SZALKAI ISTVÁN :

A KISZÁMITHATÓ ANALIZIS ÁTTEKINTÉSE

Budapest, 1983.november 10.

SZALKAI ISTVAN

MATEMATIKUS

8460 DEVECSER
FURST S.U.11.
HUNGARY

1.§.BEVEZETÉS , ALAPFOGALMAK és JELÖLÉSEK

Dolgozatom fő célja a kiszámitható analizis eddigi eredményeinek minél teljesebb összefoglalása,és fő - képpen a a különböző módon definiált fogalmak ekvivalenciájának pontos megvizsgálása. Továbbá igyekeztem tanulmányomat úgy megirni,hogy a csak ismerkedő olvasó is könnyen be tudja fogadni a kissé szokatlan anyagot. Bizonyitásokat /amelyek csak idézetek/ csak akkor közlök,ha az érdekes vagy jellemző a vizsgált problémára.A rutinjellegü számolási részletekre a legtöbb esetben csak utalok.
A 2.17.,2.18.,2.30.,és 4.22.tételek és bizonyitásuk önnálló eredmények.

Aberth /1/ -ben nem rekurziv , hanem programozható függvényeket használ.Ezek definició szerint a rekurziv függvények absztrakt számitógép-moddelljeihez hasonló absztrakt gépekkel kiszámitható függvények.azzal a különbséggel,hogy a számitógép tetszőleges racionális számokkal dolgozik,és igy egy programozható függvény egy $Q \to Q$ leképezés.Ha veszünk egy $\pi : N \to Q$ rögzitett bijekciót,akkor természetesen tetszőleges f rekurziv függvényre $\pi \circ f$ programozható függvény.
Később szükségünk lesz a következő állitásra:

<u>1.1.Állitás:</u> **Minden** parciális rekurziv függvény programozható./Eddig triviális./ Továbbá ha f egy tetszőleges programozható függvény,és az $a_1,\dots,a_m$ változóktól függ,akkor az $a_i=(r_i-s_i)/(1+t_i)$ jelöléssel,/az r_i, s_i és t_i számok természetes számok / léteznek olyan R,S és T parciális rekurziv függvények,amelyekre

$$f(a_1,\dots a_m) = \frac{R(r_1,\dots r_m,s_1,\dots s_m,t_1,\dots t_m) - S(r_1,\dots r_m,s_1,\dots s_m,t_1,\dots t_m)}{1 + T(r_1,\dots r_m,s_1,\dots s_m,t_1,\dots t_m)}$$

és a két oldal egyszerre van értelmezve illetve nincs.
A bizonyitás triviális.

Jelölje U az univerzális programot,azaz U/m,n/ az m Gödel-számú program értéke az n helyen,U rekurziv. Továbbá P jelöli a megállási probléma programját;

$$P/m,n/ = \begin{cases} 1 & \text{ha az n Gödel-számú függvény értelmezve van az m helyen} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Közismert hogy P nem rekurziv.
A tanulmányban használt fontosabb jelek :

U/m,n/	univerzális program
P/m,n/	programmegállási program
P'	a korlátozott megállási probléma karakterisztikus függvény /ld.31 oldalon/
$\mathfrak{N}$	N -ből Q-ba vezető primitiv rekurziv bijekció
KVSZ	konstruktiv valós szám
K	a konstruktiv valós számok teste
N_f	az f rekurziv függvény Gödel-száma
φ_e	az e Gödel-számú rekurziv függvény
μ	μ-operátor
$\dot{-}$	rekurziv kivonás : $a \dot{-} b$ = max / 0 , a-b /
sg	signum /előjel/ függvény
P''	korlátozott módositott megállási probléma karakterisztikus függvénye (ld. 32. old.)

2.§.KISZÁMITHATÓ VALÓS SZÁMOK

Ha anyagunkat szigorúan akarnánk felépiteni,akkor a természetes és racionális számok fogalmát is definiálnunk kellene./Az ilyen részletes felépitésre lásd például Kusmer/38/ vagy Sanin/33/ müveit./ Szerintem ez a felépités felesleges bonyolitás,a leningrádi iskola azonban lelkiismeretesen szabatos.

A másik véglet pedig az,amikor sok szerző még a kiszámitható valós szám /röviden KVSZ/ fogalmát sem definiálja , ha nem alapozó vagy bevezető müvet ir. Az még a jobbik eset,amikor nem is használja fel a fogalmat.E munkák nem az analizis alapjaival,pl.sorozatokkal foglalkoznak,hanem függvényekkel és funkcionálokkal, amik a gyakorlatban fontosabb szerepet játszanak. A kiszámitható függvények fogalmát a kiszámitható valós számok nélkül vezetik be , intuitive/ld.pl.Miller/51/ / vagy a Q és N között létesitett bijekcióval /pl.Cleave /14/./E közelitések lényegében már a numerikus analizis módszereit használják,de a 4.§.-ban ezeket is tárgyalom. Ismét más szerzők a KVSZ fogalmát csak hallgatólagosan definiálják /pl.Gregorczyk/27/./

A kiszámitható valós számok kb.tucatnyi definiciójának viszonyát a 2.17. és 2.18. tételekben foglalom össze.

