teljesüljön az $\bar{x}_0^{(j)} =$ $= f^{(j)+}\left[\bar{x}_\ell^{(j+1)}\right]$ egyenlőség valamely $f^{(j)} \in \mathcal{K}_{\Delta_{j+1}}^{(j+1)}\Xi_{j+1}$

---

[1] Hiszen a mocsár definiciójában (1.29) megköveteltük, hogy M_i kezdőszelete legyen M_j-nek minden $i<j$ esetén, minden $(j+1)$-résü mocsárra és minden $j\le m$ esetén, továbbá $|M_i|<\kappa$ minden $i<\kappa$ indexre.

függvényre, $\bar{x}_\ell^{(o)} = x_\ell$ $(\ell<M)$. (A konstrukció m=4 esetét a mellékelt ábrán szemléltetjük.)

Most definiáljuk a **koordinátákat** : $<\bar{x}_\ell^{(o)} : \ell<M>$ koordinátái $<\omega_1,\dots,\omega_m>$, és $<\bar{x}_\ell^{(j)} : \ell<M>$ koordinátái pedig $< \omega_1,\dots,\omega_{m-j}, c_{m-j+1}^{(j)},\dots,c_m^{(j)} >$ $(1\le j\le m)$ ahol $c_{m-j+1}^{(j)} := \Delta_j$ és $f^{(j)+}\left[c_\ell^{(j)}\right] = c_\ell^{(j-1)}$ amennyiben $m-j+1<\ell\le m$. Legyen végül $\vec{c} :=$ $<c_1^{(m)},\dots,c_m^{(m)}>$, $<\bar{x}_\ell^{(m)} : \ell<M>$ koordinátái.

Ne feledjük, hogy $\bar{x}_\ell^{(o)}=x_\ell$ $(\ell<M)$, $c_1=\Delta(m)$ és $c_m=\square(m)$. Továbbá $f^{(j)} \in \mathcal{K}^{(j+1)}_{\Delta_{j+1}\Xi_{j+1}}$, $\square(1)=\Delta_1$ és $f^+(\square(j+1))=\square(j)$ ha $1<j<m$.

3.6 ÁLLÍTÁS *Ha* $f^{(j)-}(\bar{\Delta}_{j+1})=\Delta_j$ *akkor* $f^{(j)}\restriction(\bar{\Delta}_{j+1}+1)$ *és* $f^{(j)}_{\bar{\Delta}_{j+1}}$ *függetlenek* $f \in \mathcal{K}^{(j+1)}_{\Delta_{j+1}\Xi_{j+1}}$ *választásától* $(j<m)$.

(Következik 2.24. -ből.) □

Végül azt is észrevehetjük, hogy az $\vec{x}^{(m)} := <\bar{x}_\ell^{(m)} : \ell<M>$ sorozat $\mathrm{ing}(\mathcal{M}_{\Delta_m})$ -beli . Azonban az $\vec{x}^{(m)}$ sorozat helyét pontosabban meg kell határoznunk, a $<\Delta_\ell : \ell<M>$ sorozat segítségével, valamint azon "megengedett" utak nyilvántartásával, amelyek $\vec{x}^{(m)}$ megkonstruálását segítették.

3.7. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\mathcal{M} = (\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}})$ *egy* m *-résű mocsár . Ekkor a* $\sigma^{\mathcal{M}}$ *függvényt az alábbiak szerint definiáljuk* m *-re vonatkozó indukcióval :* $Dom(\sigma^{\mathcal{M}}) := \bigcup_{\mu<m} \times_{j\le\mu} st_j(\mathcal{M})$, $\sigma^{\mathcal{M}}(\emptyset) := \mathcal{M}$ *és* $\sigma^{\mathcal{M}}(i^\frown\vec{v}) := \sigma^{\mathcal{M}_i}(\vec{v})$ *ha* $i<st(\mathcal{M})$ *és* $i^\frown v \in Dom(\sigma^{\mathcal{M}})$. □

3.8. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\mathcal{M}=<\mathcal{M},\mathcal{F}>$ m *-résű mocsár. Egy*

$$f : ing(\sigma^{\mathcal{M}}(\vec{u})) \hookrightarrow ing(\sigma^{\mathcal{M}}(\vec{v}))$$

függvényt $\mathcal{M}$ **-beli megengedett út** *-nak nevezünk, ha* $\vec{u}$ *lexiko-*

grafikusan kisebb $\vec{v}$ *-nél,* $f\in\mathcal{F}_{u,v}$ *(ha* $m=1$*) illetve* $f=b\circ f_w^+$ *ahol* $u_j=v_j$ *(*$j<w$*) és* $u_w<v_w$ *és* b *megengedett út* $\sigma^{\mathcal{M}}(\langle v_1,\dots,v_w\rangle)$ *-ben valamely* $w<m$ *indexre.* □

Vagyis ha $\vec{v}$ egy $m-1$ hosszú sorozat, $\mathrm{Dom}(\sigma)$ egy tetszőleges eleme, akkor $\delta^{\mathcal{M}}(\vec{v})$ 1 -résű mocsár, sőt $\dot{\mathrm{pt}}^{(o)}(\mathcal{M})$ egy kezdőszelete. Továbbá

$$\square(j+1) < \mathrm{ht}\left[\sigma\left(\langle\omega_{i+1}: i<m-j-1\rangle^\frown\langle\Delta_{j+1-i}: i<j\rangle\right)\right]$$

A fentiek alapján már meg tudjuk adni a tétel állítását igazoló F függvényt. Tehát adott az $\vec{x}\in[\omega_{m+1}]^M$ sorozat, és a fentiek alapján a hozzá tartozó $\langle\bar{x}_\ell^{(m)}: \ell<M\rangle$ sorozat. Tudjuk, hogy $x_\ell = \bar{x}_\ell^{(o)} = \mathfrak{F}(\bar{x}_\ell^{(m)})$ $(\ell<M)$ ahol

$$\mathfrak{F} = f_{\Delta_2}^{(1)+}\circ f_{\Delta_3}^{(2)+}\circ\dots\circ f_{\Delta_m}^{(m-1)+}$$

Ami még lényeges számunkra: a 3.6. Állítás alapján $\mathfrak{F}\restriction\max\{\bar{x}_\ell^{(m)}: \ell<M\}$ független az $f^{(j)}$ $(j<m)$ függvények választásától. Észrevehetjük még, hogy $\mathfrak{F}: \varphi_{\square(m)}\to\varphi_{\Delta_1}$ megengedett út, így $\mathfrak{F}^+(\square(m))=\Delta_1=\square(1)$. Legyen $\vec{v}=\langle v_r: r<m-1\rangle\in\mathrm{Dom}(\sigma^{\mathcal{M}})$ olyan, amely összes koordinátája ω_1 -nél kisebb, ekkor soroljuk fel $\{w_i^{(\vec{v})}: i<\omega_o\}$ alakban a

$$\{\, g''u_\beta^{(\alpha)} : \alpha,\beta<v_o,\ g: \mathrm{ing}(\sigma(\vec{u}))\to\sigma(\vec{v}) \text{ megengedett út, } \vec{u}<\vec{v} \text{ lexikogr.}\}$$

halmazt.

Tehát adott $\vec{x}=\langle x_\ell: \ell<M\rangle\subseteq\omega_{m+1}$ és így $\vec{c}=\langle c_i^{(m)}: 1\le i\le m\rangle$. Válasszunk $w_m^{(\vec{c})}$ -ből különböző $t_m<z_m$ elemeket $(m<\omega_o)$. Végül definiáljuk az F függvényt: legyen $h:=\mathrm{ht}(\sigma(\langle c_{i+1}: i<m-2\rangle))$ és

$$F(\vec{x},z):=\begin{cases}\mathfrak{F}(k(t_m)) & \text{ha } \exists k\in\mathcal{F}_{\square(m),h}: \quad z=\mathfrak{F}(k(z_m))<x_{M-1}\\ \text{tetszőleges} & \text{máskor}\end{cases}$$

Először azt kell belátnunk, hogy F jól definiált, azonban ez a 3.6. és 1.28.f/ Állításokból könnyen következik.

Most pedig megmutatjuk, hogy F "működik", azaz bizonyítja 3.2. Tételünket. Legyen tehát $X\in[\omega_{m+1}]^{\omega}$, adott, és olyan $\vec{x}\in[X]^M$ sorozatot és $z\in X$ elemet kell találnunk, amelyre $F(\vec{x},z)\in X$ (eml: $M=2^m$). Ezt úgy érhetjük el, hogy olyan $s\in[X]^{\omega}$. és $\vec{x}\in[X]^M$ sorozatokat keresünk, amelyekre " s előbb jelenik meg, mint $\vec{x}$ ". Tehát azt kell "megmérnünk", mikor "jelenik meg" $\mathcal{M}$ -ben ω_{m+1} egy μ méretű részhalmaza, ha $\mu<\omega_m$ reguláris.
Az alábbiakban $\mathcal{M}$ tetszőleges (κ,m) - mocsár, $\kappa\in Card$, $m<\omega_o$.

3.9. **DEFINÍCIÓ** $\delta^{\#(1)}_{\mathcal{M}}(x,y) := \delta^{(1)+}_{\mathcal{M}}(x,y)$ *ha* $x,y\in top(\mathcal{M})$, *és* legyen $j<m$, $J=2^j$, $x_1,\dots,x_{2J}\in top(\mathcal{M})$ esetén

$$\delta^{\#(j+1)}_{\mathcal{M}}(x_1,\dots,x_{2J}) := \delta^{(j+1)+}_{\mathcal{M}}\left[\delta^{\#(j)}_{\mathcal{M}}(x_1,\dots,x_J),\delta^{\#(j)}_{\mathcal{M}}(x_{J+1},\dots,x_{2J})\right]$$ □

3.10. **DEFINÍCIÓ** *Ha* $j<m$, $X\subseteq top(\mathcal{M})$, $\mu\in Card$, *akkor jelölje* $\rho^{(j+1)}_{\mathcal{M}}(X,\mu)$ *a legkisebb olyan* $\rho < ht(pt^{(j+1)}(\mathcal{M})) = \Xi_{j+1}$ *rendszámot, amelyre létezik olyan* $X^{(j+1)}_{\mu}\in[X]^{\mu}$ *amelynek tetszőleges* $y_1,\dots,y_{2J}$ $(J=2^j)$ *elemeire* $P^{\mathcal{M}}_{j+1}(\delta^{\#(j+1)}_{\mathcal{M}}(y_1,\dots,y_{2J}))\subseteq Range(f^+)$ *valamely* $f\in X^{(j+1)}_{\rho\,\Xi_{j+1}}$ *függvényre.* □

Az alábbi egyenlőtlenségek könnyen beláthatók:

$$\text{(3.11)}\qquad \sup\left[\delta^{\#(j+1)}_{\mathcal{M}}\right]''[s]^J < \rho^{(j+1)}_{\mathcal{M}}(X,\mu)$$

ha $s\subseteq X^{(j+1)}_{\mu}$, $|s|<\mu$, μ reguláris, $X\subseteq top(\mathcal{M})$, $|X|\geq\mu$

(3.12) $\Delta(j+1) = \rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(H,\mu)$ $\quad (H\in[\mathrm{top}(\mathcal{M})]^{\mu}\ ,\ \mu<\omega_o)$

(3.13) $\rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(X,\nu) \le \rho^{(j+1)}(X_{\mu}^{j+1},\nu) < \rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(X,\mu)$

ha $X \subseteq \mathrm{top}(\mathcal{M})\ ,\ \nu<\mu\le|X|\ ,\ j<m$.

(3.14) $\sup\left[\delta^{\#(j+1)}\text{ " }[s]^{J}\right] < \delta^{\#(j+1)}(\vec{y}_1)$

ha $j<m$, $X\subseteq\mathrm{top}(\mathcal{M})$, $s\subseteq X_{\mu}^{(j+1)}$, $|s|<\mu\le|X|$,

valamely $\vec{y}_i\in[X_{\mu}^{j+1}]^{J}$ vektorokra $(i<\mu)$, sőt

$\sup(s)<\min(\vec{y}_i)$ és $\max(\vec{y}_j)<\min(\vec{y}_i)$ $(j<i<\mu,\ J=2^{j+1})$

Továbbá, ha $j<m$, μ reguláris, $X\in[\mathrm{top}(\mathcal{M})]^{\ge\mu}$, akkor

(3.15) $\mathrm{cof}(\rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(X,\mu)) = \mu$

(3.16) $|X_{\mu}^{(j+1)}| = \mu$

(3.17) $\rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(Y,\mu) = \rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(X,\mu)$ $\quad$ ha $Y\subseteq X_{\mu}^{(j+1)}$

(A fenti állítások könnyen igazolhatók $\mathcal{M}$ teljes lineáris sorozatai segítségével, a bizonyítás részletesen megtalálható [Sz1]-ben.)

Ne feledjük, hogy adott egy $X\in[\mathrm{top}(\mathcal{M})]^{\omega_1}$ halmazunk.

Most definiáljuk az $Y_j \subseteq X$ $(j\le m)$ halmazokat: legyen $Y_o:=X$ és $Y_{j+1}:=(Y_j)_{\omega_1}^{(j+1)}$, azaz $Y_{j+1}\subseteq Y_j$ a $\rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(Y_j,\omega_1)$ rendszám kiszámításánál szereplő részhalmaz, $j<m$. Legyen végül $\bar{Y}:=\bigcap_{j\le m} Y_j$.

Ekkor a 3.11.-3.16. Állítások felhasználásával belátható, hogy tetszőleges $s\in[\bar{Y}]^{\omega}$ és $j<m$ esetén van olyan $\vec{y}_i\in[\bar{Y}\setminus\sup(s)]^{2J}$ $(i<\omega_1,\ J=2^{j})$ vektorsorozatunk, amelyre $\min(\vec{y}_i)>\max(\vec{y}_j)$ ha $j<i<\omega_1$, és

$$(3.18) \qquad \sup\left[\delta^{\#(j+1)} \text{"} [s]^{2J}\right] < \delta^{\#(j+1)}(\vec{y}_i) ,$$

sőt, a fenti gondolatmenetet és $\delta^{\#(j)}$ ($j\le m$) definícióját felhasználva $j<m$ -re vonatkozó indukcióval kapjuk:

3.19. ÁLLÍTÁS *Tetszőleges* $s\in[\bar{Y}]^{\omega}$. *és* $v_o<\omega_1$ *esetén van olyan* $\vec{y}_i=\langle y_1^{(i)},\dots,y_M^{(i)}\rangle \in[\bar{Y}\setminus sup(s)]^M$ $(i<\omega_1, M=2^m)$ *vektorsorozat, amelyre* $\min(\vec{y}_i)>\max(\vec{y}_\ell)$ *ha* $\ell<i<\omega_1$ *, és minden* $j<m$ *,* $i<\omega_1$ *,* $J=2^j$ *esetén* $\delta^{\#(m)}(\vec{y}_i)>v_o$ *és*

$$\sup\left[\delta^{\#(j+1)} \text{"} [s]^{2J}\right] < \delta^{\#(j+1)}(y_1^{(i)},\dots,y_{2J}^{(i)}) \qquad \square$$

Rögzítsünk most egy tetszőleges $s\in[\bar{Y}]^{\omega}$. és $\langle\vec{y}_i : i<\omega_1\rangle$ sorozatot, amelyek létezését a fenti állítás biztosítja. Ekkor $\rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(\bar{Y},\omega_1)$ minimalitása és 3.17 alapján nyilván feltehetjük, hogy minden $j<m$, $J=2^j$ esetén

$$(3.20) \qquad \sup \delta_{\mathcal{M}}^{\#(j+1)}\left[y_1^{(i)},\dots,y_{2j}^{(i)}\right] = \rho_{\mathcal{M}}^{(j+1)}(\bar{Y},\omega_1)$$

Most a $\delta^{\#(1)}$ és $\rho^{(1)}$ függvények definíciója, valamint a 2.6. Állítás alapján találhatunk egy minimális $\alpha<\omega_m<\Xi^{(1)}$ rendszámot és $\bar{s}\subseteq\varphi_\alpha$ részhalmazt, amelyekre $f(\bar{\xi})=\xi \Leftrightarrow \mathfrak{k}(\bar{\xi})=\xi$ minden $f\in\mathcal{K}_{\alpha\,\Xi}^{(1)}$, és $\bar{\xi}\in\bar{s}$, $\xi\in s$ esetén, ahol $\mathfrak{k}:\bar{s}\to s$ (az egyetlen) rendezéstartó bijekció. (Emlékeztetőül: $\alpha<\rho^{(1)}(\bar{Y})$.)

3.21. ÁLLÍTÁS *Legyen* $\mathcal{M}=(\vec{\mathcal{M}},\vec{\mathcal{F}})$ *egy* (κ,m) *- mocsár,* $m<\omega_o$ *,* κ *reguláris,* $\mathcal{H}\in[ing(\mathcal{M})]^{<\kappa}$ *. Ekkor létezik* $\nu<\kappa$ *,* $f\in\mathcal{F}_{\nu\kappa}$ *és* $\bar{\mathcal{H}} \subseteq ing(\mathcal{M})$ *amelyre* $\mathcal{H}=(f^+)''\bar{\mathcal{H}}$ *.*

(A bizonyítás a 2.6. és 2.29. Állítások alapján történhet.) $\square$

A fenti állítás bizonyításának gondos tanulmányozása alapján beláthatjuk az alábbiakat: ($D^{(j)}$ -t 1.24-ben definiáljuk.)

(3.22) $\exists\alpha<\rho^{(1)}(\bar{Y},\omega_o)\quad \exists k^{(o)}\in\mathcal{K}^{(1)}_{\alpha\,\Xi},\qquad \mathfrak{k} = k^{(o)}\restriction\bar{s}$

(3.23) $\sup\,\rho^{(j)}(s,\omega_o)\ < D^{(j)} <\ \inf\,\rho^{(j)}(\bar{Y},\omega_1)$

Most megadjuk azt helyet, ahol $s=w_i^{\vec{d}}$ alakban "fordul elő" . H_j , B_j , P_j , $g^{(j)}_{x,y}$, Δ_j és $\vec{c}^{(j)}$ ($j\le m$) mintájára most definiáljuk S_j , $\mathcal{B}_j$, R_j , $k^{(j)}$, $D^{(j)}$ és $\vec{d}^{(j)}$ -t ($j\le m$) az alábbiak szerint. (Mindegyik függ $s\in[\mathrm{top}(\mathcal{M})]^{\omega}$ -tól, azonban a jelölés bonyolultsága miatt ezt már nem tüntetjük fel.)

3.24. DEFINÍCIÓ *Legyen* $S_o:=s$, $\mathcal{B}_o:=\varnothing$, $\vec{d}^{(o)}:=\langle\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m\rangle$, *és* R_o , $D^{(o)}$ *-t nem definiáljuk. Ha* $j<m$, *akkor jelölje* $D^{(j+1)}$ *a legkisebb* $D<st_{m-j-1}(\mathcal{M})$ *rendszámot amelyre* $\mathcal{B}_j=\left[k^{(j)+}\right]''\,\bar{\mathcal{B}}_j$ *valamely* $k^{(j)}\in\mathcal{K}^{(j+1)}_{D\,\Xi_{j+1}}$ *függvényre és* $\bar{\mathcal{B}}_j\subseteq ing(K^{(j+1)}_D)$ *halmazra* . *Legyen továbbá* $\left[k^{(j)+}\right]''S_{j+1} = S_j$, $\mathcal{B}_{j+1}:= \mathcal{B}_j\cup\{D^{(j+1)},k^{(j)},S_{j+1}\}$, $d^{(j+1)}_{m-j}:=D^{(j+1)}$, $k^{(j)+}(d^{(j+1)}_{\ell})=d^{(j)}_{\ell}$ $(m-j<\ell\le m)$, *és legyen* $\vec{d}^{(j+1)}:=\ \langle\omega_1,\dots,\omega_{m-j-1},d^{(j+1)}_{m-j},\dots,d^{(j+1)}_{m}\rangle$. *Végül legyen* $R_1:=D_1$ *és* $k^{(j)}(R_{j+1})=R_j$ *ha* $j<m$, *és* $k^{(m)}$ *-et nem definiáljuk.* □

Mivel $R_m<\omega_1$ és $S_m\in\varphi_{R_m}$, így találhatunk olyan $\alpha,\beta<\omega_1$ rendszámokat, amelyekre $S_m=u^{(\alpha)}_{\beta}$ (pl. $\alpha=R_m$) . Továbbá tudjuk : $s = S_o=\left[k^{(o)+}\circ k^{(1)+}\circ\dots\circ k^{(m-1)+}\right]''\,S_m$. Most 3.19 és 3.23 segítségével nem nehéz belátni, hogy valamely $\vec{y}\in[\bar{Y}]^M$ sorozatra

$c:=\vec{c}(\vec{y})$ $(=\bar{y}^{(m)}$ koordinátái, melyeket $\vec{y}$-ból szerkesztettünk) lexikografikusan kisebb mint $\vec{d}$. Sőt még azt is feltehetjük, hogy $c_o > \alpha, \beta$.

3.25 ÁLLÍTÁS *$\mathcal{M}$ -ben létezik megengedett út $\sigma(\vec{d})$ -ből $\sigma(\vec{c})$ -be.*

BIZONYÍTÁS (vázlat): Először definiáljuk a $k_\ell^{(j)}$ függvényeket ($\ell \le j < m$) $j<m$ -re vonatkozó indukcióval a következők szerint: $k_o^{(o)}:=k^o$, $k^{(j)+}(k_\ell^{(j)})=k_\ell^{(j-1)}$ ha $1 \le j < m$, $\ell<j$ és $k_\ell^{(j)}:=k^{(j)}$. (Így pl. $k_{m-1}^{(m-1)}=k^{(m-1)}$.) Másodszor definiáljuk a $h^{(j)}$, $g^{(j)}$ és a $k_\ell^{(j,2)}$ ($\ell \le j < m$) függvényeket az alábbiak szerint: legyen $k_\ell^{(m-1,2)}:=k_\ell^{(m-1)}$ ha $\ell \le m$ és $j \le m-2$ esetén egyrészt legyen $k_{m-j-1}^{(m-j-1,2)} = h^{(m-j-1)} \circ g^{(m-j-1)}$ ahol $g^{(m-j-1)} \in \mathcal{K}_{o(j),c_{j+1}}^{(m-j)}$ valamely $o(j)$ rendszámra, és $\vec{y}$ $(j+1)$-dik koordinátáját jelöltük c_{j+1} -gyel; másrészt legyen $k_\ell^{(m-j-2,2)} := g^{(m-j-1)+}\left[k_\ell^{(m-j-1,2)}\right]$ ha $\ell \le m-j-2$. Ekkor pedig $g := g^{(o)+} \circ \ldots \circ g^{(m-1)+}$ a keresett megengedett út. □

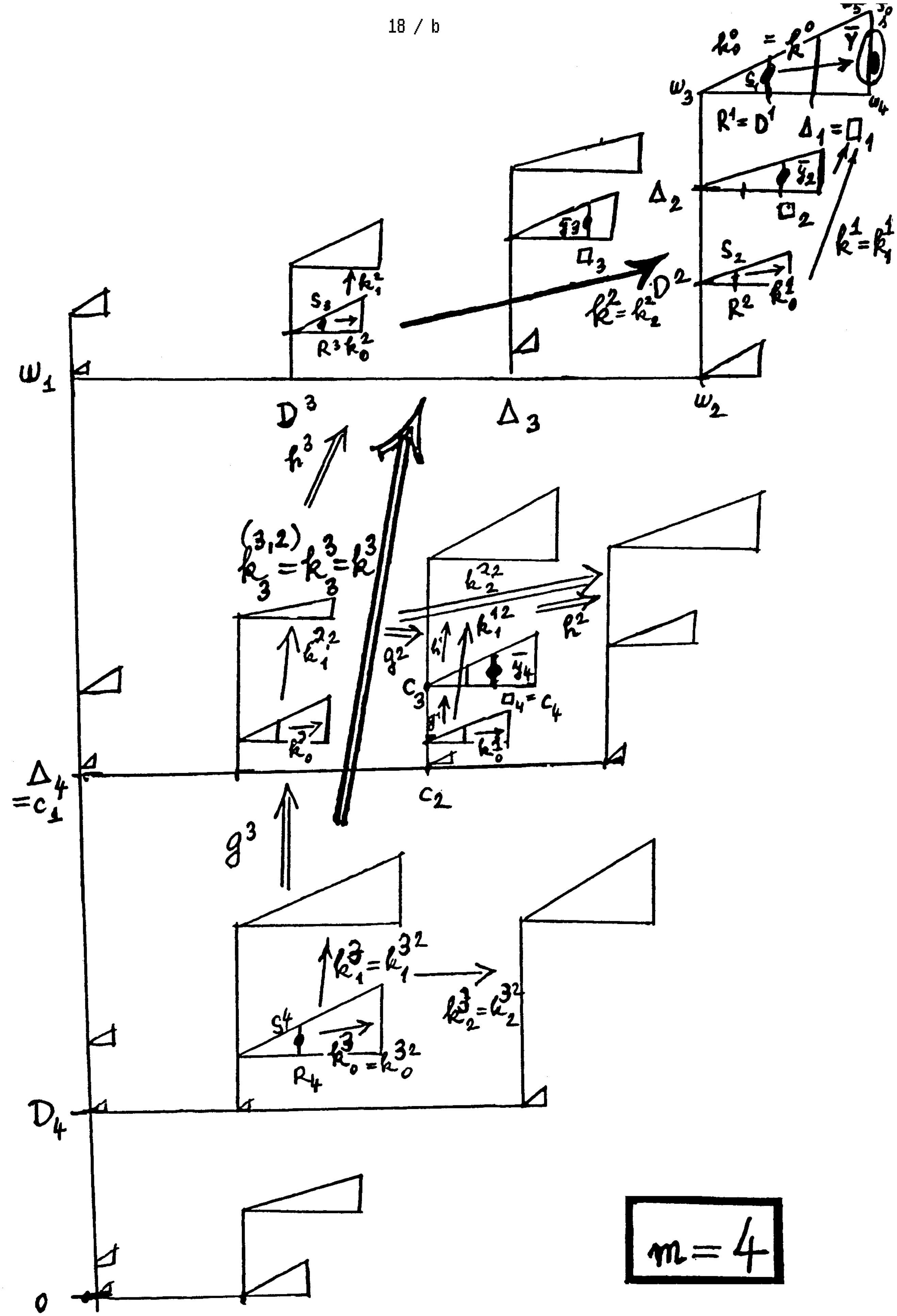
Ez pedig azt jelenti, hogy $g''S_m=w_m^{(\vec{c})}$ valamely $m<\omega_o$ indexre. Most az 1.28.f/ tulajdonságot többször alkalmazva beláthatjuk, hogy $k^{(o)}=\chi \circ \chi'$ valamely $\chi' \in \mathcal{K}_{D',\Delta'}^{(1)}$ és $\chi \in \mathcal{K}_{\Delta',\Xi'}^{(1)}$ függvényekre, amelyekre (a precíz jelölések mellőzésével, a 2.24. Állítás többszöri alkalmazása után):

$$\chi = \mathfrak{z}\left[k_o^{(o,2)}\right] .$$

Ez pedig a bizonyítás végét jelenti: $w_m^{(\vec{c})}$ -ben bizonyos $t_m<z_m$ pontokat választottunk, és konstrukciónk szerint

$$F(\vec{y},z)= \mathfrak{z}\left[k_o^{(o,2)}(t_m)\right] \text{ ahol } z= \mathfrak{z}\left[k_o^{(o,2)}(z_m)\right] .$$

Mivel pedig $\mathfrak{z}\left[k_o^{(o,2)}(t_m)\right] = \chi(\mathfrak{z}(t_m)) \in S_o$, így $\mathfrak{z}\left[k_o^{(o,2)}(z_m)\right] = \chi(\mathfrak{z}(z_m)) \in S_o$ ami bizonyítja tételünket. ■


$k_0^0 = k^0$
$\bar{Y}$
S_1
w_3
w_4
$R^1 = D^1$
$\Delta_1 = \square_1$
Δ_2
$\bar{y}_2$
$\square_2$
$k^1 = k_1^1$
$\bar{y}_3$
$\square_3$
S_2
D^2
R^2
k_0^1
$k^2 = k_2^2$
k_1^2
S_3
R^3
k_0^2
w_1
w_2
D^3
Δ_3
h^3
$k_3^{(3,2)} = k_3^3 = k^3$
k_2^{22}
k_1^{22}
k_1^{12}
h^2
g^2
h^1
c_3
$\bar{y}_4$
$\square_4 = c_4$
g^1
k_0^3
k_0^1
$\Delta_4 = c_1$
c_2
g^3
$k_1^3 = k_1^{32}$
$k_2^3 = k_2^{32}$
S^4
$k_0^3 = k_0^{32}$
R_4
D_4
0
$m = 4$

4. PARTÍCIÓ RELÁCIÓK

Jelen fejezetben a következő tételt bizonyítjuk be: ha $2^{\aleph_1}=\aleph_2$ és létezik $(\omega_2,1)$-egyszerűsített mocsár lineáris sorozattal, akkor teljesül a $\omega_3\omega_1 \nrightarrow (\omega_3\omega_1,3)^2$ partíció-reláció (4.8. Tétel).

A bizonyítás előtt definiáljuk az Erdős Pál és Hajnal András által bevezetett $\rightarrow$ és $\nrightarrow$, ún. "nyíl" és "nem nyíl" partíció-relációkat, majd röviden ismertetünk néhány idevágó eredményt.

4.0. DEFINÍCIÓ *Tetszőleges* κ, λ, μ *rendszámokra* $\kappa\rightarrow(\lambda,\mu)^n$ $(n<\omega_0)$ *a következő állítást jelöli: ha* $F:[\kappa]^n\rightarrow\{0,1\}$ *tetszőleges, akkor vagy* $[X]^n\subseteq F^{-1}[\{0\}]$ *valamely* $X\in[\kappa]^\lambda$, *vagy* $[Y]^n\subseteq F^{-1}[\{1\}]$ *valamely* $Y\in[\kappa]^\mu$ *részhalmazra. Az* X *ill.* Y *halmazt a* 0 *ill.* 1 *színre nézve* **homogén** *halmazoknak nevezzük.* □

Az $n=2$ esetben azt is mondjuk, hogy F egy κ-n lévő teljes gráf éleit színezi két színnel. Látható, hogy a $\kappa\rightarrow(\lambda,\mu)^n$ reláció n csökkentése után is igaz marad.

A partíciórelációk legteljesebb összefoglalását [EH] és [EHMR]-ben találhatjuk. Most csak a dolgozatunkban bizonyított tételhez kapcsolódó eredményeket ismertetjük röviden. Fejezetünk célja a 4.8. Tétel igazolása.

F.P. Ramsey 1930-ban bizonyította be a témkör első tételét: $\omega_0\rightarrow(\omega_0,\omega_0)^2$. A következő jelentős állomások: $(2^{\aleph_0})^+\rightarrow(2^{\aleph_0},\aleph_1)^2$ (Erdős

Pál - R.Rado 1956), és tetszőleges κ számosságra $\kappa\to(\kappa,\omega_o)^2$ (Erdős Pál-B.Dushnik-E.W.Miller 1941). $\omega_1\omega_o \nrightarrow (\omega_1\omega_o, 3)^2$ könnyen következik CH-ból. (Hajnal András vette észre a 60-as évek végén.) Az $\omega_2\omega_o\to(\omega_2\omega_o,3)^2$ problémát [EH]-ban találjuk, de valószínűleg Erdős Pál és Hajnal András már régebben is vizsgálta ezt a kérdést. $\omega_3\omega_1\to(\omega_3\omega_1,3)^2$ már csak egy lépés tovább, $\aleph_{c^+}\to(\aleph_{c^+},\aleph_1)^2$ pedig újabb keletű kérdés. A fenti kérdéseket csak 1985-ben siekrült S. Shelah és L.J.Stanley -nek megoldaniuk. Eredményeiket [SS2] -ben publikálták, melyek a következők ($c=2^{\aleph_o}$) :

4.1.TÉTEL ([SS2]) *Ha* $\kappa>\omega_1$ *reguláris és* $(\forall\lambda<\kappa)\ \lambda^{\aleph_o}<\kappa$ *akkor* $\kappa\omega_o\to(\kappa\omega_o,k)^2$ *minden* $k<\omega_o$ *esetén.* □

4.2.KÖVETKEZMÉNY ([SS2]) $\omega_2\omega_o\to(\omega_2\omega_o,3)^2$ következik CH -ból. □

4.3.TÉTEL ([SS2]) ZFC + $\neg$CH + $\omega_2\omega_o\nrightarrow(\omega_2\omega_o,3)^2$ *konzisztens* (*ha ZFC konzisztens*). □

4.4.TÉTEL ([SS2]) ZFC + $\aleph_{c^+}\nrightarrow(\aleph_{c^+},\aleph_1)^2$ *konzisztens* (*ha ZFC konzisztens*). □

4.5.TÉTEL ([SS3]) *Ha ZFC + "$\exists c^+$ mérhető számosság" konzisztens, akkor ZFC +* $(\exists\lambda<\aleph_{c^+})\ 2^\lambda>\aleph_{c^+}$ + $\aleph_{c^+}\to(\aleph_{c^+},\aleph_1)^2$ *is az.* □

4.6.TÉTEL ([SS2]) *ZFC + GCH +* $\omega_3\omega_1\nrightarrow(\omega_3\omega_1,3)^2$ *konzisztens* (*ha ZFC is az*). □

4.7.TÉTEL ([SS2]) *Ha ZFC + "∃ gyengén kompakt számosság" konzisztens, akkor ZFC + GCH +* $(\forall k<\omega_o)\ \omega_3\omega_1\to(\omega_3\omega_1,k)^2$ *is az.* □

A 4.6. Tétel bizonyításában használt kényszerképzet elemei amalgám szerkezetűek, ami lényeges szerephez jut a bizonyításban. (Továbbá az ún. "historizálás" módszere, ami pl. [BS, §9] bizonyításában is meghatározó, és B.Velickovic észrevétele szerint következik a Jensen-féle □ sorozatból és Todorcevic [To1] "felfelé lépkedő [stepping up]" -elvéből.) Ez alapján már [SS2] -ben is sejtették, hogy az állítás megfelelő mocsár létezéséből is következik. Dolgozatom jelen fejezetében ezt a sejtést igazolom a 4.8.Tételben. A bizonyítást 1989 elején sikerült befejeznem, tőlem függetlenül C.Morgan, L.J.Stanley és D.Velleman is hasonló eredményt ért el [MSV]-ben, T.Miyamoto egyik dolgozatának felhasználásával. Az ismertetett eremdények pedig azt mutatják, hogy a 4.7.Tételben legalább elérhetetlen számosságot kell írnunk (1.19.Tétel). [SS2] szerzőinek sejtése szerint $\omega_3\omega_1\to(\omega_3\omega_1,3)^2$ ekvikonzisztens egy gyengén kompakt számosság létezésével.