A hétköznapi gyakorlat alapján természetesen merül fel a következő:

<u>2.1.Definició:</u> /ld.pl.Hermes/29/,Klaua/35/:/
Egy x valós számot rekurzivan kiszámithatónak nevezünk, ha létezik olyan g természetes szám és f rekurziv függvény /g legalább 2/ , hogy minden n természetes számra

$$0 \leq f(n) < g \qquad \text{és} \qquad x = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot g^{-i}$$

azaz x-et rekurziv /kiszámitható/ módon fel tudjuk irni g alapú számrendszerben. /Megjegyzem, hogy ez tulajdonképpen három definició aszerint, hogy f-ről csak annyit kötünk ki, hogy primitiv rekurziv, totális vagy parciális rekurziv függvény lehet./
E definiciót illetően ld. még a 2.18.A. tételt.
g=2 esetben f-et tekinthetjük egy rekurziv halmaz karakterisztikus függvényének is. Érezhető, hogy totális ill. parciális rekurziv esetben mindegy, hogy g mekkora. Hiszen könnyü algoritmust találni arra, hogy x g_1 alapú számrendszerbeli alakjából hogyan állitsuk elő g_2 alapú számrendszerbeli jegyeit. /A preciz formalizmustól, ill. az algoritmus részletes leirásától eltekintek./ Azonban primitiv rekurziv esetben a helyzet bonyolultabb, és e definició szerint rekurziv KVSZ -ok halmaza még összeadásra sem zárt. Részletesebben ld. a 2.18.B. tételt.
A KVSZ fogalmát legelőször Turing vezette be 1937-ben, ld. /6/-ben, e definició alapján. Mivel primitiv rekurziv esetben már ő is látta a definiált számok "kellemetlen" tulajdonságait, ezért később áttért a számok alább ismertetendő definicióira.

Ha egy transzcendens függvény /pl. logaritmus, gyök-, trigonometrikus, stb./ értékét akarjuk meghatározni, pl. egy természetes szám-helyen, akkor legelőször a Taylor-sorra gondolunk. Pl. igy

$$e^2 = 1 + 2/1! + 4/2! + 8/3! + \ldots$$

Igy természetesnek tünik az a definició, amely szerint egy x valós szám kiszámitható, ha rekurziv módon irható fel a fenti Taylor-sor alakban. Előbb azonban szükségünk van a következő állitásra:

2.2. Állitás: Legyen x tetszőleges nemnegativ valós szám. Ekkor egyértelműen irható fel

$$(2.2.) \qquad x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} \quad , \quad 0 \le a_i < i$$

alakban,ahol a_i nemnegativ valós számokat jelöl.
Az állitás könnyen igazolható,ld.pl.Péter/60/ 24.§.5.-6.

<u>2.2.Definició:</u> Egy x valós számot rekurziv KVSZ -nak nevezünk,ha létezik olyan f rekurziv függvény,amelyre

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f/i/}{i!}$$

Ha a valós számokat n nevezőjü törtekkel akarjuk közeliteni,akkor a tört számlálója $[nx]$, ahol $[y]$ jelöli az y szám egészrészét,azaz az y-nál nem nagyobb,legnagyobb egész számot.
<u>2.3.Definició:</u> Az x valós számot rekurziv KVSZ -nak nevezzük,ha az $f/n/ = [nx]$ függvény rekurziv.
Meglepő az alábbi
<u>2.4.Állitás:</u> a 2.3. és 2.2. definiciók ekvivalensek, primitiv rekurziv esetben is. Pontosabban az $f/n/=[nx]$ függvény akkor és csak akkor rekurziv függvénye n-nek,ha x-nek /2.2./-beli alakjában az a_i számok 0 és i közé esnek , és i-nek rekurziv függvénye a_i .
<u>Bizonyitás:</u>/A részletes bizonyitás megtalálható Péter/60/ 11.§.-ban./

$$xn = n\left(a_0 + a_1/1! + \dots + a_n/n!\right) + r_n$$

ahol $$0 \leq r_n < n \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Jelöljük az első tag /n-1/! -szeresét s_n -el,ahol s_n természetes szám. Közös nevezőre hozás után kapjuk:

$$x \cdot n = s_n/(n-1)! + r_n < (s_n+1)\,/\,(n-1)!$$

Innét következik,hogy $[x \cdot n] = [s_n/(n-1)!]$

mert $$s_n/(n-1)! \leq x \cdot n < (s_n+1)/(n-1)!$$

Ez pedig azt mutatja.hogy $[xn]$ akkor és csak akkor rekurziv,ha s_n is az , ami pedig pontosan akkor igaz,ha a_n

rekurziv. ∎

Nyilvánvalóan ha f/n/= $[xn]$ akkor $\left|\frac{f(n)}{n} - x\right| < \frac{1}{n}$, ahogy ezt vártuk, és igy egészen természetes az alábbi

<u>2.5.Definició:</u> Egy x valós szám rekurziv KVSZ , ha lé - tezik olyan f rekurziv függvény , amelyre $|f(n)/n - x| < 1/n$

Az is könnyen belátható, hogy a 2.5.definició nem primitiv esetben ekvivalens a 2.1. definicióval . Továbbá a 2.2.definicióval is ekvivalens. Ugyanis ha x a 2.2. definició szerint rekurzivan kiszámitható, akkor legyen $f/n/ = n\sum_{i=1}^{n} a_i/i!$, és igy x a 2.5.definició szerint is rekurziv KVSZ. Megforditva elég belátnunk, hogy ha x rekurziv KVSZ a 2.5. definició alapján, akkor $[xn]$ rekurziv függvénye n -nek. Azonban ha x racionális szám, akkor ez nyilvánvaló. Ha pedig nem, akkor

$$\left|\frac{f(kn)}{kn} - x\right| < \frac{1}{kn} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{f(kn)}{k} - \frac{1}{k} < x\cdot n < \frac{f(kn)}{k} + \frac{1}{k}$$

ami alapján k -t elég nagynak választva az $\left(\frac{f(kn)}{k} - \frac{1}{k}; \frac{f(kn)}{k} + \frac{1}{k}\right)$ intervallumban már nincs egész szám , és igy $[nx] = \left[\frac{f/k+1/}{k}\right]$ ∎

Az eddig adott négy definició tehát ekvivalens.
/Mint később látni fogjuk, az nem dönthető el rekurzivan, hogy ha x rekurziv KVSZ, akkor racionális avagy sem - az ekvivalens definiciók közül akármelyikkel is adjuk meg x -et./
Igy már most is látszik, hogy az általunk ismert fontos számok mind rekurzive kiszámithatóak, pontosabban rekurziv valós számok /pl. e , π, log2 , $\sqrt{2}$, C ,stb./
Hallgatólagosan a 2.5.definiciót használja Gregorczyk is /27/ -ban. Klaua /35/-ban a következő változatot irja : /ld.6.§.3.definició:/

<u>2.6.Definició:</u> Egy valós x szám rekurziv KVSZ , ha létezik egy olyan f programozható függvény, amelyre tetszőleges pozitiv racionális r szám esetén $|x-f/r/| < r$.

Könnyen belátható, hogy ez a definició is ekvivalens a 2.5. definicióval , hiszem ha f a 2.6.definició szerinti függvény, akkor legyen g/n/ az $n\cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)$

racionális számhoz legközelebb eső egész szám. Ekkor

$$\left| \frac{g(n)}{n} - x \right| \leq \left| \frac{g(n)}{n} - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{2n}\right) - x \right| \leq \frac{1}{n}$$

Megforditva legyen tetszőleges r esetén /ha a 2.5.definicióban szereplő függvényt ismét g -vel jelöljük/ $f/r/ = g(m)/m$, ahol m egy olyan természetes szám, amelyre $1/m < r$.

Itt ismét csak nem primitiv rekurziv esetben bizonyitottuk az ekvivalenciát. A primitiv rekurziv esetet lásd a 2.18.tételben. Az is nyilvánvaló, hogy ha x rekurziv KVSZ a 2.5.definició értelmében , akkor létezik a 2.5. egyenlőtlenséget kielégitő , nem rekurziv függvény is , pl. $f/n/ + e_n \cdot P/n,n/$, ahol $e_n = -1,0,+1$ aszerint hogy $f(n)/n$ kisebb , egyenlő vagy nagyobb x -nél. Ha x egész szám , akkor $e_n = 0$ minden 0-nál nagyobb természetes szám esetén . Igy x egész szám esetén a fenti megállapitásunk nem igaz. Ellenben ha x racionális , mondjuk p/q alakú , ahol p és q relativ primek , akkor minden m -re , ha n nem többszöröse q -nak , $e_n \neq 0$. Bizonyithatóan ilyen n -ekre sem dönthető el rekurziv módon P/n,n/ értéke, akármilyen Gödel-számozást veszünk is. /ld.pl. Nievergelt vagy Trahtenbot előbb emlitett könyveit*/ Továbbá nyilvánvalóan x irracionális szám esetén minden n indexre $e_n \neq 0$. Igy kaptuk :

$$\left(\forall n \quad f(n) = [nx] \right) \Leftrightarrow \left(\forall n \quad |f(n)/n - x| < 1/n \right)$$

akkor és csak akkor , ha x egész szám .

A 2.1. és 2.2. állitás alapján nem meglepő a következő

<u>2.7.Definició:</u> /ld.pl. Mechowsky /50/ -ben:/
Legyen a_n és b_n tetszőleges függvényei n -nek , ahol $1 < b_n$ és $0 \leq a_n \leq b_n - 1$ minden n indexre. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n/c_n$$ végtelen összeget /ahol $c_n = b_1 b_2 \cdots b_n$/ /általánositott/ Cantor-összegnek nevezzük . Továbbá egy x valós számot rekurziv KVSZ -nak nevezünk, ha létezik

*Nievergelt, J.-Farrar, J.C.-Reingold, E.M.: Matematikai problémák megoldásának számitógépes módszerei/Műszaki kiadó 1977/ vagy Trahtenbrot: Algoritmusok es absztrakt automaták /Műszaki kiadó 1978/. A legegyszerübben Rice tétele alapján látható ben , ld. Monk/55/

hozzá konvergáló rekurziv Cantor sorozat.
A konvergenciáról nem kell feltenni , hogy rekurziv /azaz a küszöbfüggvény rekurziv/,mert rekurziv Cantor sorozat konvergenciája automatikusan rekurziv:

$$\left|x-\sum_{n=0}^{k}\frac{a_n}{c_n}\right| \leq \frac{1}{c_k} \leq 1/2^k$$

A cantor - sorozat nyilvánvalóan általánositása a g-alapú számrendszerben való felirásnak illetve a 2.2. definicióban szereplő faktoriálisos sorozatnak , $b_n=g$ illetve $b_n=n$ választással. A Dedekind - szeletes definicióval /ld.később/ való kapcsolatát később vizsgálom meg, ld.pl.Mechowsky /50/ és Péter/60/ -ban .