Mint [SS2,2.17], [MSV], [Sz1] szerzői megemlítik, a bizonyítás könnyedén módosítható $\mu\kappa \nrightarrow (\mu\kappa,3)^2$ alakú állítások igazolásához, azonban meglepő módon nincs szükség nagyobb résű, csupán megfelelő 1-résű mocsarakra. (μ majdnem tetszőleges nem gyengén kompakt számosság lehet: $\mu=\tau^+$ esetben a módosítás egyszerű míg nagyobb számosságokra nem, ld.pl. [SS2,2.17] vagy [SS3]-ban.)

Hasonlóan, [SS2] szerzői eredetileg azt sejtették, hogy $\omega_2\omega_o\to(\omega_2\omega_o,3)^2$ is következik valamilyen megfelelő mocsár létezéséből, azonban a 4.2. és 4.3.Tételek ezt megcáfolják. (Mint említettük, a $\kappa_1\kappa_2\to(\lambda,\mu)^2$ alakú partíció relációk (κ_1,κ_2 számosságok) között is rengeteg a megoldatlan probléma, melyek ismertetésére most nem térünk ki.)

Fejezetünk célja a következő tétel igazolása. [SS2] több ötletét felhasználjuk, de emellett a mocsarak struktúráját is részletesebben megvizsgáljuk (ld.pl.a 4.12.Állítást).

4.8. TÉTEL *Ha* $2^{\aleph_1}=\aleph_2$ *és létezik* $(\omega_2,1)$ *- mocsár lineáris sorozatokkal akkor* $\omega_3\omega_1 \nrightarrow (\omega_3\omega_1,3)^2$.

BIZONYÍTÁS Legyen $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ egyszerűsített $(\omega_2,1)$ - mocsár és lineáris sorozatai

$$< <(\beta^{\alpha}_{\delta},f^{\alpha}_{\delta}):\delta<\tau^{\alpha}> \ : \ \alpha<\omega_2 \text{ limesz } >$$

Mint [SS2,Lemma 2.6] -ben, először $\varphi_\beta\times\omega_1$ $(\beta<\omega_2)$ éleit színezzük ki piros, zöld és szürke színekkel. Eközben, bizonyos felsorolásokkal biztosítjuk azt, hogy minden fontos élt kiszínezzünk, a lineáris sorozatokra limesz lépéseknél lesz szükségünk. A mocsár fedő tulajdonságát felhasználva így definiálhatjuk $\varphi_{\omega2}\times\omega_1$ $(=\omega_3\times\omega_1)$ egy színezését. [SS2] 2.15 és 2.16 Lemmáinak megfelelő 4.10 és 4.14 állításaink biztosítják a konstrukció helyességét.

Nos, lássunk munkához! Tegyük fel, hogy $\phi_0=1$ $(=\{0\})$ és teljesüljön a $\rho:\omega_3\times\omega_1\to\omega_3$ és $\gamma:\omega_3\times\omega_1\to\omega_1$ függvényekre a $\xi=\omega_3\cdot\gamma(\xi)+\rho(\xi)$ egyenlőség minden $\xi<\omega_3\omega_1$ rendszámra, azaz ξ sorát $\rho(\xi)$, oszlopát $\gamma(\xi)$ mutatja. Így ξ -t azonosíthatjuk $\langle\rho(\xi),\gamma(\xi)\rangle$ -al, továbbá $\omega_3\omega_1$ és $\omega_3\times\omega_1$ illetve $\varphi_\alpha\cdot\omega_1$ és $\phi_\alpha\times\omega_1$ között sem teszünk különbséget $(\alpha\le\omega_2)$. Sőt, néha φ_α -át ill. σ_α -át írunk $\varphi_\alpha\times\omega_1$ ill. $\sigma_\alpha\times\omega_1$ helyett, ahol $\sigma_\alpha\in\varphi_\alpha$ $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha+1}$ hasadási (splitting) pontja. Ezenkívül gyakran egyszerűen $f(x)$ -et írunk $\langle f(\rho(x)),\gamma(x)\rangle$ helyett $(x\in\phi_\beta\times\omega_1$, $f\in\mathcal{F}_{\beta\alpha}$ és $\beta<\alpha\le\omega_2)$.

Mivel $2^{\aleph_1}=\aleph_2$, így $\gamma<\omega_2$ esetén sorolja fel a $\langle U^{\gamma}_t : t<\omega_2\rangle$ sorozat az következő típusú halmazok családját: $U = \{u_i : i<\omega_1\} \subseteq \varphi_\gamma\times\omega_1$ ahol $\gamma(u_i)<\gamma(u_j)$ és $\rho(u_i)<\rho(u_j)$ ha $i<j<\omega_1$. Majd minden $\beta<\omega_2$ rendszámra sorolja fel $\langle Z^{\beta}_t : t<\omega_1\rangle$ a

$$\{ \ (f''U)\times(g''U) \ : \ U=U^{\gamma}_t \ , \ f,g\in\mathcal{F}_{\gamma,\beta} \ , \ \gamma,t<\beta \ \}$$

halmazt.

Most definiáljuk a $p_\alpha:=(b_\alpha,c_\alpha)$ párokat ha $\alpha<\omega_2$ [1]. E párokra $b_\alpha:[\phi_\alpha\times\omega_1]^2\to\omega_1$, $c_\alpha:[\phi_\alpha\times\omega_1]^2\to\{\text{piros},\text{zöld},\text{szürke}\}$ (pontosabban $\mathrm{Dom}(c_\alpha) = \{(x,y)\in[\phi_\alpha\times\omega_1]^2 : \gamma(x)<\gamma(y)\}$), valamint tetszőleges $x,y\in$ $\in[\phi_\alpha\times\omega_1]^2$ $(\alpha<\omega_2)$ pontokra, ha $\gamma(x)<\gamma(y)$, a következő egyenlőségek teljesülnek:

(1) $c_\alpha(x,y)=\text{zöld} \quad\Rightarrow\quad \gamma(x)<\gamma(y)$ és $\rho(x)>\rho(y)$

(2) $c_\alpha(x,y)=\text{piros} \quad\Leftrightarrow\quad \exists z\ c_\alpha(x,z)=c_\alpha(y,z)=\text{zöld}$ és $\gamma(z)>\gamma(y)$

(3) $c_\alpha(x,z)=c_\alpha(y,z)=\text{zöld} \quad\Rightarrow\quad b_\alpha(x,y)>\gamma(z) \qquad (\forall z\in\varphi_\alpha\times\omega_1)$

p_α -át $\alpha<\omega_2$ -ra vonatkozó indukcióval konstruáljuk. Nyilván $\mathrm{Range}(c_0):=\{\text{szürke}\}$, b_0 tetszőleges. Ha $\alpha<\omega_2$ limesz akkor persze $b_\alpha(f^{\alpha}_{\delta}(x),f^{\alpha}_{\delta}(y)):=b_{\mathfrak{b}}(x,y)$ és $c_\alpha(f^{\alpha}_{\delta}(x),f^{\alpha}_{\delta}(y)):=c_{\mathfrak{b}}(x,y)$ ha $\delta<\tau^{\alpha}$, $x,y\in\varphi_{\mathfrak{b}}$ és $\mathfrak{b}=\beta^{\alpha}_{\delta}$.

Ha $\alpha=\beta+1$, akkor $\langle Z^{\beta}_k : k<\omega_1\rangle$ reprezentáns elemeit színezzük ki megfelelően. Pontosabban: legyen $\sigma_\beta\in\varphi_\beta$ a hasadási pont, $\mathcal{F}_{\beta,\beta+1}=$ $=\{id,f_\beta\}$. Legyen ekkor $q=(b,c)$ olyan amelyre $b^q(f_\beta(x),f_\beta(y)) =$ $=b_\beta(x,y)$ és $c^q(f_\beta(x),f_\beta(y))=c_\beta(x,y)$ ha $x,y\in\varphi_\beta\times\omega_1$. Továbbá legyenek $(x^{\beta}_{h,i},y^{\beta}_{h,i}) \in Z^{\beta}_h\setminus[\sigma_\beta\times\omega_1]^2$ $(h,i<\omega_1)$ olyanok, hogy (a felső indexek

---

[1] **Nem forszolunk, csak a kényelem miatt írjuk (b_α,c_α) helyett a rövidebb p_α jelet.**

elhagyásával)

(ε) $c_\beta(x_{h,i},y_{h,i})$=szürke és $\gamma(x_{\varepsilon(j)})<\gamma(y_{\varepsilon(j)})<\gamma(x_{\varepsilon(j+1)})$ ha $j\in\omega_1$

ahol $\varepsilon:\omega_1\to\omega_1^2$ egy rögzített bijekció, de az $(x^\beta_{h,i},y^\beta_{h,i})$ pont-párokat csak olyan $h<\omega_1$ indexekre definiáljuk, amelyre a $Z^\beta_h\setminus[\sigma_\beta\times\omega_1]^2$ halmazból kiválasztható ω_1-darab $(x^\beta_{h,i},y^\beta_{h,i})$ pontpár úgy, hogy (ε) teljesüljön, más h indexekre $(x^\beta_{h,i},y^\beta_{h,i})$ -et nem definiáljuk.

A továbbiakban írjunk $(x^\beta_{\varepsilon(h)},y^\beta_{\varepsilon(h)})$ helyett (x^β_h,y^β_h) -át.

A következő eredmény konstrukciónk alapja:

4.9. ÁLLÍTÁS (a) *Van* $r=(b^r,c^r)$ *amelyre* (1)-(3) *teljesül,* $\mathrm{Dom}(b^r)=\mathrm{Dom}(c^r)=[\varphi_\alpha\times\omega_1]^2$, $b^r\supseteq b_\beta\cup b^q$, $c^r\supseteq c_\beta\cup c^q$ *és minden* $(x,y)\in$ $\in[(\varphi_\beta\setminus\sigma_\beta)\times\omega_1]^2$ *pontra* $b^r(x,f_\beta(y))=b^r(f_\beta(x),y)=b_\beta(x,y)$ *és*

$$(a^*)\qquad c^r(x,f_\beta(y)) = c^r(f_\beta(x),y) \neq \textit{zöld}$$

(b) *Van olyan* $r=(b^r,c^r)$, *amelyre a fenti tulajdonságok mellett még* $c^r(x',f_\beta(y')),c^r(f_\beta(x'),y')\neq$ *zöld és* $c^r(f_\beta(x^\beta_h),y^\beta_h)=$ =*zöld* ($h<\omega_1$) *is teljesül ha* $(x',y')\in T_\beta$ *ahol*

$$T_\beta := [(\varphi_\beta\setminus\sigma_\beta)\times\omega_1]^2 \setminus \{(x^\beta_h,y^\beta_h):h<\omega_1\}$$

BIZONYÍTÁS (a) Legyen $(x,y)\in[(\varphi_\beta\setminus\sigma_\beta)\times\omega_1]^2$ esetén $c^r(x,f_\beta(y)) := c^r(f_\beta(x),y) :=$ piros pontosan akkor ha

$$(4)\qquad (\exists\ z\in\sigma_\beta\times\omega_1)\qquad c_\beta(x,z) = c^q(f_\beta(y),z) = \text{zöld}$$

és minden más esetben legyen $c^r(x,f_\beta(y)) := c^r(f_\beta(x),y) :=$ szürke .

(Megjegyezzük, hogy (4)-ben $z\notin(\varphi_\beta\setminus\sigma_\beta)\times\omega_1$ hiszen (a^*)-ot biztosítanunk kell. Továbbá: $c^r(x,f_\beta(y))$=piros $\Leftrightarrow$ $c_\beta(x,y)$=piros , és így $b^r(x,f_\beta(y)):=b_\beta(x,y)$ minden $(x,y)\in(\varphi_\beta\setminus\sigma_\beta)\times\omega_1$ pontpárra elérhető. Ekkor (1)-(3) könnyen ellenőrizhető.)

(b) Azt mondjuk, hogy $(x',y')\in T_\beta$ **kritikus k-ra** ha az alábbiak valamelyike teljesül:

(5) $\qquad x' = x_k^\beta \qquad$ és $\qquad c^p(y',y_k^\beta) = $ zöld

(6) $\qquad y' = y_k^\beta \qquad$ és $\qquad c^p(x',x_k^\beta) = $ zöld

(Mivel mindenféle zöld háromszöget el akarunk kerülni amellett, hogy a $(\varphi_{\beta+1}\setminus\varphi_\beta)\times\omega_1$ és a $(\varphi_\beta\setminus\sigma_\beta)\times\omega_1$ halmazok között futó élek színeit kell definiálnunk, és még (1), (2) is teljesüljön.)

Könnyen látható, hogy minden (x',y') legfeljebb két $h<k<\omega_1$ értékre lehet kritikus, és ekkor $x'=x_h<y_h<x_k<y_k=y'$ valamint $c(x_h,x_k)= =c(y_h,y_k)=$zöld. Ez azonban c^r alábbi definícióját nem zavarja.

Most, ha (4) teljesül (x',y') -re, akkor legyen $c^r(f_\beta(x'),y')= =c^r(x',f_\beta(y'))=$piros. Ha (x',y') egyetlen $k<\omega_1$ számra sem kritikus, akkor legyen $c^r(f_\beta(x'),y') = c^r(x',f_\beta(y')) = $ szürke.

Ha pedig (x',y') valamely $k<\omega_1$ -re kritikus, és (4) nem teljesül, akkor két esetünk van: (5) esetén legyen $c^r(f_\beta(x'),y')=$piros, $c^r(x',f_\beta(y'))=$szürke , $b^r(x',f_\beta(y'))=b^p(x',y')$ és legyen

$$b^r(f_\beta(x'),y') := \max\{ b^p(x',y') , \gamma(y_k^\beta)+1 \}$$

míg (6) esetén legyen $c^r(x',f_\beta(y')):=$piros, $c^r(f_\beta(x'),y')=$szürke

és $\qquad b^r(x',f_\beta(y')) := \max\{ b^p(x',y') , \gamma(y_k^\beta)+1 \}$.

Ekkor (1) - (3) könnyen ellenőrizhető. $\square$

A továbbiakban **piros(x',y')** -at írunk $(f_\beta(x'),y')$ helyett, ha (5) teljesül, hiszen $c^r(f_\beta(x'),y')=$piros, és **szürke(x',y')** áll

$(x', f_\beta(y'))$ helyett, továbbá hasonló jelöléseket alkalmazunk (6) teljesülése esetén.

Megjegyezzük, hogy $c_\beta(x^\beta_k, y^\beta_k)$=gray feltételezése nem lényeges, hiszen akármilyenre is színezzük (x^β_k, y^β_k) -t piros kivételével, a konstrukció "működik". (A $c_\beta(x^\beta_k, y^\beta_k)\neq$piros $(\forall k<\omega_1)$ egyenlőtlenségek miatt tetszőleges (x', y') legfeljebb két $k<\omega_1$ -re kritikus.)

Tehát c_α -t már minden $\alpha<\omega_2$ indexre definiáltuk $[\phi_\alpha \times \omega_1]^2$-n a 4.9. Állítás (b) alapján.

4.10. ÁLLÍTÁS *Egyetlen $\alpha<\omega_2$ -ra sincs $\phi_\alpha \times \omega_1$ - ban olyan homogén piros halmaz (c_α -ra), amely $\aleph_1$ oszlopot metsz $\varphi_\alpha \times \omega_1$ -ban.*

BIZONYÍTÁS Indirekt módon tegyük fel, hogy van a fenti állításnak ellentmondó $\alpha<\omega_2$. Ha α minimális, akkor nyilvánvalóan ω_1 kofinalitású limesz rendszám. (Itt használjuk a mocsár lineáris sorozatait.)

Legyen $R\subseteq\phi_\alpha \times \omega_1$ homogén piros (c_α szerint) olyan részhalmaz, amely $\aleph_1$ oszlopot metsz, vagyis a $\{\gamma(u): u\in R\}$ halmaz $\aleph_1$ számosságú . Megmutatjuk ekkor, hogy valamely $\beta^*<\alpha$ rendszámra van $p_{\beta*}$ -ban is ilyen tulajdonságú homogén piros (c_α szerint) halmaz, amely ellentmondás bizonyítja állításunkat.

Feltehetjük, hogy R minden oszlopot legfeljebb egy pontban metsz, és így legyen $\langle u_i : i<\omega_1 \rangle$ R azon felsorolása, amelyre a $\langle \gamma(u_i) : i<\omega_1 \rangle$ sorozat monoton növő. Most $u\in\varphi_\gamma \times \omega_1$ és $\gamma<\alpha$ limesz esetén definiáljuk a $\beta(u)<\gamma$ rendszámot és az $\bar{u}\in\varphi_{\beta(u)}\times\omega_1$ pontot: $\beta(u)=\beta^\gamma_\delta$ = a legkisebb $\beta<\alpha$ melyre $u=f^\gamma_\delta(\bar{u})$ valamely $\delta<\tau^\gamma$ indexre. Legyen $\beta_i=\beta(u_i)$.

α minimalitása miatt tetszőleges $X\in[\omega_1]^{\aleph_1}$ esetén $\{\beta_i : i\in X\}$

kofinális α -ban. Vagyis R további ritkításával még az is feltehető, hogy $\langle\beta_i : i<\omega_1\rangle$ szigorúan növő, sőt az is, hogy $\beta(u)$ rákövetkező rendszám ha $u\in R$, a 2.19. Állítás miatt.

Most definiáljuk a $z \in \cup\{\varphi_\beta\times\omega_1 : \beta\le\alpha\}$ pontok **történetét** (*history*). $hist(0,z):=\{(0,z)\}$ ha $z\in\varphi_o\times\omega_1$. Ha pedig $\beta>0$ limesz és $z\in\varphi_\beta\times\omega_1$ akkor legyen $hist(\beta,z):=hist(\gamma,\bar{z})\cup\{(\beta,z)\}$ ahol $\gamma=\beta(z)$.