Ha az irracionális számokat racionális számsorozatok határértékeként definiáljuk,akkor szintén természetes az alábbi

2.8.Definició: Ha f,g és h rekurziv függvények , akkor az $r_n = \frac{f/n/ - g/n/}{1 + h/n/}$ racionális számsorozatot rekurziv sorozatnak nevezzük.Egy tetszőleges valós számokból álló x_n sorozat rekurziv módon konvergál egy x valós számhoz , ha létezik olyan k rekurziv függvény , hogy

$$/2.8./ \quad \forall m \, \forall n \left(\text{ha } m > k/n/ \text{ akkor } |x_m - x| < 1/n\right)$$

Ekkor a k függvényt az x_n sorozat modulusának vagy regulátorának nevezzük.Végül egy x valós számot rekurziv KVSZ -nak nevezünk,ha létezik hozzá rekurzive konvergáló rekurziv sorozat . /ld.pl. Specker/77/,Monk/55/,Péter /60/ vagy Pour-El/65/./

A fenti definiciót nyilván irhatjuk $|r_n - x| < 1/n$ alakban is , $r_n^{új} = r_{k/n/+1}^{régi}$ választással . /Ezt a definiciót használja pl.Lachlan/39/ is./
A rekurziv sorozatok másik definicióját találjuk Gleave /14/ -ban :

2.9.Definició: Legyen $\Re$ rekurziv /azaz programozható/ bijekció N -ből Q -ba rögzitett.Egy r_n racionális számokból álló sorozat rekurziv,ha létezik olyan f rekurziv függvény , amelyre minden n természetes számra $r_n = \Re/f/n//$.

Szemmel láthatóan egy r_n racionális sorozat a két definició szerint egyszerre rekurziv . Vagyis nem kapunk uj definiciót a rekurziv KVSZ Lachlan /39/ -beli definiciójában : x rekurziv KVSZ , ha $|x - \Re f/n/| < 1/n$ valamely f rekurziv függvényre . Ez utóbbi definició alapján azonban könnyebben lehet vizsgálni a rekurziv sorozatok és KVSZ -ok bonyolultságát , ld. pl. Grzegorczyk /24/ alapján Cleave /14/ -ban.
Később látni fogjuk , hogy a rekurziv KVSZ-ok összes definiciója nem primitiv rekurziv esetben ekvivalens.Továbbá egyéb kellemetlen jelenségek is vannak primitiv rekurziv esetben , amiket szintén ld.a 2.18.tétel után.

Mivel egy sorozat esetében általában a határértéket nem ismerjük , csak a sorozatot , igy a /2.8./ egyenlőtlenséget nehéz ellenőrizni . Ezért természetesebb a következő

2.11.Definició:Egy x valós szám rekurziv KVSZ , ha teljesülnek a 2.8. definició feltételei , továbbá $n , n' > k/m/$ esetén $| r_n - r_{n'}| < 1/m$. /Amit tetszés szerint irhatunk $|r_n-r_{n'}| < 1/\min(n,n')$ vagy $|r_n-r_{n'}| < 1/n+1/n'$ alakban is . ld.pl. Bishop/7/ vagy Feferman /94/ 14.§.5.-ben./ Könnyü belátni , hogy a definició utóbbi változatai ekvivalensek . Pl. a sorozat átindexelésével . Valamint az is nyilvánvaló , hogy a 2.11. és 2.8.definiciók is ekvivalensek . A rekurziv KVSZ -ok utóbbi definiciója alapján könnyen belátható . hogy a rekurziv , de nem primitiv rekurziv KVSZ -ok R-nek egy sürü részhalmazát alkotják . /Ugyanis egyet nagyon könnyü találni , és ennek tetszőleges racionális eltoltja ismét rekurziv, de nem primitiv rekurziv KVSZ./

Ha racionális számok helyett csak diadikus számokkal

/azaz 2^k nevezőjü törtekkel/ foglalkozunk , akkor is nyilván /nem primitiv rekurziv esetben/ ugyanazon számok lesznek kiszámithatóak.
Könnyen látható az is , hogy a 2.8. definició ekviva - lens a 2.6. -al , hiszen legyen $r_n = f / \frac{1}{n} /$. Megforditva ha $1/m < r$,akkor legyen $f/r/ = r_m$.

A leningrádi iskola követői megkülönböztetik a konstruktiv gondolkodásmód sugallta következő definiciókat is /ld.pl.Kusner /38/ , Demuth/34/ vagy Sanin/73/ -ban , vagy /Trosztnyikov /85/ -ban:/

2.12.Definició: Ha r_n racionális számokból álló rekurziv sorozat és k rekurziv függvény modulus , akkor az /r,k/ párt nevezzük FR- vagy rekurziv KVSZ -nak. /Lényegében ez a 2.8.definició. */

2.13.Definició: Egy r_n racionális számokból álló re - kurziv sorozatot F- illetve kváziszámnak nevezünk , ha egy hozzá tartozó rekurziv modulus létez se bizonyitható illetve nem cáfolható.

2.14.Definició: Egy r_n racionális számsorozat pszeudo - szám , ha

$$\forall n \neg\neg \exists m \forall k \forall l : \left(k,l > m \Rightarrow |r_k - r_l| < 2^{-m} \right)$$

/Az intuicionista logikában $\neg\neg\exists x \phi(x) \not\Rightarrow \exists x \phi(x)$/
Én itt nem foglalkozom e számok és a rekurziv KVSZ -ok kapcsolatával. Az érdeklődők figyelmébe ajánlom Kusner /38/ müvének II.fejezet 2.§-át.

A megszokott valós számokat sem csak racionális számsorozatok határértékeként definiálhatjuk , hanem Dedekind -szeletekkel vagy egymásba skatulyázott intervallumok metszeteként is . Lássuk ezek rekurziv megfelelőit :

---

* Szerintem túlzott óvatosság párokkal foglalkozni.Hiszen ha elméletileg foglalkozunk egy rekurziv KVSZ -al,akkor csak egy rekurziv modulus <u>létezése</u> a lényeges ;gyakorlati alkalmazások esetén pedig egy rekurziv szám megadása úgyis e modulus mellékelésével jár,amit a továbbiakban úgysem használunk semmire.

<u>2.15.Definició:</u> /az irodalomban Mazur definiciója néven ismert:/
Egy x valós szám rekurziv vágást definiál, / és ekkor rekurziv KVSZ-nak mondjuk/ ha Q -n az általa definiált Dedekind-szeletek rekurzivok.Azaz a

$$A/r/=\text{igaz} \quad \Leftrightarrow r<x \quad \text{illetve} \quad \Theta/r/=\text{igaz} \Leftrightarrow r>x$$

relációk rekurzivak .

Pontosabban[x] nem mindegy , hogy A vagy csak Θ vagy mindkettő rekurzivitását követeljük meg . Hiszen ha csak annyit tudunk , hogy "tetszőleges r racionális szám esetén $A/r/$ algoritmussal eldönthető ", akkor még egyáltalán nem biztos , hogy Θ -ra is találunk algoritmust. Hiszen ha $\Theta/r_0/$ -át akarjuk meghatározni , akkor kellene olyan r_1 racionális számot találni , amelyre $r_1<r_0$ és $A/r_1/$ hamis , vagy olyan $r_2>r_0$ számot , amelyre $A/r_2/$ igaz . Mondhatná valaki , hogy tekintsünk egy r_n^1 és r_n^2 racionális számokból álló rekurziv sorozatot /itt 1 és 2 felső indexek!/ , amelyek alulról illetve felülről közelitik r -et , ellenőrizzük sorban $A/r_n^1/$ -et és $A/r_n^2/$ -et , és valamikor csak találunk megfelelő r_n^1 vagy r_n^2 számot . Igen , de x = r esetén ez az eljárás nem fog véget érni. Azt gondolhatná valaki ezek után , hogy a fenti gondolatmenet szerint ha az x által definiált alsó Dedekind szelet rekurziv,akkor a felső szelet parciális rekurziv,de nem totális rekurziv. Azonban nem szabad összetéveszteni a "létezik" állitást azzal,hogy "megkonstruálhatjuk".A fenti gondolatmenet szerint általában nem tudjuk megkonstruálni A algoritmusából Θ algoritmusát,mert nem dönthető el algoritmikusan az , hogy egy adott x rekurziv KVSZ racionális-e.De ha x racionális , akkor triviálisan mind az alsó mind a felső Dedekind szeletek rekurzivok!Igy valóban mindegy , hogy melyik Dedekind-szeletről követeljük meg , hogy rekurziv legyen.[x]

---

[x] Mint láttuk,a leningrádi iskola nem teljesen alaptalanul különbözteti meg a fenti definició változatait.

A 2.15.definició szemmel láthatóan ekvivalens az "r_1 és r_2 ugyanabban a Dedekind-szeletben vannak reláció rekurziv Q-n" feltétellel./v.ö.a 3.2.tétellel!/ Továbbá π segitségével a Q-n értelmezett relációk megfeleltethetőek az N-en értelmezett relációknak.A Dedekind szeletek tanulmányozását részletesebben lásd Myhill /57/ -ban.

2.16.Definició: Egy x valós szám rekurziv KVSZ , ha létezik racionális végpontu szakaszok olyan egymásba skatulyázott $/r_n,s_n/$ sorozata , amelyek hossza 0-hoz konvergál, és a metszetük x . /Pontosabban az r_n és s_n sorozatok kiszámithatóak./ A definició alapján az intervallumok hossza rekurzive tart 0-hoz.

2.17.TÉTEL:

Nem primitiv rekurziv esetben a rekurziv KVSZ -ok eddig adott definiciói ekvivalensek.

BIZONYITÁS: /A bizonyitás egyes részletei megtalálhatóak Hermes/29/,Klaua /35/ , Meschkowsky/50/,Mostowsky/56/ , Rice/67/ és Specker/77/-ben./

A 2.1.- 2.6.definiciók ekvivalenciáját már láttuk.
A 2.7.definició nyilvánvalóan általánositása a 2.1. és 2.2.definicióknak.Megforditva ha x rekurziv KVSZ a 2.7. definició értelmében,akkor a /2.7./ összefüggés miatt ha a $\sum_{n=0}^{k} a_n/c_n$ törtet átirjuk kettes számrendszerbe , akkor megkapjuk az f/0/,f/1/,...,f/k-1/ értékeket , mert mindkét sorozat monoton növő.
A 2.8. és 2.6.definiciók ekvivalenciája is könnyen belátható , ha a rekurziv függvények gépi megfogalmazására gondolunk : ha x rekurziv KVSZ a 2.6.definició értelmében,akkor az $r_n = f/\frac{1}{n}/$ sorozathoz nyilván találunk a 2.8. definiciót kielégitő f,g és h függvényeket előállitó programot.Megforditva , az $f/ \frac{m}{n} / = r_n$ egyenlőséggel definiált függvény is programozható , ha r_n rekurziv sorozat és kielégiti a 2.8. definiciót .
A 2.9. és 2.11. definiciók ekvivalenciáját is láttuk már.
A 2.15. definiciót természetesen ugy értjük,hogy az alsó és a felső szeletek is rekurzivok. Ekkor a 2.15.definici-