Végül $z\in\varphi_{\beta+1}\times\omega_1$, $\beta<\alpha$ esetén két alesetet különböztetünk meg: $z\in\varphi_\beta\times\omega_1$ vagy nem. Az első alesetben legyen $hist(\beta+1,z):=hist(\beta,z)$, míg a másik alesetben $hist(\beta+1,z):=hist(\beta,z)\cup\{(\beta+1,z')\}$ ahol $z'\in\varphi_\beta\times\omega_1$ amelyre $f_\beta(z')=z$.

Ha $u\in R$, akkor röviden **hist(u)** -t írunk $hist(\alpha,u)$ helyett , míg legyen $\mathbf{hist_1(u)} := \{\beta<\alpha : \exists x\ (\beta,x)\in hist(u)\}$, és hasonlóan definiáljuk a $\mathbf{hist_2(u)}$ halmazt.

Ekkor $\beta(u)=\max(hist_1(u))$ hiszen a történetek véges halmazok. Továbbá feltehetjük, hogy valamely $n>1$ számra $|hist(u_i)|=n$ minden $i<\omega_1$ indexre . Legyen $hist_1(u_i)$ *csökkenő* felsorolása $\langle\beta_{i,j} : j<n\rangle$ $(i<\omega_1)$. Ekkor $\beta_{i,o}=\beta_i$, $\beta_{i,n-1}=0$. Legyen továbbá $u_{i,j}$ olyan, amelyre $(\beta_{i,j},u_{i,j})\in hist(u_i)$, és így $u_{i,o}=u_i$. Legyen most $0<m<n$ a legkisebb olyan m index , amelyre a $\{\beta_{i,m} : i<\omega_1\}$ halmaz α -ban korlátos, és legyen $\beta^* := \sup\{\beta_{i,m} : i<\omega_1\}$, $\beta^*<\alpha$. Ritkítással feltehetjük, hogy az alábbi egyenlőtlenségek is teljesülnek minden $k_1<k_2<k_3<\omega_1$ indexre:

(!) $\qquad \beta_{k_1} < \beta_{k_2,m-1}$

(!!) $\qquad \beta_{k_1,m} \le \beta_{k_2,m}$

(!!!) $(\forall j<m)$ $\gamma(u_{k_2}) < \gamma(y_k^{\bar\beta})$ ahol $\bar\beta = \beta_{k_1,j} - 1$

és $u_{k_1,j+1} = x_h^{\bar\beta}$ $(h<\omega_1)$

(!!!!) $\forall\ (j_1,j_2) \in m \times (m+1)$ $b\ (u_{k_1,j_1}, u_{k_2,j_2}) < \gamma(u_{k_3})$

(+) $\rho(u_{k_1,o}) < \rho(u_{k_2,m-1})$ $(\ k_1 < k_2 < \omega_1\ )$

A konstrukcióból még a következőket is tudjuk:

(0) $\rho(u_{k,j}) \in \varphi_{\beta_{k,j}} \setminus \varphi_{\bar\beta}$ $(\ j<m\ ,\ k<\omega_1\ ,\ \beta_{k,j} = \bar\beta+1\ )$

és

(++) $\rho(u_{k,j}) \in \varphi_{\bar\beta} \setminus \sigma_{\bar\beta}$ $(\ j<m\ ,\ k<\omega_1\ ,\ \beta_{k,j-1} = \bar\beta+1\ )$

Most definiáljuk az $F:\omega_1^2 \to \{\mathrm{lila}\} \cup m \times (m+1)$ partíciót: $F(i_1;i_2)=$ $=$lila pontosan akkor, ha nincs olyan $(j_1,j_2) \in m \times (m+1)$ amelyre

(#) $(u_{i_1,j_1}, u_{i_2,j_2}) = \mathrm{piros}(u',v')$ ahol (u',v') kritikus valamely $(x_h^{\beta-1}, y_h^{\beta-1})$, $h<\omega_1$ -re a $\beta-1$ -dik lépésben, és $(u_{i_1,j_1}, u_{i_2,j_2})$ -t a β -dik lépésben konstruáltuk.

(A fenti fogalmakat a 4.9.b/ állításban vezettük be.)

Ha (#) igaz valamely (j_1,j_2) indexre, akkor legyen $F(i_1,i_2)$ a lexikografikusan legkisebb ilyen (j_1,j_2) . (Vegyük észre, hogy $(u_{i_1,j_1}, u_{i_2,j_2})$ -t a β_{i_2,j_2} -dik lépésben konstruáltuk, minden $i_1<i_2<\omega_1$ indexre, ha $j_2<m$; míg $j=m$ esetén a β_{i_1,j_1} -dikben.

Ha pedig (#) nem igaz, akkor fennáll annak a *lehetősége,* hogy $C(u_{i_1,j_1}, u_{i_2,j_2}) \neq$ piros . Azonban $c(u_{i_1,j_1-1}, u_{i_2,j_2})$ = piros , vagy $c(u_{i_1,j_1}, u_{i_2,j_2-1})$ = piros , és $\neg$(#) -ből $c(u_{i_1,j_1}, u_{i_2,j_2})=$ =piros következik. (A 4.9.b/ állítás, (1), (5), (6) alapján.)

Most pedig belátjuk, hogy *semmilyen* $i_1<i_2<i_3<\omega_1$ indexekre nem léteznek olyan j_1 , j_2 , j_3 indexek, amelyekre $F(i_1,i_3) = (j_1,j_3)$ és $F(i_2,i_3) = (j_2,j_3)$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy mégis. Legyen $P_1:=u_{i_1,j_1}$, és legyenek P_2 , P_3 analóg definiálva.

Két esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy $j_3<m$ vagy nem. $j_3<m$ esetén a (P_1,P_3) és (P_2,P_3) párokat a $\beta=\beta_{i_3,j_3}$ -dik lépésben színeztük ki, legyen például (P_1,P_3)=piros(Q_1,Q_3) és (P_2,P_3)= =piros(Q_2,Q_3') , ahol (Q_1,Q_3) az $(x_k^{\beta-1},y_k^{\beta-1})$, és (Q_2,Q_3') az $(x_h^{\beta-1},y_h^{\beta-1})$ élre kritikus , valamilyen $h,k<\omega_1$ indexre . Ekkor $\gamma(P_3) > \gamma(P_1),\gamma(P_2)$ és $\rho(P_3) > \rho(P_1),\rho(P_2)$ miatt mindkét esetben (6) teljesül, de ekkor $\gamma(P_3)=\gamma(x_k^{\beta-1})$ és $\gamma(P_3)=\gamma(x_h^{\beta-1})$, azaz h=k . Továbbá , (6) miatt $\gamma(P_3)<\gamma(y_k^{\beta-1})$, és a $(P_1,y_k^{\beta-1})$, $(P_2,y_k^{\beta-1})$, $(P_3,y_k^{\beta-1})$ élek mind szürkék. Most (3) -at alkalmazva P_1 , P_2 és $y_k^{\beta-1}$ -re kapjuk, hogy $\gamma(y_h^{\beta-1})<b(P_1,P_2)$. De ekkor (!!!!) miatt $\gamma(P_3)<b(P_1,P_2)$ ami ellentmondás.

Másrészt , a $j_3=m$ esetben (!) miatt $\beta=\beta_{i_1,j_1}>\beta_{i_3,m}$, és a (P_1,P_3) élet a β -dik szinten készítettük, és $\gamma(P_3)>\gamma(P_1)$. Legyen $\bar{\beta}:=\beta-1$. Ekkor (P_1,P_3)=piros(Q_1,Q_3) valamilyen (Q_1,Q_3) élre, amely valamelyik $y_h^{\beta-1} \in \varphi_{\beta-1}\times\omega_1$ pontra kritikus $(h<\omega_1)$, ami alapján $\gamma(P_3)<\gamma(y_h^{\beta-1})$. Vagyis (5) igaz, így $P_1=f_{\beta-1}(x_h^{\beta-1})$, és ekkor (!!!) $\gamma(P_3)>\gamma(y_h^{\beta-1})$.

Ekkor az ismert $\omega_1 \to (\omega_1, (\omega_o)_{m^2+m})^2$ partíció reláció alapján van ω_1 -ben egy ω_1 méretű lila homogén részhalmaz, amiről feltehetjük, hogy az egész ω_1 .

Most megmutatjuk, hogy $c\left[u_{i_1,j_1}, u_{i_2,j_2}\right]$=piros , tetszőleges $i_1<i_2<\omega_1$ és $(j_1,j_2) \in m\times(m+1)$ indexekre.

Három esetet különböztetünk meg.

(I) eset: $j_2\le m$, $j_1=0$ esetén az állítás könnyen belátható. Hiszen $F(i_1,i_2)$=lila , és minden $j_2<m$ indexre $(u_{i_1,o}, u_{i_2,j_2})\ne$piros$(u',v')$ egyetlen (u',v') párra, ami β-1 -kritikus. (Itt β jelöli azt a szintet, ahol $(u_{i_1,o}, u_{i_2,j_2})$ -t konstruáltuk.) Ekkor pedig $c(u_{i_1,o}, u_{i_2,o})$=piros , (!) , és a 4.9.állításban leírt amalgám konstrukció alapján, j_2-re vonatkozó indukcióval könnyen beláthatjuk, hogy $c(u_{i_1,o}, u_{i_2,j_2})$=piros , ha $j_2\le m$.

Legyen most $(j_1+1, j_2) \in m\times(m+1)\setminus\{(0,0)\}$ lexikografikusan a legkisebb, amelyre $c(u_{i_1,j_1+1}, u_{i_2,j_2})\ne$piros .

(II) eset: $j_2=0$ ellentmond $F(i_1,i_2)\ne(j_1,j_2)$ -nek , mert az $(u_{i_1,j_1}, u_{i_2,o})$ élt a $\beta_{i_2,o}$-1 -dik szinten definiáltuk (és megismételhetjük az (I) eset érvelését.)

(III) eset: $j_2>0$ pedig $F(i_1,i_2)\ne(j_1+1, j_2-1)$ -nek mond ellent, mert az $(u_{i_1,j_1}, u_{i_2,j_2})$ élt a β_{i_2,j_2} -dik szinten definiáltuk (és ismét használhatjuk az (I) eset gondolatmenetét.) Ekkor pedig $F(u_{i_1,m-1}, u_{i_2,m})\ne$lila miatt $c(u_{i_1,m}, u_{i_2,m})$=piros ha $j_1<j_2<\omega_1$.

Ez pedig ellentmond α minimalitásának, hiszen ekkor $\{u_{i,m} : i<\omega_1\}$ homogén piros $p_{\beta*}$ -ban, ami bizonyítja a 4.10.Állítást. □

Most definiáljuk a $C : [\omega_3 \times \omega_1]^2 \to \{piros, zöld\}$ színezést, a $\langle c_\beta : \beta<\omega_2 \rangle$ színezések felhasználásával: ha $\{x,y\} \in [\varphi_{\omega_2} \times \omega_1]^2$ és $\gamma(x)=\gamma(y)$ vagy $\rho(x)=\rho(y)$ akkor legyen $C(x,y):=$piros . Ha pedig $\gamma(x)<\gamma(y)$ és $c_\beta(\bar{x},\bar{y})\neq$szürke (ahol $\bar{x},\bar{y} \in \varphi_\beta \times \omega_1$, $\beta<\omega_2$ olyanok, hogy $x=f(\bar{x})$, $y=f(\bar{y})$ valamely $f \in \mathcal{F}_{\beta,\omega_2}$ függvényre) akkor legyen $C(x,y):=c_\beta(x,y)$. Minden más esetben $C(x,y):=$piros . □

Belátjuk, hogy C bizonyítja az $\omega_3\omega_1 \not\to (\omega_3\omega_1, 3)^2$ állítást, előtte azonban még néhány állításra és egy definícióra van szükségünk.

4.11. DEFINÍCIÓ *Tetszőleges $\beta<\alpha\le\omega_2$ és $f,g \in \mathcal{F}_{\beta,\alpha}$ esetén definiáljuk a* $\underline{\mu=\mu(f,g)}$ *rendszámot és a* $\underline{\vec{\beta}=\vec{\beta}(f,g)}$, $\underline{\vec{h}=\vec{h}(f,g)}$ μ *-hosszúságú rendszámsorozatokat: legyen $\beta_o:=\beta$, $h_o:=id\restriction\varphi_o$, $\beta_{t+1}:=\bar{\beta}+1$ ahol $\bar{\beta}\in[\beta_t,\alpha]$ maximális olyan, amelyre találhatók az $f=f^{\bullet}\circ f^{=}\circ\bar{f}$ és $g=g^{\bullet}\circ g^{=}\circ\bar{g}$ egyenlőségeket kielégítő $\bar{f},\bar{g}\in\mathcal{F}_{\beta\beta_t}$, $g^{=},f^{=}\in\mathcal{F}_{\beta_t\bar{\beta}}$, $f^{\bullet},g^{\bullet}\in\mathcal{F}_{\bar{\beta}\alpha}$ kielégítő olyan függvények,* amelyekre $g^{=}=f^{=}$.

Limesz t *esetén* $\beta_t:=\sup\{\beta_u : u<t\}$, $h_t:=id\restriction\varphi_{\beta_t}$ *.Végül μ a legkisebb olyan rendszám, amelyre β_μ nem létezik, vagy α-val egyenlő, ha α rákövetkező, illetve $\bar{\beta}=\alpha$ és α limesz rendszám.* □

4.12. ÁLLÍTÁS μ *véges* .

BIZONYÍTÁS Ha mégsem, akkor β_{ω_o} limesz, hiszen $\vec{\beta}$ növő. Emellett $\bar{f}=f^{\beta_{\omega.}}\neq g^{\beta_{\omega.}}=\bar{g}$ mivel $\beta_1<\beta_{\omega.}$ és β_1 maximális volt. Ekkor pedig van olyan $m<\omega_o$ és $k\in\mathcal{F}_{\beta_m,\beta_{\omega.}}$ amelyekre $\bar{f}=k\circ f^{\beta_m}$ és $\bar{g}=k\circ g^{\beta_m}$. Mivel pedig β_{m+1} is maximális, $\beta_{m+1}\ge\beta_{\omega_o}$, ellentmondás ! □

A fenti állítás azt fejezi ki, hogy tetszőleges $\alpha<\beta\leq\omega_2$, $f,g\in\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ esetén f és g legfeljebb véges helyen "különbözik", és $\beta_\mu=\alpha$ valamely $\mu<\omega_0$ számra (α rákövetkező) illetve $f^{\beta_{\mu-1}}=g^{\beta_{\mu-1}}$ (α limesz).

4.13. ÁLLÍTÁS *Ha* $\beta<\alpha\leq\omega_2$, $t<\omega_2$, $f,g\in\mathcal{F}_{\beta,\alpha}$, *és a*

$$(*)\qquad \{\ (u,v)\in U_t^\beta\times U_t^\beta : c_\beta(u,v)=\text{szürke}\ ,\ \gamma(u)<\gamma(v)\ ,\ \rho(u)<\rho(v)\ \}$$

halmaz $\aleph_1$ *számosságú, és* $\beta_1(f,g)>t$ *, akkor az alábbi halmaz:*

$$\{\ (x,y)\in(f"U_t^\beta)\times(g"U_t^\beta)\ :\ c_\alpha(x,y)=\text{szürke},\ \gamma(x)<\gamma(y)\text{ és }\rho(x)<\rho(y)\ \}$$

is $\aleph_1$ *számosságú.*

BIZONYÍTÁS Legyen $\langle\beta_j : j\leq n\rangle$ mint az előző állításban. Mivel $c_\delta(h(x),h(y))=c_{\beta_j}(x,y)$ ha $x,y\in\varphi_{\beta_j}\times\omega_1$, $\beta_j<\delta<\beta_{j+1}$, $j<n$ és $h=f^{\beta_j,\delta}=$ $=g^{\beta_j,\delta}$, így az állítást elegendő csak az $\alpha=\beta_n$ esetre igazolni. ($n=1$ esetén $(*)$, máskor n-re vonatkozó indukció.)

Legyen $\bar\beta:=\beta_n-1$, $X_1:=(f^{\beta\bar\beta})"U_t^\beta$, $X_2:=(g^{\beta\bar\beta})"U_t^\beta$ és $c_{\bar\beta}(u_j,v_j)=$ $=$szürke ha $(u_j,v_j)\in X_1\times X_2$, $j<\omega_1$, $\gamma(u_j)<\gamma(v_j)$, $\rho(u_j)<\rho(v_j)$. (Itt használjuk, hogy $\beta_1(f,g)>t$.) Legyen továbbá $f^{\beta,\beta_n}:=\mathrm{id}\restriction\varphi_{\bar\beta}$ és $g^{\beta,\beta_n}:=f_{\bar\beta}$ ($=\mathcal{F}_{\bar\beta,\beta_n}$ hasadási függvénye). Ekkor $X_1\times X_2=Z_\ell^{\bar\beta}$ valamely $\ell<\omega_1$ számra. Ha $X_2\setminus(\sigma_{\bar\beta}\times\omega_1)$ megszámlálható, akkor persze az állítás igaz.

Ha nem, akkor a 4.9.b/ Állítás konstrukciója alapján minden $x,y\in(\varphi_{\bar\beta}\setminus\sigma_{\bar\beta})\times\omega_1$ pontpárra $c:=c_{\bar\beta+1}(x,f_{\bar\beta}(y))\neq$ szürke pontosan akkor, ha (4), (5) vagy (6) teljesül, ha $c_{\bar\beta}(x,y)=$piros ((4) esetén), illetve $(x,y)=(x_h^{\bar\beta},y_h^{\bar\beta})$ valamely $h<\omega_1$-re (ha c=zöld), illetve $x=x_h^{\bar\beta}$ vagy $y=x_h^{\bar\beta}$ (ha c=piros és (5) vagy (6)).

Ez pedig azt jelenti, hogy elegendően nagy $i<\omega_1$ esetén az $(x^{\bar\beta}_{\ell,i}, f_{\bar\beta}(y^{\bar\beta}_{\ell,i}))\in(f''U^{\beta}_{t})\times(g''U^{\beta}_{t})$ párok megfelelőek mert c_α szerinti színük szürke. □

4.14. ÁLLÍTÁS *$\varphi_{\omega_2}\times\omega_1$ -ben nincs $\omega_3\omega_1$ típusú, C -re nézve homogén piros halmaz.*

BIZONYÍTÁS Indirekte tegyük fel, hogy $X\subseteq\varphi_{\omega_2}\times\omega_1$ mégis ilyen. Legyenek $X_i\subseteq X$ $(i<\omega_3)$ olyanok, melyekre $|X_i|=\omega_1$, $\gamma(x_1)<\gamma(x_2)$ és $\rho(x_1)<\rho(x_2)<\rho(y)$ ha $x_1,x_2\in X_i$, $y\in X_j$, $i<j<\omega_3$. Legyen továbbá $i<\omega_3$ esetén $\delta_i<\omega_2$ a legkisebb olyan $\delta<\omega_2$ amelyre $X'_i=f''_i(\bar X_i)$ valamely $f_i\in\mathcal{F}_{\delta,\omega_2}$ függvényre és $X'_i\in[X_i]^{\omega_1}$, $\bar X_i\subseteq\varphi_\delta$ halmazokra.

Most $2^{\aleph_1}=\aleph_2$ miatt $\delta_i=\beta$, $X_i=X$ és $\bar X_i=\bar X$ minden $i<\omega_3$ indexre feltehető. A továbbiakban egyszerűen X_i -t írunk X_i' helyett $(i<\omega_3)$.

A 4.10 állítás szerint $\bar X$ nem homogén piros. Így C definíciója miatt van olyan $Y\subseteq(\bar X)^2$, $|Y| = \omega_1$, amelyre minden (x,x'), $(y,y')\in Y$ párra $c_\beta(x,y)$=szürke és az x , x', y , y' pontok mind különbözőek. Ekkor persze $\bar X=U^{\beta}_{t}$ valamely $t<\omega_2$ indexre.

Minden $i<\omega_3$ és $\alpha\in[\beta,\omega_2)$ esetén egyértelműen van egy $\bar X^{\alpha}_i\subseteq\varphi_\alpha$ részhalmazunk, amelyre $X_i=f''\bar X^{\alpha}_i$ valamely $f\in\mathcal{F}_{\alpha\omega_2}$ függvényre. Legyen $i,j<\omega_3$ esetén $\chi(i,j)$ a legkisebb $\chi\in[\beta,\omega_2)$ amelyre $\bar X^{\chi}_i\neq\bar X^{\chi}_i$. Könnyen belátható, hogy $\chi(i,j)$ mindig rákövetkező. Legyen most $\beta t:=\max\{\beta,t\}+1$. Ekkor $2^{\aleph_1}=\aleph_2$ miatt $[\varphi_{\beta t}]^{\aleph_1}$ számossága $\aleph_2$, vagyis van $i<j<\omega_3$: $\chi(i,j)>\beta,t$.

Ha $\chi(i,j)=\beta^*+1$, akkor a 4.13 Állítás és χ definíciója alapján $(x^{\beta^*}_\ell,y^{\beta^*}_\ell)\in Z^{\beta^*}_\ell$ létezik (lásd a 4.11. definíciót), ahol $Z^{\beta^*}_\ell=(\bar f_i''\bar X)\times(\bar f_j''\bar X)$ és $f_i=k\circ\mathrm{id}\restriction\varphi_{\beta^*}\circ\bar f_i$, $f_j=k\circ f_{\beta^*}\circ\bar f_j$ ahol $\bar f_i,\bar f_j\in\mathcal{F}_{\beta,\beta^*}$, $k\in\mathcal{F}_{\beta^*+1,\omega_2}$. Ekkor

$c_\chi\left[x^{\beta^*}_\ell, f_{\beta^*_{-1}}(y^{\beta^*}_\ell)\right]$=zöld, azaz $C\left[k\circ\mathrm{id}\restriction\varphi_{\beta^*}(x^{\beta^*}_\ell), k\circ f_{\beta^*}(y^{\beta^*}_\ell)\right]$=zöld

ami ellentmondás, hiszen $k\circ\mathrm{id}\restriction\varphi_{\beta^*}(x^{\beta^*}_\ell)\in X_i\subseteq X$ és $k\circ f_{\beta^*}(y^{\beta^*}_\ell)\in X_j\subseteq X$ □

Ezzel a 4.8. Tétel állítását is beláttuk. ■

5. NAGYOBBRÉSŰ MOCSARAK LÉTEZÉSE

Dolgozatunk ezen utolsó fejezetében megmutatjuk, hogy eredeti, Jensen-féle nagyobbrésű mocsarak létezéséből az általunk definiált egyszerűsített mocsarak létezése is következik (5.7.Tétel). Ebből azonnal adódik, hogy pl. V=L esetén minden reguláris κ és véges n számosságra létezik (κ,n)-egyszerűsített mocsár.

Azonban az 5.7.Tétel bizonyításához nem Jensen eredeti mocsaraiból konstruálunk egyszerűsített mocsarakat, hanem Ch.Morgan [Mo] -ban bevezetett, szintén egyszerűsített mocsaraknak nevezett struktúráiból. Ez utóbbiakról Morgan megmutatta, hogy létezésük ekvivalens a Jensen-féle mocsarak létezésével. Úgy tűnik, Velleman [Ve8]-beli forszolásához hasonló, bonyolultabb módszerrel nagyobbrésű mocsarak létezésének konzisztenciája közvetlenül is belátható, sőt teljes lineáris sorozatokkal is. Azonban mi azért választottuk az előző módszert, hogy bemutathassuk a mocsarak definíciójának egy újabb változatát.

Köszönetemet fejezem ki Daniel Velleman professzornak, aki az Amherst College-ben (USA) tett látogatásom alkalmával ismertetett meg Ch. Morgan eredményeivel, 1991 májusában, jelen dolgozatom benyújtása előtt néhány hónappal.

Az érdemi munka előtt néhány jelölésben állapodunk meg.

5.0. JELÖLÉSEK *A továbbiakban* $\underline{s}$ *mindig rendszámokból álló sorozat,* $s:=\langle s_1,\dots,s_j\rangle$*,* $\| s\| :=j$ *a sorozat* **hossza**[1]. $\emptyset$ *az üres sorozat,* $\|\emptyset\| =0$. *A* ξ *rendszámot és az egytagú* $\langle\xi\rangle$ *sorozatot sohasem keverjük össze.* $\underline{s}\hat{}\underline{r}$ *jelöli az* $\underline{s}$ *és* $\underline{r}$ *sorozatok egymás után fűzésével (konkatenációjával) kapott sorozatot. Legyen végül* $k\le|\underline{s}|$ *esetén* $\underline{s}\restriction k:=\langle s_1,s_2,\dots,s_k\rangle$ [2], $\underline{s}\restriction 0:=\emptyset$*, míg* $\underline{s}\restriction :=\underline{s}\restriction(|\underline{s}|-1)$*, és persze* $\langle\xi\rangle\restriction=\emptyset$.□

Most szó szerint idézzük Morgan [Mo] definícióját. Mindössze néhány kiemelést és lábjegyzetet fűztünk az eredeti definícióhoz, és megpróbáltuk [Mo] összes sajtóhibáját kijavítani.

5.1. DEFINÍCIÓ [Mo] *Legyen* n *véges,* κ *végtelen számosság. A*

$$\langle\ \langle\theta^i_\alpha:\alpha\le\kappa^{+i}\rangle\ ,\ \langle\mathcal{F}^i_{\alpha,\beta}:\alpha\le\beta\le\kappa^{+i}\rangle\ :\ i<n\ \rangle$$

struktúra **(κ,n) M-egyszerűsített mocsár** *, ha az alábbi* (M+) *és* (M0)-(M6) *tulajdonságok mindegyike teljesül tetszőleges* $i<n$ *és* $\alpha\le\beta\le\kappa^{+i}$ *rendszámokra, valamint minden* $f\in\mathcal{F}^i_{\alpha,\beta}$ *függvénycsaládra:*

(M+) a továbbiakban $\underline{s}=\langle s_1,\dots,s_j\rangle$ olyan sorozat, amelyre $|\underline{s}|<n-(i+1)$ [3], esetleg $\underline{s}=\emptyset$, de $s\neq\emptyset$ esetén $s_1\le\theta^i_\alpha$ és $s_{k+1}\le\theta^{i+k+1}_{s_k}$ ha $0<k<j=|s|$.[4] A fentiek teljesülése esetén mindössze csak $(\underline{s})\in(+)$ -t írunk.

---

(1) Jelen fejezetben mi a kényelem miatt indexeljük a sorozat elemeit 1-től j-ig, a szokásos, és [Mo]-ban is használt 0,...,j-1 indexek helyett.

(2) Vegyük észre: $\underline{s}\restriction k$ mostani definíciója is eltér a szokásostól.

(3) Morgan eredeti definíciójában $|\underline{s}|=n-(i+1)$ is megengedett, azonban ez (M0)-ban ellentmondásra vezetne.

(4) Mi a könnyebb írásmód kedvéért ([Mo]-tól eltérően) kivételesen $\underline{s}=\emptyset$ esetén megengedjük az s_0 szimbólumot, aminek mindig a rögzített α-át feleltetjük meg.

(MO) $f\in\mathcal{F}^{i}_{\alpha,\beta}$ függvények diszjunkt úniója:

$$\mathbf{f} = \{f\}\cup\bigcup\left\{f_{(\underline{s})\sigma}:\sigma\leq\theta^{i+|s|}_{s_j},\ j=|\underline{s}|,\ \underline{s}\in(+)\right\}\cup\bigcup\left\{f_{(\underline{s})\sigma,\tau}:\sigma\leq\tau\leq\theta^{i+|s|}_{s_j},\ j=|\underline{s}|,\ \underline{s}\in(+)\right\}$$

ahol $f:\theta^{i}_{\alpha}+1\to\theta^{i}_{\beta}+1$ és $f_{(\underline{s})\sigma}:\theta^{i+|s|+1}_{\sigma}+1\to\theta^{i+|s|+1}_{f_{s}(\sigma)}+1$

rendezéstartó leképezések, $f_{(\underline{s})\sigma,\tau}:\mathcal{F}^{i+|s|+1}_{\sigma,\tau}\to\mathcal{F}^{i+|s|+1}_{f_{s}(\sigma),f_{s}(\tau)}$

függvény, ahol $f_{\emptyset}=f$ és $f_{\underline{s}}=f_{(\underline{s}\restriction)s_j}$ ha $j=|\underline{s}|$.[5]

Jelölések: f helyett $f_{\emptyset}$ -et, és **f** helyett egyszerűen csak f -et írunk.[6] Ezenkívül a továbbiak könnyebb megfogalmazása végett $\underline{s}\in(+)$, $|\underline{s}|=j<n-(i+1)$ esetén legyen

$$f^{\complement}(\underline{s}) := \langle f_{\emptyset}(s_1),f_{s_1}(s_2),\ldots,f_{\underline{s}\restriction}(s_j)\rangle \qquad \square\ ^{(7)}$$

---

(5) Ez tulajdonképpen az $\underline{s}\in(+)$, $|\underline{s}|<n-(i+1)$ sorozatokra definiálja, $|\underline{s}|$-re vonatkozó indukcióval az $f_{\underline{s}}$ függvényeket: $f_{\emptyset}:=f$ és $f_{\underline{s}}:=f_{(\underline{s}\restriction)s_j}$ ahol $j=|\underline{s}|$. Vagyis $f_{(\underline{s})\sigma}=f_{\underline{s}^\frown\sigma}$ és $f=f_{\emptyset}$. [Mo] itt idézett részében lényegében ugyanígy definiálja az $f_{\underline{s}}(\xi)$ értékeket (rövidítésként). Azonban a (4a) pont lábjegyzetében szereplő Definíció ettől lényegesen különbözik, hiszen a mostani definíció szerint pl. $f_{\xi}\notin\mathcal{F}^{i+1}_{\xi,f(\xi)}$.

(6) E jelölésünk nem szerepel [Mo]-ban, csak a precízebb tárgyalás miatt vezetjük be. Továbbá az előző lábjegyzet alapján nyugodtan írhatnánk $f_{(\underline{s})\sigma}$ helyett $f_{\underline{s}^\frown\langle\sigma\rangle}$ -át is, azonban ez a jelölés a (4a) ponthoz fűzött lábjegyzetben szereplő Definícióban más értelmet kap.

(7) [Mo]-ban $f^{\complement}$ helyett $f^{\downarrow}$ szerepel. Mi csak a szövegszerkesztő hiányosságai miatt választottunk más jelölést.

Természetesen $f\in\mathcal{F}^i_{\beta,\gamma}$, $g\in\mathcal{F}^i_{\alpha,\beta}$, $\alpha\le\beta\le\gamma\le\kappa^{+i}$ esetén $f\circ g\in\mathcal{F}^i_{\alpha,\gamma}$ az alábbi:

$$f\circ g := f_\emptyset\circ g_\emptyset \cup\bigcup\left\{f_{g^{\subset}(\underline{s})^\frown g_{\underline{s}}(\sigma)}\circ g_{s^\frown\sigma} \ :\ \sigma\le\theta^{i+|s|}_{s_j}, j=|\underline{s}|, \underline{s}\in(+)\right\}\cup$$

$$\cup\bigcup\left\{f_{(g^{\subset}(\underline{s}))\ g_{\underline{s}}(\sigma),g_{\underline{s}}(\tau)}\circ g_{(\underline{s})\sigma,\tau} : \sigma\le\tau\le\theta^{i+|s|}_{s_j}, j=|\underline{s}|, \underline{s}\in(+)\right\}$$

(M1) $(\forall j\le i<n)\ (\forall\alpha\le\beta<\kappa^{+j})\ \ \theta^i_\alpha<\kappa^{+j}$ és $\theta^i_{\kappa^{+i}}=\kappa^{+(i+1)}$ és[8] $|\mathcal{F}^i_{\alpha,\beta}|<\kappa^{+i}$

(M2) $(\forall i<n)\ (\forall\alpha\le\beta\le\kappa^{+i})\ (\forall f\in\mathcal{F}^i_{\alpha,\beta})$

(a) $(\forall\underline{s}\in(+), j=|\underline{s}|)\ (\forall\xi\le\sigma\le\tau\le\theta^{i+|s|}_{s_j})\ (\forall b\in\mathcal{F}^{i+|s|+1}_{\xi,\sigma})\ (\forall\mathcal{F}^{i+|s|+1}_{\sigma,\tau})$

$$f_{(\underline{s})\xi,\tau}(c\circ b) = f_{(\underline{s})\sigma,\tau}(c)\circ f_{(\underline{s})\xi,\sigma}(b)$$

(b) $(\forall\underline{s}\in(+), j=|\underline{s}|)\ (\forall\xi\le\tau\le\theta^{i+|s|}_{s_j})\ (\forall b\in\mathcal{F}^{i+|s|+1}_{\xi,\tau})$

$$f_{(\underline{s})\tau}\circ b = f_{(\underline{s})\xi,\tau}(b)\circ f_{(\underline{s})\xi}$$

(c)[9] $(\forall k<n-(i+1))\ (\forall\underline{s}\in(+))$: ha $|\underline{s}|=k$, $\xi=s_k$,

és ha $\mathcal{F}^{i+k}_{\xi,\xi+1}$ hasadási pontja σ_ξ , akkor $f_{(\underline{s})}(\sigma_\xi) = \sigma_{f_{(s\restriction)}(\xi)}$

(A hasadási pontot (M4b)-ben definiáljuk.)

(M3) $(\forall i<n)\ (\forall\alpha\le\beta\le\gamma\le\kappa^{+i})$ $\quad \mathcal{F}^i_{\alpha,\gamma} = \mathcal{F}^i_{\beta,\gamma}\circ\mathcal{F}^i_{\alpha,\beta}$

$:= \{\ f\circ g\ :\ f\in\mathcal{F}^i_{\beta,\gamma}\ ,\ g\in\mathcal{F}^i_{\alpha,\beta}\ \}$

(M4) $(\forall i<n)(\forall\alpha\le\kappa^{+i})\ \mathcal{F}^i_{\alpha,\alpha}=\{id\}$ és $(\forall\alpha<\kappa^{+i})\ \mathcal{F}^i_{\alpha,\alpha+1}=\{d: d\approx id\}\cup\{h^i_\alpha\}$

ahol id jelentése világos, $\approx$ -t és h^i_α -t alább definiáljuk:

---

(8) [Mo] IV.fejezetében csak tévedésből maradhatott ki az $|\mathcal{F}^i_{\alpha,\beta}|<\kappa^{+i}$ feltétel,hiszen [Mo] többi, egy és kétrésű mocsarakra vonatkozó fejezeteiben ez szerepel.