óból könnyen következik 2.8:két $1/n$ -nél közelebbi racionális számot kell algoritmusunkkal találni, amelyek különböző szeletekben vannak.Megforditva ismét akkor lennénk bajban , ha a közelitendő szám racionális. Máskor pedig olyan r_n racionális számot kell találnunk,amelyre $x > r_n+1/n$ vagy $x < r_n-1/n$.
Látható,hogy ha x a 2.16.definició értelmében rekurziv KVSZ,akkor a 2.8.definició szerint is az . Megforditva ha r_n rekurziv sorozat , és $|r_n-x| < 1/n$ akkor az r_n-2/n és r_n+2/n sorozatok közrefogják x -et , és az ilyen végpontu szakaszok hossza 0-hoz tart. $\square$

A 2.24.definicióban egy újabb változatot találunk a rekurziv KVSZ fogalmára , és ekvivalenciáját is ott vizsgáljuk meg . A következőkben pedig megvizsgáljuk az eddigi definiciók kapcsolatát primitiv rekurziv esetben.További vizsgálatok találhatóak Goodstein/21/,Lachlan/39/, Meschkowsky/50/ , Péter/60/,Mostowsky/56/ és Specker/77/ müvekben. Továbbá érdemes elolvasni a tétel utáni megjegyzést is .

2.18.TÉTEL:

Jelölje i=1,2,4,5,6,7,8,9,11,15 és 16 esetben R_i az i -edik definicióban adott primitiv rekurziv KVSZ -ok halmazát. Ekkor

$$R_2 = R_4 = R_{15} \subsetneqq R_1 \subsetneqq R_7 \subsetneqq R_8 = R_6 = R_5 = R_9 = R_{11} \subsetneqq R_{16}$$

BIZONYITÁS:

$R_2=R_4$: a 2.3.állitásban ezt igazoltuk.
$R_4 \subseteq R_{15}$: /Péter /60/ 24.§.4.-5.alapján:/
$m/(m+1) > x$ akkor és csak akkor ha $m > /n+1/x$, és mivel m egész szám , igy ez akkor és csak akkor állhat fennt , ha $m > [(n+1)x]+1$. Ha pedig $x \in R_4$ akkor x rekurziv vágást definiál a fentiek szerint , és igy $x \in R_{15}$.
Megforditva belátjuk , hogy tetszőleges b primitiv rekurziv függvény esetén x általános Cantor-összegbe fejthető , ha $x \in R_{15}$, azaz rekurziv vágást definiál.Nyilván a_1 a legkisebb olyan y szám ,

amelyre $(y+1)/b_1 > x$. Igy

$$a_1 = \mu y \left(y \leq b_1 \dot{-} 1 \ \& \ \frac{y+1}{b_1} > x \right)$$

Mivel korlátos μ operátor használata pri - mitiv rekurziv függvényt eredményez , igy a_1 primitiv rekurziv módon kiszámitható b_1-ből . A többi a_i primitiv rekurziv előállithatóságát indukcióval látjuk be. Tegyük fel, hogy $a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n+1}$ számokra ezt már beláttuk. Ekkor létezik egy olyan b_{n-2} -nél kisebb y szám , amelyre

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_1}{\underbrace{\prod_{j=1}^{i} b_j}_{c_i}} + \frac{y+1}{c_{n+2}} > x$$

/Itt természetesen felhasználtuk , hogy a_1 , ... , a_{n+1} a Cantor-összeg eleje./
Ekkor legyen

$$a_{n+2} = \mu y \left(y \leq b_{n+2} \dot{-} 1 \ \& \ a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{c_i} + \frac{y+1}{c_{n+2}} > x \right)$$

Ez pedi primitiv rekurziv formula, mert

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{c_i} + \frac{y+1}{c_{n+2}} = \frac{a_1 b_2 \ldots b_{n+2} + \ldots + a_n b_{n+2} + y + 1}{(c_{n+2} \dot{-} 1) + 1}$$

Eddig tehát beláttuk, hogy $R_2 = R_4 = R_{15} \subseteq R_1$. A forditott irányú tartalmazás azért nem bizonyitható, mert az előző bizonyitás az $R_2 = R_4$ azonosságon alapult , ami pedig kihasználja a Cantor - -összeg nevezőinek specialitását.

Egyébként nem is igaz a forditott irányu tartalmazás. Szemléletesen ezt a következő gondolatmenettel lehet belátni :
ha az x tizes számrendszerbeli jegyeit előállitó függvényről , annak belső strukturájáról semmit sem tudunk, csak az $f/0/, f/1/, \ldots, f/m/$

értékeit kaphatjuk meg , de csak véges sokat /azaz f -et csak egy ún. "orákulum" -ként használhatjuk / , akkor nem tudhatjuk , hogy x racionális avagy sem , vagy a kapott számjegyek hogyan folytatódnak . Pl. ha az eddig kapott jegyek 0 , 3 , 3 , 3. . . , akkor nem tudhatjuk , hogy az x szám kisebb , nagyobb vagy egyenlő - e 1/3 -hál . " Igen ,ezt az okoskodást írhattuk volna a faktoriálisos Cantor - összegnél is ... " - mondhatná bárki. Csakhogy,amint ezt az $R_4 \subset R_{15}$ rész bizonyításánál láttuk : ha az x számot egy n nevezőjü törtszámmal akarunk összehasonlitani , akkor a Cantor - összegnek elég megvizsgálnunk az első n db tagját ; mert a faktoriális - sorozat nagyon gyorsan közeliti az x számot , nem exponenciálisan , hanem - a Stirling - formula szerint - n^n nagyságrendben . Hogy mi a biztosíték arra , hogy egy n nevezőjü tört összehasonlitásakor nem kapunk korlátot a szükséges tizedes-jegyek számára ? A fenti 1/3 -os példa !