(9) Mivel (+)-ben minden lehetséges sorozat szerepel, ezért a "$\forall s\in(+)$" feltételből az alábbi is következik:
" $(\forall r_1\le\theta_\alpha)(\forall r_2\le\theta_{r_1})(\forall r_3\le\theta_{r_2})\dots(\forall\xi\le\theta_{r_k})\ (\exists\underline{s}\in(+))\ \underline{s}=\langle r_1,r_2,\dots,\xi\rangle$ "

[Mo] eredeti (2c) definíciója szó szerint a következő (NB.[Mo]-ban $\underline{s}=\langle s_o,\dots,s_{k-1}\rangle$ ha $|\underline{s}|=k$) : " $\forall\xi\ \exists s\ \exists k=lh(s)$ such that $\xi=s_{k-1}$ and if σ_ξ is the splitting point of $\mathcal{F}^{i+k}_{\xi,\xi+1}$ then $f_{(s)}(\sigma_\xi)=\sigma_{f_{(s\restriction(k-1))}(\xi)}$."

(4a) $d \approx id$, azaz **d majdnem identitás** $(d \in \mathcal{F}^i_{\alpha,\alpha+1})$, ha $d_\emptyset \restriction \theta^i_\alpha = id \restriction \theta^i_\alpha$, $d_\xi \in \mathcal{F}^{i+1}_{\xi, d_\emptyset(\xi)}$ ha $\xi \le \theta^i_\alpha$ [10],[11], $d_{(\theta^i_\alpha \frown \underline{s})\xi} = \left(d_{\theta^i_\alpha}\right)_{(\underline{s})\xi}$ ha $\theta^i_\alpha \frown \underline{s} \in (+)$ és $\xi \le \theta^{i+|s|+1}_\alpha$, végül $d_{(\underline{s})\xi} = id$ ha $\underline{s} \in (+)$ és $s_0 < \theta^i_\alpha$ □

(4b) $f \in \mathcal{F}^i_{\alpha,\alpha+1}$ **shift (emelés**, $i<n, \alpha \le \kappa^{+i}$ **tetszőlegesek)** , ha valamilyen $\sigma = \sigma^i_\alpha < \theta^i_\alpha$ rendszámra (ún. **splitting point, hasadási pont**) $f_\emptyset \restriction \sigma = id \restriction \sigma$, $f_\emptyset(\sigma+\tau) = \theta^i_\alpha + \tau$ ha $\sigma+\tau \le \theta^i_\alpha$,
$f_{(\underline{s})\xi} = id$ ha $s_1 < \sigma$ vagy ($s=\emptyset$ és $\xi < \sigma$), $f_\sigma \in \mathcal{F}^{i+1}_{\sigma, \theta^i_\alpha}$ (NB. $f_\emptyset(\sigma) = \theta^i_\alpha$),
$f_{(\sigma \frown \underline{s})\xi} = (f_\sigma)_{(\underline{s})\xi}$ és $f_{\xi\zeta}{}''\mathcal{F}^{i+1}_{\xi,\zeta} = \mathcal{F}^{i+1}_{f_\emptyset(\xi), f_\emptyset(\zeta)}$ ha $\xi \le \zeta \le \theta^i_\alpha$ □

h^i_α pedig egy rögzített shift. □ [12]

(M5) $(\forall i<n)\ (\forall \alpha \le \kappa^{+i}, \alpha$ limesz$)\ (\forall \beta_0, \beta_1 \le \alpha)\ (\forall f_0 \in \mathcal{F}^i_{\beta_0,\alpha}, f_1 \in \mathcal{F}^i_{\beta_1,\alpha})$

$(\exists \gamma)\ (\exists f'_0 \in \mathcal{F}^i_{\beta_0,\gamma}, f'_1 \in \mathcal{F}^i_{\beta_1,\gamma})\ (\exists g \in \mathcal{F}^i_{\gamma,\alpha})$

$$f_0 = g \circ f'_0 \quad \text{és} \quad f_1 = g \circ f'_1$$

(M6) $(\forall i<n)\ (\forall \alpha \le \kappa^{+i}, \alpha$ limesz$)$ [13]

(6a) $\theta^i_\alpha = \cup\{ f_\emptyset{}''\theta^i_\beta : f \in \mathcal{F}^i_{\beta\alpha}, \beta<\alpha\}$

---

(10) [Mo]-ban nem szerepel sem d_ξ sem $d_{\theta^i_\alpha}$ definíciója. Ez a következő lehet:

<u>**DEFINÍCIÓ**</u> Tetszőleges $i<n$, $\alpha \le \beta \le \kappa^{+i}$, $f \in \mathcal{F}^i_{\alpha,\beta}$ és $\tau \le \theta^i_\alpha$ esetén legyen

$$f_\tau := \{f_{(\emptyset)\tau}\} \cup \bigcup\{f_{(\underline{s})\xi} \subset f : s_1 = \tau\} \cup \bigcup\{f_{(\underline{s})\xi\zeta} \subset f : s_1 = \tau\} . \quad \square$$

Ekkor értelmes az $f_\tau \in \mathcal{F}^{i+1}_{\tau, f_\emptyset(\tau)}$ ill. a $d_\xi \in \mathcal{F}^{i+1}_{\xi, d_\emptyset(\xi)}$ feltétel.

(11) Az előző feltétel és a (4) pont alapján $d_\xi = id \in \mathcal{F}^{i+1}_{\xi,\xi}$ ha $\xi \le \theta^i_\alpha$.

(12) $\mathcal{F}^i_{\alpha,\alpha+1}$ -ben tehát pontosan egy shift van a lehetségesek közül, és ezt jelöljük h^i_α -val.

(13) [Mo] -ban "$\forall \alpha < \kappa^{+i} \ldots$" áll, ami nyilvánvalóan sajtóhiba.

(6b) $(\forall \underline{s}\in(+))\ (\forall\xi\le\theta^{i+|\underline{s}|}_{s_j},\ j=|\underline{s}|)$

$$\theta^{i+|\underline{s}|+1}_{\xi} = \cup\Big\{ f_{(\underline{s}')\xi'}"\theta^{i+|\underline{s}'|+1}_{\xi'} : f\in\mathcal{F}^{i}_{\beta\alpha},\ f_{\underline{s}'}(\xi')=\xi,\ f^{c}(\underline{s}')=\underline{s},\ \beta<\alpha\Big\}$$

(6c) $(\forall \underline{s}\in(+))\ (\forall\xi\le\tau\le\theta^{i+|\underline{s}|}_{s_j},\ j=|\underline{s}|)$

$$\mathcal{F}^{i+|\underline{s}|+1}_{\xi\tau} = \cup\Big\{ f_{(\underline{s}')\xi'\tau'}"\mathcal{F}^{i+|\underline{s}'|+1}_{\xi'\tau'} : f\in\mathcal{F}^{i}_{\beta\alpha},\ f_{\underline{s}'}(\xi')=\xi,\ f_{\underline{s}'}(\tau')=\tau,\ f^{c}(\underline{s}')=\underline{s},\ \beta<\alpha\Big\}$$

Vége az 5.1. Definíciónak. ∎

Most megmutatjuk, hogy a Morgan-féle egyszerűsített mocsarakból hogyan lehet dolgozatunk 1.c. fejezetében definiált egyszerűsített mocsarakat konstruálni. Jegyezzük meg, hogy [Mo] -ban ill. az előző definícióban leírt mocsarakat (κ,n) **M-egyszerűsített** mocsaraknak, míg általunk az 1.31. Definícióban leírtakat csupán (κ,n) **egyszerűsített** mocsaraknak ill. mocsárkezdeményeknek nevezzük !

5.2. TÉTEL *Legyen* $n\le\omega_0$ *és* κ *reguláris számosság és legyen* $\mathfrak{U} = \langle\ \langle\theta^{i}_{\alpha}:\alpha\le\kappa^{+i}\rangle, \langle\mathcal{F}^{i}_{\alpha,\beta}:\alpha\le\beta\le\kappa^{+i}\rangle\ :\ i<n\ \rangle$ (κ,n) *M-egyszerűsített mocsár. Ekkor létezik* (*$\mathfrak{U}$-ből konstruálható*) *- az 1.31. Definíció szerinti -* (κ,n) *-egyszerűsített mocsár.*

BIZONYÍTÁS Az előző definíció pontjaira gyakran kell majd hivatkoznunk, amikre csak röviden **(M+)**,**(M0)**-**(M6)**-al utalunk.

A KONSTRUKCIÓ : $\mathfrak{U}$ felhasználásával t -re vonatkozó indukcióval $(1\le t\le n)$ definiáljuk az $\mathcal{N}^{t}_{\xi}$ egyszerűsített $(t-1)$ -ed résű mocsárkezdeményeket és a köztük ható beágyazások $\mathcal{G}^{t}_{\xi\zeta}$ családjait $\xi\le\zeta\le\kappa^{+(n-t)}$ indexekre (ahol persze $\mathcal{N}^{t}_{\xi}\le\mathcal{N}^{t}_{\zeta}$ ha $\xi\le\zeta\le\kappa^{+(n-t)}$) olymódon, hogy az $\mathcal{M}^{t}_{\tau}:=\langle\langle\mathcal{N}^{t}_{\xi}:\xi\le\tau\rangle,\langle\mathcal{G}^{t}_{\xi\zeta}:\xi\le\zeta\le\tau\rangle\rangle$ struktúrák minden $\tau\le\kappa^{+(n-t)}$

rendszámra t-edrésű mocsárkezdemények, sőt $\mathcal{M}^t_{\kappa^{+(n-t)}}$ egy $(\kappa^{+(n-t)},t)$ -(egyszerűsített) mocsár. Vagyis a t=n esetben kapott $\mathcal{M}^n_\kappa$ struktúra nem más, mint egy (κ,n) -egyszerűsített mocsár. $\mathcal{G}^t_{\xi\zeta}$ minden g eleme $\varphi(f)$ alakú lesz, ahol $f\in\mathcal{F}^{n-t}_{\xi\zeta}$.

Legyen tehát $\mathcal{M}^o_\tau:=\tau+1$ ha $\tau\le\kappa^{+n}$, $\mathcal{N}^1_\xi:=\mathcal{M}^o_{\theta^{n-1}_\xi}=\theta^{n-1}_\xi+1$ ha $\xi\le\kappa^{+n-1}$, $\mathcal{G}^1_{\xi\zeta}:=\mathcal{F}^{n-1}_{\xi\zeta}$ ha $\xi\le\zeta\le\kappa^{+n-1}$, $\mathcal{M}^1_\tau:=\langle\langle\mathcal{N}^1_\xi:\xi\le\tau\rangle,\langle\mathcal{F}^{n-1}_{\xi\zeta}:\xi\le\zeta\le\tau\rangle\rangle$ ha $\tau\le\kappa^{+n-1}$.

5.3. **ÁLLÍTÁS** *$\mathcal{M}^1_\tau$ egyszerűsített 1-résű mocsárkezdemény ha $\tau\le\kappa^{+(n-1)}$, és $\mathcal{N}^1_{\kappa^{+(n-1)}}$ pedig $(\kappa^{+(n-1)},1)$ -egyszerűsített mocsár.*

BIZONYÍTÁS (M+) miatt csak $\emptyset\in(+)$, és így (M0) miatt $\mathcal{G}^1_{\xi\zeta}=\mathcal{F}^{n-1}_{\xi\zeta}$ elemei csak $\theta^{n-1}_\xi\to\theta^{n-1}_\zeta$ alakú függvényekből állnak (azaz $f=f_\emptyset$ ha $f\in\mathcal{F}^{n-1}_{\xi\zeta}$), amik rendezéstartók. (M1) miatt $\theta^{n-1}_\xi<\kappa^{+(n-1)}$ és $|\mathcal{F}^{n-1}_{\xi\zeta}|<\kappa^{+(n-1)}$ ha $\xi\le\zeta<\kappa^{+(n-1)}$, valamint $\theta^{n-1}_{\kappa^{+(n-1)}}=\kappa^{+n}$. (M3) miatt $\mathcal{F}^{n-1}_{\xi,\eta}=\mathcal{F}^{n-1}_{\zeta,\eta}\circ\mathcal{F}^{n-1}_{\xi,\zeta}$ ha $\xi\le\zeta\le\eta\le\kappa^{+n-1}$. (M4) miatt $\mathcal{F}^1_{\xi,\xi+1}=\{id_\approx,h_\xi\}$ és $id_\approx\restriction\theta^{n-1}_\xi=id\restriction\theta^{n-1}_\xi$, $id_\approx(\theta^{n-1}_\xi)=\theta^{n-1}_{\xi+1}$, $h_\xi\restriction\sigma_\xi=id\restriction\sigma_\xi$ és $h_\xi(\sigma_\xi+\tau)=\theta^{n-1}_\xi+\tau$ ha $\sigma_\xi+\tau\le\theta^{n-1}_\xi$, valamilyen $\sigma_\xi<\theta^{n-1}_\xi$ rendszámra, és minden $\xi<\kappa^{+(n-1)}$ indexre. (M5) éppen az amalgám tulajdonság, (M6) pedig a fedési tulajdonság. □

INDUKCIÓS LÉPÉS

Tegyük fel most, hogy már megkonstruáltuk az $\mathcal{N}^t_\xi$ egyszerűsített (t-1)-ed résű $(1\le t<n)$ mocsárkezdeményeket és a köztük ható $\mathcal{N}^t_\xi\to\mathcal{N}^t_\zeta$ beágyazások $\mathcal{G}^t_{\xi\zeta}$ családjait minden $\xi\le\zeta\le\kappa^{+(n-t)}$ indexre oly módon, hogy $\mathcal{N}^t_\xi\le\mathcal{N}^t_\zeta$ ha $\xi\le\zeta\le\kappa^{+(n-t)}$, és az $\mathcal{M}^t_\tau:=\langle\langle\mathcal{N}^t_\xi:\xi\le\tau\rangle,\langle\mathcal{G}^t_{\xi\zeta}:\xi\le\zeta\le\tau\rangle\rangle$ struktúrák minden $\tau\le\kappa^{+(n-t)}$ rendszámra t-edrésű mocsárkezdemények, sőt $\mathcal{M}^t_{\kappa^{+(n-t)}}$ egy $(\kappa^{+(n-t)},t)$ - (egyszerűsített) mocsár. Ezenkívül $\mathcal{G}^t_{\xi\zeta}=\varphi''\mathcal{F}^{n-t}_{\xi\zeta}$.

Legyen ekkor $\mathcal{N}_\alpha^{t+1}:=\mathcal{M}^t_{\theta_\alpha^{n-(t+1)}}$ ha $\alpha\leq\kappa^{+n-(t+1)}$. Mindenekelőtt definiálnunk kell $\mathcal{G}^{t+1}_{\alpha\beta}$ elemeit, azaz minden $f\in\mathcal{F}^{n-(t+1)}_{\alpha\beta}$ (Morgan féle) függvényre megadjuk a $\varphi(f):\mathcal{N}_\alpha^{t+1}\to\mathcal{N}_\beta^{t+1}$ (1.28.Def.szerinti) beágyazást, minden $\alpha\leq\beta\leq\kappa^{+n-(t+1)}$ indexre.

Legyen tehát $\alpha\leq\beta\leq\kappa^{+n-(t+1)}$ és $f\in\mathcal{F}^{n-(t+1)}_{\alpha\beta}$ rögzítettek. Először minden $\underline{s}\in(+)$, $|\underline{s}|\leq t$ sorozatra, $|\underline{s}|$-re vonatkozó csökkenő indukcióval definiáljuk a $\varphi(f,\underline{s})$ függvényeket: Ha $\underline{s}=\langle s_1,\dots,s_t\rangle$, akkor legyen $\varphi(f,\underline{s}):=(\varphi(f,\underline{s}))^-:=f_{(\underline{s}\restriction)s_t}$. Az $|\underline{s}|<t$, $\underline{s}=\langle s_1,\dots,s_j\rangle$ esetben pedig legyen

$$\varphi(f,\underline{s}) := (\varphi(f,\underline{s}))^- \cup (\varphi(f,\underline{s}))^\to \cup (\varphi(f,\underline{s}))^\Rightarrow$$

ahol

$$(\varphi(f,\underline{s}))^- := f_{(\underline{s}\restriction)s_j},$$

$$(\varphi(f,\underline{s}))^\to = \{ (\varphi(f,\underline{s}))_\xi : \xi\leq\theta^{n-(t+1)+j}_{s_j} \}$$

$$:= \{ \varphi(f,\underline{s}\hat{\ }\langle\xi\rangle) : \xi\leq\theta^{n-(t+1)+j}_{s_j} \}$$

és

$$(\varphi(f,\underline{s}))^\Rightarrow = \{ (\varphi(f,\underline{s}))_{\xi\zeta} : \xi\leq\zeta\leq\theta^{n-(t+1)+j}_{s_j} \}$$

ahol legyen $(\varphi(f,\underline{s}))_{\xi\zeta} : \mathcal{G}^{t-|\underline{s}|}_{\xi,\zeta} \to \mathcal{G}^{t-|\underline{s}|}_{h(\xi),h(\zeta)}$ ($h:=(\varphi(f,\underline{s}))^-$)

$$\varphi(b) \mapsto \varphi(f_{(\underline{s})\xi,\zeta}(b)) \quad \text{ha } \xi\leq\zeta\leq\theta^{n-(t+1)+j}_{s_j}$$

(NB.: $b \in \mathcal{G}^{t-|\underline{s}|}_{\xi\zeta} = \varphi''\mathcal{F}^{n-(t-|\underline{s}|)}_{\xi\zeta}$ és $f_{(\underline{s})\xi,\zeta}(b) \in \mathcal{G}^{t-|\underline{s}|}_{h(\xi),h(\zeta)} =$
$= \varphi''\mathcal{F}^{n-(t-|\underline{s}|)}_{h(\xi),h(\zeta)}$, $t+1-|\underline{s}|-1=t-|\underline{s}|>0$.)

Természetesen, mint sejthető: $\varphi(f):=\varphi(f,\emptyset)$ ahol $(\varphi(f,\emptyset))^-:=f_\emptyset$.
Így definiáltuk $\mathcal{G}^{t+1}_{\alpha\beta}$ elemeit.

A KONSTRUKCIÓ HELYESSÉGE

Mielőtt az 5.6.Segédállításban belátnánk, hogy $\mathcal{G}^{t+1}_{\alpha,\beta}$ elemei valóban $\mathcal{N}_\alpha^{t+1}\to\mathcal{N}_\beta^{t+1}$ beágyazások ($\alpha\leq\beta\leq\kappa^{+n-(t+1)}$), egy meglepő lemmát igazolunk.

5.4. ÁLLÍTÁS $\varphi(f)=f$ *ha* $f\in\mathcal{F}^{n-(t+1)}_{\alpha\beta}$, $\alpha\leq\beta\leq\kappa^{+n-(t+1)}$, $t<n$.

BIZONYÍTÁS Az állítás nem is olyan meglepő ha figyelembe vesszük, hogy f és $\varphi(f)$ mindegyike olyan függvények diszjunkt úniója, melyek vagy rendszám→rendszám rendezéstartóak, vagy ilyen függvényeket rendelnek egymáshoz.

Az állítást t-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. A t=1 eset definíció szerint igaz. Legyen most $\alpha\leq\beta\leq\kappa^{+n-(t+1)}$, $f\in\mathcal{F}^{n-(t+1)}_{\alpha\beta}$, $1\leq t<n$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\varphi(f)\in\mathcal{F}^{t+1}_{\alpha\beta}$ pontosan az $f_{\emptyset}$, $f_{(\underline{s})\xi}$ és a $f_{(\underline{s})\xi\zeta}$ függvényekből áll, ahol $\underline{s}\in(+)$, $\xi\leq\zeta\leq\theta^{i+|s|}_{s_j}$, $j=|\underline{s}|$, $i=n-(t+1)$. A definíció szerint $\varphi(f)$ nem más, mint $(\varphi(f,\underline{s}))^{-}$, $(\varphi(f,\underline{s}))^{\rightarrow}$ és $(\varphi(f,\underline{s}))^{\Rightarrow}$ alakú függvény - halmazok diszjunkt úniója, ahol $\underline{s}\in(+)$. $\varphi(f)$ definícióját alaposabban szemügyre véve láthatjuk, hogy a $(\varphi(f,\underline{s}))^{-}$ alakú függvényhalmazok éppen az $f_{(\underline{s})\xi}$ függvényeket tartalmazzák, ezeket a $(\varphi(f,\underline{s}))^{\rightarrow}$ alakú függvényhalmazok gyűjtik össze, az $|\underline{s}|$-re csökkenő indukció alapján. Hasonlóan, a $(\varphi(f,\underline{s}))^{\Rightarrow}$ alakú függvényhalmazok pedig az $f_{(\underline{s})\xi\zeta}$ függvényeket tartalmazzák, hiszen a t-re vonatkozó indukció szerint $\varphi(b)=b$ ha $b\in\mathcal{F}^{k}_{\xi\zeta}$ és $k\leq t$. E $f_{(\underline{s})\xi\zeta}$ függvényeket szintén a $(\varphi(f,\underline{s}))^{\rightarrow}$ alakú függvényhalmazok gyűjtik össze. Végül $\varphi(f)^{-}=f_{\emptyset}$. □

KÖVETKEZMÉNYEK A fenti állításból azonnal kapjuk, hogy $(\varphi(f,\underline{s}))_{\xi\zeta}=f_{(\underline{s})\xi,\zeta}$ minden lehetséges $\underline{s},\xi,\zeta$ esetén, valamint:

$$f_{\xi}=\{f_{(\emptyset)\xi}\}\cup\bigcup\left\{f_{(\underline{s})}\cup f_{(\underline{s})\sigma}\cup f_{(\underline{s})\sigma,\tau}:\sigma\leq\tau\leq\theta^{i+|s|}_{s_j},\ j=|\underline{s}|,\ \underline{s}\in(+),\ s_1=\xi\right\}$$

ha $\xi\leq\theta^{n-(t+1)}_{\alpha}$, sőt a fenti egyenlőségben teljesen mindegy, hogy f_{ξ} az 1.28. Definíciónak megfelelő, az előző oldalakon definiált $\varphi(f)_{\xi}$ függvényt avagy [Mo]-nak a 10) lábjegyzetünkben pótolt meghatározását jelöli. A fenti egyenlőségeket az alábbiakban sokszor fogjuk használni, minden külön jelzés nélkül. Sőt, a továbbiakban csak akkor írunk f helyett $\varphi(f)$-et és $\mathcal{F}^{n-t}_{\alpha\beta}$ helyett $\mathcal{G}^{t}_{\alpha\beta}$-t, ha szükségünk van a megkülönböztetésre.

Az 5.2. Tétel bizonyításához már csak az alábbi állításra van szükségünk:

5.5. ÁLLÍTÁS *az* $\mathcal{M}^{t+1}_{\tau} := \langle\langle \mathcal{N}^{t+1}_{\alpha} : \alpha\le\tau\rangle, \langle \mathcal{G}^{t+1}_{\alpha\beta} : \alpha\le\beta\le\tau\rangle\rangle$ *struktúrák minden* $\tau\le\kappa^{+n-(t+1)}$ *rendszámra* $(t+1)$*-edrésű mocsárkezdemények, sőt* $\mathcal{M}^{t+1}_{\kappa^{+n-(t+1)}}$ *egy* $(\kappa^{+n-(t+1)}, t+1)$ *-(egyszerűsített) mocsár.*

BIZONYÍTÁS Azt kell belátnunk, hogy $\mathcal{M}^{t+1}_{\tau}$ -re teljesülnek az 1.27. Definíció feltételei. Állításunkat természetesen t-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. A t=1 eset éppen az 5.3. Állítás. Mint említettük, az 5.1. Definíció pontjaira (M+), (M0)-(M6) jelekkel utalunk.

1.27.o): $\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha} \le \mathcal{N}^{t+1}_{\beta}$ ha $\alpha\le\beta\le\kappa^{+(n-t)}$ a konstrukció miatt igaz.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{G}^{t+1}_{\alpha\beta}$ elemei $\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha} \to \mathcal{N}^{t+1}_{\beta}$ *beágyazások:*

5.6. SEGÉDÁLLÍTÁS $\varphi(f) : \mathcal{N}^{t+1}_{\alpha} \to \mathcal{N}^{t+1}_{\beta}$ *t-résű mocsár-beágyazás minden* $f \in \mathcal{F}^{n-(t+1)}_{\alpha\beta}$, $\alpha\le\beta\le\kappa^{+n-(t+1)}$ *és* $t<n$ *esetén.*

BIZONYÍTÁS Ezt minden lehetséges rögzített α,β-ra és tetszőleges $\underline{s}\in(+)$ -re egyszerre bizonyítjuk, $|\underline{s}|$ -re vonatkozó csökkenő indukcióval. Ez elegendő, hiszen $\varphi(f)=\varphi(f,\emptyset)$. (Itt persze egy külső, t -re vonatkozó indukciót is használunk.) Pontosabban: belátjuk, hogy $\varphi(f,\underline{s}) : \mathcal{N}^{t-|s|+1}_{s_j} \to \mathcal{N}^{t-|s|+1}_{s_j}$ minden $\underline{s}\in(+)$ esetén $t-|\underline{s}|$ -résű mocsár-beágyazás, ha $j=|\underline{s}|\le t$, $f\in\mathcal{F}^{n-(t+1)+|\underline{s}|}_{\alpha\beta}$ és $\alpha\le\beta\le\kappa^{+n-(t+1)}$.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért legyen $i := n-(t+1)$.

$|\underline{s}|=t$ esetén $\varphi(f,\underline{s})=f_{(\underline{s}\restriction)s_t} : \theta^{n-1}_{s_t}+1 \to \theta^{n-1}_{f_{s}\restriction(s_t)}+1$ rendezéstartó függvények, azaz 0-résű mocsár-beágyazások, sőt $\theta^{n-1}_{s_t}+1=\mathcal{N}^{1}_{s_t}$ és $\theta^{n-1}_{f_{s}\restriction(s_t)}+1=\mathcal{N}^{1}_{f_{s}\restriction(s_t)}$.

$|\underline{s}|<t$ esetén $\varphi(f,\underline{s})=(\varphi(f,\underline{s}))^{-}\cup(\varphi(f,\underline{s}))^{\rightarrow}\cup(\varphi(f,\underline{s}))^{\Rightarrow}$, ahol :

$\varphi(f,\underline{s})^{-}=f_{(\underline{s}\restriction)s_j}:\theta_{s_j}^{i+|s|}+1 \to \theta_{f_{\underline{s}\restriction}(s_j)}^{i+|s|}+1$ rendezéstartó függvények

(MO) alapján, továbbá $\theta_{s_j}^{i+|s|}+1=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_{s_j}^{t-|s|+1})$ és $j=|\underline{s}|$,

$\varphi(f,\underline{s})_{\xi\zeta}:\mathcal{G}_{\xi,\zeta}^{t-|s|}\to\mathcal{G}_{h(\xi),h(\zeta)}^{t-|s|}$ ahol $h=(\varphi(f,\underline{s}))^{-}$,

$\varphi(f,\underline{s})_{\xi}=\varphi(f,\underline{s}^\frown\langle\xi\rangle):\mathcal{N}_{\xi}^{t-|s|}\to\mathcal{N}_{h(\xi)}^{t-|s|}$ ahol $h=(\varphi(f,\underline{s}^\frown\langle\xi\rangle))^{-}$

pedig $(t-|\underline{s}|-1)$-résű mocsár-beágyazások, az indukciós feltétel miatt.

azaz $\varphi(f,\underline{s}):\mathcal{N}_{s_j}^{t-|s|+1}\to\mathcal{N}_{h(s_j)}^{t-|s|+1}$ valóban $t-|\underline{s}|$ -résű mocsár-beágyazás (ahol $j=|\underline{s}|,h=\varphi(f,\underline{s})^{-}$) az indukciós feltétel alapján, amennyiben még az 1.28.Definíció d)-f) pontjai is teljesülnek, amiket alább bizonyítunk.

1.28.d): Legyen $\mathcal{G}_{\xi,\xi+1}^{t-|s|}=\{b:\text{balra ágazó beágyazás}\}\cup\{k\}$ ahol $k:\mathcal{N}_\xi^{t-|s|}\to\mathcal{N}_{\xi+1}^{t-|s|}$ jobbra ágazó beágyazás, hasadási pontja $\sigma_\xi<\theta_\xi+1=\theta_\xi^{n-t+|\underline{s}|}+1=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_\xi^{t-|\underline{s}|})$, $\xi<\theta_{s_j}^{n-t+|\underline{s}|}+1=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_{s_j}^{t-|\underline{s}|+1})$. (NB: $|\underline{s}|\lneq t$.)
Most azt kell belátnunk, hogy $\mathcal{G}_{z,z+1}^{t-|s|}$ jobbra ágazó beágyazásának hasadási pontja $\sigma_z=\varphi(f,\underline{s})_\xi^{-}(\sigma_\xi)$ $<\theta_z^{n-t+|\underline{s}|}+1=\mathrm{ht}(\mathcal{N}_z^{t-|\underline{s}|})$ ahol $z=\varphi(f,\underline{s})^{-}(\xi)$.
Az 5.4.Állítás és (M4b) szerint σ_ξ hasadási pontja az $\mathcal{F}_{\xi,\xi+1}^{n-t+|s|}$ függvényhalmaz shift függvényének is. (M2c)-t az $\underline{r}:=\underline{s}^\frown\langle\xi\rangle\in(+)$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy $\mathcal{F}_{z,z+1}^{n-t+|s|}$ hasadási pontja $\sigma_z=f_{(\underline{r})}(\sigma_\xi)=$ $=f_{(\underline{s}^\frown\langle\xi\rangle)}(\sigma_\xi)=\varphi(f,\underline{s})_\xi^{-}(\sigma_\xi)$ valamint $z=f_{(\underline{r}\restriction)}(\xi)=f_{(\underline{s})}(\xi)=\varphi(f,\underline{s})^{-}(\xi)$.

1.28.e): Az 5.4.Állítás, $\varphi(f,\underline{s})$ definíciója és (M2a) szerint

$$\begin{aligned}
\varphi(f,\underline{s})_{\xi\vartheta}(b\circ c) &= \varphi(f,\underline{s})_{\xi\vartheta}(\varphi(b\circ c)) = \varphi(f_{(\underline{s})\xi\vartheta}(b\circ c)) = \\
&= \varphi(f_{(\underline{s})\zeta\vartheta}(b)\circ f_{(\underline{s})\xi\zeta}(c)) = \varphi(f_{(\underline{s})\zeta\vartheta}(b)\circ f_{(\underline{s})\xi\zeta}(c)) = \\
&= \varphi(f_{(\underline{s})\zeta\vartheta}(b))\circ\varphi(f_{(\underline{s})\xi\zeta}(c)) = \varphi(f,\underline{s})_{\zeta\vartheta}(\varphi(b))\circ\varphi(f,\underline{s})_{\xi\zeta}(\varphi(c)) = \\
&= \varphi(f,\underline{s})_{\zeta\vartheta}(b)\circ\varphi(f,\underline{s})_{\xi\zeta}(c)
\end{aligned}$$

minden $\xi\le\zeta\le\vartheta\le\xi<\theta_{s_j}^{n-t+|\underline{s}|}+1$, $b\in\mathcal{G}_{\zeta,\vartheta}^{t-|s|}$ és $c\in\mathcal{G}_{\xi,\zeta}^{t-|s|}$ esetén.

1.28.f): Az 5.4.Állítás bizonyításában leírtakat alaposabban átgondolva belátható, hogy $\varphi(f,\underline{s})_\zeta=f_{(\underline{s})\zeta}$ minden lehetséges $f,\underline{s}$ és ζ esetén. Most az 5.4.Állítás és (M2b) alapján éppen 1.28.f)-et kapjuk.

Ezzel befejeztük az indukciós lépés bizonyítását, vagyis bebizonyítottuk az 5.6. Segédállítást. □

Az 5.5. Állításból tehát beláttuk, hogy $\mathcal{G}^{t+1}_{\alpha,\beta}$ elemei $\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha}\to\mathcal{N}^{t+1}_{\beta}$ beágyazások minden $\alpha\le\beta\le\kappa^{+n-(t+1)}$ esetén. Most megmutatjuk, hogy az $\mathcal{M}^{t+1}_{\tau}:=\langle\langle\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha}:\alpha\le\tau\rangle,\langle\mathcal{G}^{t+1}_{\alpha\beta}:\alpha\le\beta\le\tau\rangle\rangle$ struktúrák minden $\tau\le\kappa^{+n-(t+1)}$ rendszámra $(t+1)$-edrésű mocsárkezdemények. Azt kell belátnunk, hogy $\mathcal{M}^{t+1}_{\tau}$ kielégíti az 1.27. Definíció feltételeit. Az 5.4. Állítást sokszor fogjuk használni, minden jelzés nélkül.

1.27.o): a konstrukció és az 5.6. Segédállítás miatt igaz.

1.27.a): $\mathcal{G}^{t+1}_{\alpha\alpha}=\{id\}$ nyilvánvaló (M4) miatt. Továbbá $\mathcal{G}^{t+1}_{\alpha,\alpha+1}=\{\varphi(d):d\approx id, d\in\mathcal{F}^{i}_{\alpha,\alpha+1}\}\cup\{\varphi(h^{i}_{\alpha}):h^{i}_{\alpha}\in\mathcal{F}^{i}_{\alpha,\alpha+1}\}$ ahol $i=n-(t+1)$.

Először belátjuk, hogy $\{\varphi(d):d\approx id, d\in\mathcal{F}^{i}_{\alpha,\alpha+1}\}$ pontosan az összes lehetséges $\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha}\to\mathcal{N}^{t+1}_{\beta}$ balra ágazó beágyazást adja: (M4a) miatt $d^{-}\restriction\theta=$ $=d_{\emptyset}\restriction\theta=id\restriction\theta$ ha $\theta=\theta^{i}_{\alpha}$, a 11) lábjegyzet szerint $d_{\xi}=id\in\mathcal{F}^{i+1}_{\xi,\xi}$ azaz $d_{\xi}=id\restriction\mathcal{N}^{t}_{\xi}$ ha $\xi<\theta$, továbbá $\varphi(d)$ definíciója miatt $d_{\theta}\overset{(1.28.\mathrm{Def.szerint})}{=}$ $=d_{\theta}^{(10/\mathrm{Lábj.szerint})}\in\mathcal{F}^{i+1}_{\theta_{\alpha},\theta_{\alpha+1}}=\mathcal{G}^{t}_{\theta_{\alpha},\theta_{\alpha+1}}$ ahol $\theta_{\alpha}=\theta^{i}_{\alpha}$ és $\theta_{\alpha+1}=\theta^{i}_{\alpha+1}$.

Végül $d_{\xi\zeta}(b)=b$ minden $b\in\mathcal{G}^{t}_{\xi\zeta}$ függvényre 1.28.f) és a fentiek miatt. Tehát $\varphi(d)$ valóban $\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha}\to\mathcal{N}^{t+1}_{\beta}$ balra ágazó beágyazás ha $d\approx id, d\in\mathcal{F}^{i}_{\alpha,\alpha+1}$. Az pedig triviális, hogy az összes $\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha}\to\mathcal{N}^{t+1}_{\beta}$ balra ágazó beágyazás előáll $\varphi(d)$ alakban, ha $d\approx id, d\in\mathcal{F}^{i}_{\alpha,\alpha+1}$.