Az $R_1 \subsetneq R_7$ tartalmazás a definicióból nyilvánvaló . Megforditva következik a 2.18.A tételből , pontosabban annak b./ részéből .

Az $R_7 \subsetneq R_8$ tartalmazás a /2.7./ egyenlőtlenségből következik.
A forditott irány* pedig következik akkor , ha x racionális szám vagy pedig rekurzivan irracionális , azaz létezik olyan u és v_2

*lásd Péter /60/ -ban.

primitiv rekurziv függvény , amelyekre tetsző-
leges p/q racionális szám esetén
ha $n > v_2/p,q/$. Pontosabban belátjuk,hogy
ekkor $x \in R_4$.Ehhez elegendő belátni,hogy tet-
szőleges m természetes szám esetén $[mx] = [mr_{v/m/}]$
ahol v egy primitiv rekurziv függvény.
Jelöljük v_1-el a 2.8.definició szerint létező
primitiv rekurziv modulust,mivel x R_8.Legyen to-
vábbá $g(m)=[m r_{v_1(2m)}]$ ami nyilvánvalóan primitiv re-
kurziv.Két esetet fogunk megkülönböztetni:

a./ $0 \leq m r_{v_1(2m)} - g(m) \leq 1/2$. Ez esetben v_1 definició -
jából következik,hogy $|r_n - r_{v_1(m)}| < 1/2m$
azaz $|mr_n - mr_{v_1(2m)}| < 1/2$ hacsak $n \geq v_1(2m)$
Ekkor az a./ feltevéssel egybevetve kapjuk,hogy
$|m r_n - g(m)| < 1$ .Másrészt,mivel x rekurzivan
irracionális,igy $n \geq v_2(g(m),m)$ esetén
$|r_n - g(m)/m| > \frac{1}{u(g_m,n)}$ ahonnan kapjuk,hogy

$$|m r_n - g(m)| > m/u(g(m),n)$$

Tekintetbe véve az előző egyenlőtlenséget az
utóbbi csak akkor lehet igaz,ha $k_m = m/u(g(m),n) < 1$
Azaz kaptuk,hogy $n \geq max(v_1(2m), v_2(g(m),m))$
esetén $k_m < |mr_n - g(m)| < 1$. Ilyen n számokra
tehát mr_n az alábbi nyilt intervallumok egyikében
fekszik: $(g(m)-1, g(m)-k_m)$
vagy $(g(m)+k_m, g(m)+1)$, attól függően,hogy
$mr_n > g/m/$ avagy $mr_n < g/m/$.A két intervallum közötti
szakasz hossza $2k_m$.Elég nagy n -re az mr_n sorozat
tagjai kevesebbel térnek el egymástól,mint $2k_m$, azaz
ugyanazon fenti intervallumba esenk.Pontosabban
ha $n, n' \geq v_1(u(g(m)),m)$ akkor $|r_n - r_{n'}| < 1/u(g(m),m)$
ahonnan $|m r_n - m r_{n'}| < k_m$. Láthatjuk,hogy ilyen nagy
index esetén mr_n csak egyik intervallumba esik.
Legyen $v_0/m/ = max(v_1(2m), v_2(g(m),m), v_1(u(g(m),m)))$
Ekkor vagy minden $n \geq v_0/m/$ esetén $g(m)+k_m < mr_n \leq g(m)+1$
ahonnan $[m r_n] = g(m)$
vagy pedig minden $n \geq v_0/m/$ indexre

$$g(m) - 1 < mr_n < g(m)$$

vagyis

$$[mr_n] = g(m) - 1$$

Kaptuk tehát , hogy mindkét esetben $[mx_n]$ független n-től, azaz $n \geq v_0/m/$ esetén $[m r_n] = [m r_{v_0(m)}]$

A b./ esetben , vagyis amikor $m r_{v_1(2m)} - g(m) \geq \frac{1}{2}$, hasonló okoskodással élve hasonló eredményre juthatunk, v_0 helyett egy v_0^* rekurziv függvényt kapunk. Legyen tehát $v/m/ = \max/ v_0/m/, v_0^*/m/ /$, és igy kapjuk, hogy $[m r_n] = [m r_{v(m)}]$ feltéve, hogy $n \geq v/m/$. Innen már következik a kivánt $[mx] = [m r_{v(m)}]$ állitás. Beláttuk tehát, hogy ha $x \in R_8$ és tudjuk, hogy x racionális vagy primitiv rekurziv módon irracionális, akkor $x \in R_4$. Mint a következő részben látni fogjuk, nem létezik olyan algoritmus, amely adott rekurziv KVSZ -ról eldöntené, hogy racionális-e. Felmerül a kérdés, hogy más módon be tudjuk-e látni, hogy $R_8 \subset R_1$? A válasz az, hogy $R_8 \not\subset R_1$. Az indoklás hasonló az $R_{15} \subsetneq R_1$ eset indoklásához: Tegyük fel, hogy a sorozat elemei $r_n = 1 - 10^{-n}$, legalábbis addig, míg kiszámitottuk őket. /Mint tudjuk, gépünk a sorozat tetszőlegesen sok, de csak véges sok tagját ismerheti a sorozatnak. /Mivel nem tudhatjuk, ezek alapján, hogy az r_n sorozat által közelitett x szám 1-nél nagyobb vagy kisebb, igy egyetlen számjegyét sem tudjuk felirni. Nem várhatjuk meg, hogy n olyan nagy legyen, hogy r_n eldöntse ezt a kérdést, hiszen most primitiv rekurziv függvényt keresünk.