Most azt mutatjuk meg, hogy $\varphi(h^{i}_{\alpha}):\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha}\to\mathcal{N}^{t+1}_{\beta}$ shift ahol $h^{i}_{\alpha}\in\mathcal{F}^{i}_{\alpha,\alpha+1}$ az (M4b)-ben leírt függvény és $i=n-(t+1)$. Az alábbiakban írjunk h^{i}_{α} helyett egyszerűen h-t és θ^{i}_{α} helyett csak θ-t.

1.29. Def. ii)a),b) nyilvánvalóak mert $\varphi(h)^{-}=h_{\emptyset}$.

c): (M4b) miatt $h_{(\underline{s})\xi}=id$, és (M2b) alapján $h_{(\underline{s})\xi\zeta}=id$ minden $\underline{s}\in(+),\xi\le\zeta\le s_{j}$ esetén feltéve, hogy $s_{1}<\sigma$ vagy ($s=\emptyset$ és $\xi\le\zeta<\sigma$). Ekkor az 5.4. Állítás Következménye miatt $\varphi(h)_{\xi}=id$ ha $\xi<\sigma$.

d): az előző pontban bizonyítottuk, hogy $h_{\xi\zeta}=id$ ha $\xi\le\zeta<\sigma$.

e)f): a c) pontban említett okok miatt $h_{\sigma}\in\mathcal{F}^{i+1}_{\sigma,\theta}=\mathcal{G}^{t}_{\sigma,\theta}$ és $h_{\xi\zeta}"\mathcal{F}^{i+1}_{\xi,\zeta}=\mathcal{F}^{i+1}_{h^{-}(\xi),h^{-}(\zeta)}$ ha $\sigma\le\xi\le\zeta\le\theta$. Tehát $\varphi(h)$ valóban shift.

1.27.b): (M3) és az 5.4.Állítás miatt igaz.

1.27.c): Legyen $\alpha\le\kappa^{+i}$ limesz rendszám ahol $i=n-(t+1)$. Az 5.4. Állítás és (M6a) miatt $ht(\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha})=\theta^{i}_{\alpha}+1=\cup\{f^{-}\text{"}ht(\mathcal{N}^{t+1}_{\beta}):f\in\mathcal{G}^{t+1}_{\beta\alpha},\beta<\alpha\}$ hiszen $ht(\mathcal{N}^{t+1}_{\beta})=\theta^{i}_{\beta}+1$ és $f^{-}(\theta^{i}_{\beta})=\theta^{i}_{\alpha}$ ha $f\in\mathcal{G}^{t+1}_{\beta\alpha}$ és $\beta<\alpha$. Most (M6c) miatt $\mathcal{G}^{t}_{\xi\tau}=\cup\left\{f_{\xi',\tau'}\text{"}\mathcal{G}^{t}_{\xi',\tau'} : f\in\mathcal{G}^{t+1}_{\beta\alpha}, f^{-}(\xi')=\xi, f^{-}(\tau')=\tau, \beta<\alpha\right\}$ ha $\xi\le\tau\le\theta^{i}_{\alpha}$. Konstrukciónk szerint $\mathcal{N}^{t}_{\xi}$ $(\xi\le\theta^{i}_{\alpha})$ nem más, mint a $ht(\mathcal{N}^{j}_{\rho})=\theta^{n-j}_{\rho}+1$ és a $\mathcal{G}^{k}_{\sigma\tau}=\mathcal{F}^{n-k}_{\sigma\tau}$ halmazok diszjunkt úniója $(1\le k<t, 1\le j\le t, \sigma\le\tau\le ht(\mathcal{N}^{j}_{\rho})=\theta^{n-j}_{\rho}+1$, $\rho\le ht(\mathcal{N}^{t}_{\xi})=\theta^{n-t}_{\xi}+1$ ha $j=t$ és $\rho\le ht(\mathcal{N}^{j+1}_{r_{j+1}})=\theta^{n-j-1}_{\rho}+1$ ha $j<t$ ahol $r_t=ht(\mathcal{N}^{t}_{\xi})=$ $=\theta^{n-t}_{\xi}+1$ és $r_{j-1}=ht(\mathcal{N}^{j}_{r_j})=\theta^{n-j}_{r_j}+1$). Vagyis (M6b) és (M6c) alapján $\mathcal{N}_{\xi}$ -t lefedik az $f_{(\underline{s}')\xi'}$ és az $f_{(\underline{s}')\xi'\tau'}$ alakú függvények képterei ahol többek között $f(s'_1)=\xi$. Azonban $f_{\xi'}$ éppen ezen függvények úniója ha $f\in\mathcal{G}^{t}_{\beta\alpha}$, $\beta<\alpha, f^{-}(\xi')=\xi$. Mivel $\mathcal{N}^{t}_{\xi'}$ felépítése azonos $\mathcal{N}^{t}_{\xi}$ felépítésével, így biztosan $\mathcal{N}^{t}_{\xi}=\cup\{f_{\xi'}\text{"}\mathcal{N}^{t}_{\xi'}:f\in\mathcal{G}^{t+1}_{\beta\alpha}, f^{-}(\xi')=\xi, \beta<\alpha\}$ ha $\xi\le\theta^{i}_{\alpha}$.

1.27.d): (M5) és az 5.4.Állítás miatt igaz.

Eddig tehát beláttuk, hogy $\mathcal{M}^{t+1}_{\tau}$ minden $\tau\le\kappa^{+n-(t+1)}$ rendszámra (t-1) -edrésű mocsárkezdemény.

Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{M}^{t+1}_{\kappa^{+n-(t+1)}}$ egy $(\kappa^{+n-(t+1)},t+1)$ --(egyszerűsített) mocsár. Vagyis kielégíti az 1.31.(ii)Definíció feltételeit.

1.31.(ii)a): A konstrukció miatt.

1.31.(ii)b): (M1) és $\mathcal{G}^{t+1}_{\beta\alpha}=\mathcal{F}^{n-(t+1)}_{\alpha\beta}$ $(\alpha\le\beta\le\kappa^{+n-(t+1)})$ miatt.

1.31.(ii)c): $\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha}$ $(\alpha\le\kappa^{+n-(t+1)})$ szerkezete analóg $\mathcal{N}^{t}_{\xi}$ $(\xi\le\theta^{i}_{\alpha})$ szerkezetéhez, amit az 1.27.c) pont bizonyításakor elemeztünk. Így (M1) miatt $size(\mathcal{N}^{t+1}_{\alpha})<\kappa^{+n-(t+1)}$ ha $\alpha\le\kappa^{+n-(t+1)}$, mivel $\kappa^{+n-(t+1)}$ reguláris.

1.31.(ii)d): A t -re vonatkozó indukciós feltétel miatt igaz.

Ezzel bebizonyítottuk az 5.5.Állítást □

Mint említettük, ez bizonyítja az 5.2. Tételt ■

A most bizonyított 5.2.Tétel és [Mo] IV.Ch. 7.Tétele alapján kimondhatjuk az alábbi állítást:

5.7. TÉTEL *Ha létezik* (κ,m) *- Jensen féle mocsár, akkor létezik* (κ,m) *-egyszerűsített mocsár is ha* $m<\omega_o$ *és* κ *reguláris.* □

Ezt [Je1] eredményeivel összevetve kimondhatjuk:

5.8. TÉTEL V=L *esetén létezik* (κ,m) *- egyszerűsített mocsár minden* $m<\omega_o$ *és* κ *reguláris számosságra.* ■

Most rátérünk a (teljes) lineáris sorozatok létezésének konzisztenciájának vizsgálatára. Emlékeztetünk arra, hogy nagyobbrésű mocsarak linearizáló sorozatait a 2.42.Definícióban adtuk meg. De nagyobbrésű mocsarak linearizáló sorozatai magukban rejtik egyrésű mocsarak linearizáló sorozatait, így Donder 1.19.Tételben említett eredménye alapján nyilvánvaló az alábbi állítás:

5.9. ÁLLÍTÁS *Ha van* (κ,m)*-egyszerűsített mocsár lineáris sorozatokkal (*$m<\omega_o$*,* κ *reguláris), akkor* κ *nem gyengén kompakt.* □

Legjobb esetben tehát minden nem gyengén kompakt számosságra lehet konzisztens egy (κ,m) -egyszerűsített mocsár létezése lineáris sorozatokkal ($m<\omega_o$) . A forszolás meghaladja dolgozatunk határait (ld.pl. [Ve8]),pedig egyszerűsített mocsarat forszoló kényszerképzet könnyen módósítható úgy,hogy az új modellben kapott mocsár lineáris sorozatokkal is rendelkezzék (pl. [Ve3]).

Azonban Velleman 1.20. Tétele szerint nem várhatjuk, hogy egy adott (κ, m) mocsarat ZFC-ben láthatunk el lineáris sorozatokkal. A 2.18. (ii) Állítás szerint egy $\langle(\beta^\alpha_\delta, f^\alpha_\delta):\delta<\tau^\alpha\rangle$ lineáris sorozatokkal ($\alpha<\kappa$ limesz) ellátott $\mathcal{M}=\langle\vec{\varphi},\vec{\mathcal{F}}\rangle$ mocsárnál minden $\alpha<\kappa$ rendszámra $\varphi_\alpha=\cup\{\mathrm{Range}(f^\alpha_\delta):\delta<\tau^\alpha\}$. Azonban, ha a mocsarunkban minden $\alpha<\kappa$ limesz-rendszámra lenne egy ilyen, fedő tulajdonságú függvénysorozat, azaz $\langle F^\alpha_\delta:\delta<t^\alpha\rangle$, melyre $\varphi_\alpha=\cup\{\mathrm{Range}(F^\alpha_\delta):\delta<t^\alpha\}$, és minden $\delta<\rho<t^\alpha$ esetén van olyan $f\in\mathcal{F}_{F^\alpha_\delta\, F^\alpha_\rho}$ amelyre $F^\alpha_\delta=F^\alpha_\rho\circ f$, akkor e függvénysorozatból könnyen készíthetünk mocsarunkhoz (ZFC-ben) lineáris sorozatokat, pl. Velleman stratégiai zártságával (pl. [Ve3]). De ismét Velleman 1.20. Tétele szerint még ilyen $\langle F^\alpha_\delta:\delta<t^\alpha\rangle$ sorozatokkal sem láthatjuk el ZFC-ben mocsarunkat, sőt Morgan (minden reguláris κ számosságra konstruált) mocsaraitól sem várható el ez.

H I V A T K O Z Á S O K

[BS] BAUMGARTNER, J., SHELAH, S.: *Remarks on Superatomic Boolean Algebras*, AML 33 (1987), 109-129

[Bu0] BURGESS, J.P.: *Forcing* , in: Handbook of Math.Logic , ed. J.Barwise, North-Holland, 1977

[Bu1] ----------- : *On a Set - Mapping Problem of Hajnal and Máté* , Acta Sci.Math. 41 (1979), 283-288

[CK] CHANG, C.C., KEISLER, H.J.: *Model Theory*, North Holland, 1973

[De0] DEVLIN, K.J. : *Aspects of Constructibility* , Springer - - Verlag, Berlin, 1973 (in Series Lecture Notes in Math., vol. 354)

[De1] ----------- : *Constructibility*, Springer-Verlag, Berlin (in Ω - Series, Perspectives in Math. Logic)

[Do0] DONDER, H.D. : *Coarse Morasses in L* , in: Series Lect. Notes in Math. vol 872 (Boston Conf. 1979), Springer 1981, pp. 37-54

[Do1] ----------- : *Another Look at Gap-1 Morasses*, Proc.Symp. Pure Math 42 (1985), 223-236

[EH] ERDŐS, P., HAJNAL, A.: *Unsolved Problems in Set Theory*, in: Axiomatic Set Theory, ed. D.S. Scott , Proc.Symp.Pure Math., vol.13, Part 1, (AMS, Providence, 1971), 17-48

[EHMR] ERDŐS. P., HAJNAL, A., MÁTÉ, A., RADO, R. : *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals*, North - Holland, 1984

[Gö1] GÖDEL, K.: *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*, Proc. Natl. Acad. USA 24 , 1938, 556-557

[Gö2] ----------- : ---------- , Ann. Math. Studies 3, 1940

[HK] HAJNAL, A., KOMJÁTH, P.: *Some Higher - Gap Examples in Combinatorial Set Theory*, APALD 33(1987), 283-296

[Je] JECH, T. : Set Theory, Academic Press, USA, 1978

[Je0] JENSEN, R.B.: *The fine structure of the constructible hierarchy* , AML 4 (1972), 229-308

[Je1] ---------- : *The (κ,β) - Morass*, kézirat, Oxford, 1972-76

[Je2] ---------- : *There is a Gap Two Velleman Morass in L*, kézirat, Oxford, 1987

[Je3] ---------- : személyes beszélgetés, Oxford, 1987

[Ka0] KANAMORI, A.: *On Silver's and Related Principles,* in : "Logic Coll.'80", (ed. van Dalen et al.), North Holland, 1982, pp.153-172

[Ka1] ---------- : *Morass - Level Combinatorial Principles,* Patras Logic Symp. (ed. G. Metakides), North-Holland, 1982, pp.339-358

[Ka2] ---------- : *Morasses in Combinatorial Set Theory,* in: Surveys in Set Theory, (ed. A.R.D. Mathias), Series London Lect. Notes in Math. 87(1983)167-196

[Ko] KOMJÁTH, P. : *Morasses and the Lévy - Collapse,* JSL 52 (1987), 111-115

[Ku] KUNEN, K.: *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North Holland, 1980 (Series Studies in Logic and the Found. Math. vol 102)

[Mo] MORGAN, Ch.: *The Equivalence of Morasses and Simplified Morasses in the Finite Gap Case,* PhD. Thesis, Merton College, UK, 1989

[Mi] MIYAMOTO, T.: *Some Results in Forcing*, PhD Thesis, Dartmouth College, USA, 1987

[MSV] STANLEY, L. J., VELLEMAN, D., MORGAN, Ch.: $\omega_3\omega_1 \nrightarrow (\omega_3\omega_1, 3)^2$ *Requires an Inaccessible,* Proc. AMS 111 (1991), 1105-1118

[Re] REBHOLZ, J. : *Some Consequences of the Morass and Diamond,* AML 7 (1974), 361-385

[Sh] SHELAH, S. : *Can You Take Solovay's Inaccessible Away?* IJM 48 (1984), 1-47

[SS0] SHELAH, S., STANLEY, L. J.: *S - Forcing, I.: A "Black Box" Theorem for Morasses with Application to Super Souslin Trees*, IJM 43 (1982), 185-224

[SS1] ---------- : *S - Forcing, IIa: Adding Diamonds and More Applications: Coding Sets, Arhangel'skii's Problem and* $\mathcal{L}[Q_1^{<\omega}, Q_2^1]$, IJM 56 (1986), 1-65

[SS2] ---------- : *A Theorem and Some Consistency Results in Partition Calculus*, APALD 36 (1987), 119-152

[SS3] ---------- : *More Consistency Results in Partition Calculus*, megjelenés alatt ([SS1]-ben jele [14])

[St0] STANLEY, L. J.: L *-Like Models of Set Theory: Forcing, Combinatorial Principles, and Morasses,* PhD Thesis (Berkeley, USA), 1975

[St1] ---------- : *Short Course on Morasses,* in: Surveys in Set Theory, (ed.A.R.D.Mathias), Series London Lect.Notes in Math. vol. 87 (1983), 197-243

[St2] ---------- : *Large Cardinals and Morasses,* megjelenés alatt

[Sz0] SZALKAI, I. : *$(\omega_2,1)$ - Morass Implies* $\omega_3\omega_1 \nrightarrow (\omega_3\omega_1,3)^2$ Acta Math.Hung., közlésre benyújtva

[Sz1] ---------- : *Gap-m Morasses and the free subset problem* kézirat, 1987

[To0] TODORCEVIC, S.: *Trees, Subtrees and Order Types,* AML 20 (1981), 233-268

[To1] ---------- : *Partitioning Pairs of Countable Ordinals,* Acta Math. 159 (1987), 261-294

[Ve0] VELLEMAN, D.: *Morasses, Diamond, and Forcing,* AML 23 (1982), 199-281

[Ve1] ---------- : *On a Generalization of Jensen's* $\square_\kappa$ *and Strategic Closure of Partial Orders,* JSL, 48 (1983), 1046-1056

[Ve2] ---------- : *Simplified Morasses,* JSL 49(1984),257-271

[Ve3] ---------- : *Simplified Morasses with Linear Limits,* JSL 49 (1984), 1001-1021

[Ve4] ---------- : *Souslin Trees Constructed from Morasses,* in: Axiomatic Set Th. (ed.J.Baumgartner et al.) Series Contemporary Math.31, AMS, 1984,219-241

[Ve5] ---------- : *ω. - Morasses, and a Weak Form of Martin's Axiom Provable in ZFC* , Trans.AMS 285 (1984) , 617-627

[Ve6] ---------- : *Review of articles by: J.Gregory, R.Laver and S.Shelah and L.J.Stanley,* JSL 49(1984),663-665

[Ve7] ---------- : *On a Combinatorial Principle of Hajnal and Komjáth,* JSL 51 (1986), 1056-1060

[Ve8] ---------- : *Simplified Gap-2 Morasses,* APALD 34 (1987) 171-208

[Ve9] ---------- : *Gap-2 Morasses of Height* ω_0 , JSL 52 (1987) 928-938

[Ve10] ---------- : levelek, 1987-1991