$R_8 = R_5$ az előző tétel bizonyitásából következik.

$R_5 = R_9$ is , ha π-t primitiv rekurziv függvénynek választjuk.

$R_8 = R_{11}$ is következik az előző tétel bizonyitásából, amely primitiv rekurziv esetben is alkalmazható.

$R_8 = R_6$ is könnyen belátható, hiszen a megfelelő primitiv rekurziv illetve programozható függvények átirásakor a primitiv jelleg megmarad.

$R_8 \subset R_{16}$ szintén az előző tétel bizonyitásából következik. A határozott irányu tartalmazás a következőképpen mutatható meg: /Specker/77/ V. tétel alapján: /olyan egymásba skatulyázott intervallumsorozatot fogunk megadni, amelyek hossza nem rekurzivan tart 0-hoz, sőt a metszetük nem is tartalmaz R_8-beli primitiv

rekurziv KVSZ -ot. Legyen B/m,n/ a következő predikátum/formula/: $B(m,n)=$ igaz$(=1)$ $\Leftrightarrow$ $(n \in Dom\, \varphi_n \,\&\, n>m)$
Ekkor B/0,0/=1 ,B primitiv rekurziv, és minden m-re létezik olyan n, hogy B/m,n/ igaz, de ezt az n-et nem lehet primitiv rekurziv módon megtalálni. Legyen továbbá s egy tetszőleges primitiv rekurziv függvény, amelynek értékkészlete csak 0-t és 5-t tartalmaz, de mindegyiket végtelen sokszor felveszi. Legyen s/0/=0. Ekkor definiáljuk a következő primitiv rekurziv függvényeket:

$$t/m,n/ = s\left(\min_x \left\{ x \leq n \text{ és } B/m,x/ \text{ igaz} \right\}\right)$$

$$k/n/ = \max_x \left(x \leq n \text{ és } \forall y \exists z \left(y \leq x \Rightarrow B/y,z/ \text{ igaz és } z < n \right)\right)$$

ekkor nyilván létezik olyan M primitiv rekurziv függvény, hogy n > M/m/ esetén k/n/ > m. Az intervallumok felső és alsó végpontjai pedig legyenek

$$\bar{a}/n/=\sum_{i=0}^{k(n)} \frac{t(n,i)}{6^i} \qquad \text{és} \qquad \theta/n/= \phi(n) + \frac{2}{6^{k(n)}}$$

Ekkor belátható, hogy az intervallumok egymásba skatulyázottak és hosszuk 0-hoz tart. Cantor tétele szerint ekkor létezik egy x valós szám, amely mindegyik intervallumban benne van. Lehet-e R_8-beli? Ha igen, akkor létezik olyan r_n primitiv rekurziv sorozat és olyan h feltétlenül primitiv rekurziv modulus, hogy $n > h/m/$ esetén $|\bar{a}/n/-r_n| < 6^{-m}$ és $n' > n$ esetén $|r_n - r_{n'}| < 6^{-n}$. Ekkor legyen $a/0/=5sg/p/0/\dot{-}3q/0//$ és $a/m+1/=5sg\left[p/m+1/6^{m+1} - q/m+1/\left(\sum_{k=0}^{m} a/k/6^{m+1-k}+3\right)\right]$, primitiv rekurziv függvény. /Ahol p/n/ illetve q/n/ jelöli az r_n törtek számlálóit illetve nevezőit./
Indukcióval belátható, hogy $a/m/=\max_x t/m,x/$, és igy az is primitiv rekurziv függvény. Azonban $\max_x t/m,x/ = 5/\min_n\{x \mid B/m,x/ \text{ igaz}\}/$ nem primitiv rekurziv, és ez az ellentmondás igazolja állitásunkat.

A 2.18. tétel bizonyitását tehát befejeztük. ■

A tételt finomitja Mostowsky/56/-ben és Lachlan /39/-ben: Jelöljük R_1^g -vel a 2.1.definició szerint g alapu szám - rendszerben felirható primitiv rekurziv KVSZ -ok halmazát. Legyen továbbá R_1^* a minden g alapu számrendszerben előállitható számok halmaza : $R_1^* = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{van } F \text{ rek.fv.}: \forall g \geq 2 \, \forall i \geq 0: 0 \leq F(i,g) < g \text{ és } x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F(i,g)}{g^i}\}$

<u>2.18.A.Tétel:</u> $R_{15} = R_1^* \subsetneqq \bigcap_{g>1} R_1^g \subsetneqq R_1^n \subsetneqq R_5$ minden n-re

és $R_1^p \supsetneqq R_1^q \iff \exists s \in \mathbb{N}: p \mid q^s$

Azonban nyilvánvalóan ha az intervallumok hossza nem tart 0-hoz, akkor metszetükben mindig van R_1 - , sőt R_2-beli primitiv rekurziv KVSZ, hiszen R_2 mindenütt sürü R-ben, amint ez könnyen belátható. Az is szemmel látható, hogy nem primitiv rekurziv esetben a rekurziv KVSZ-ok testet alkotnak/ez legkönnyebben a 2.16.definició alapján látható be/. Ha a gyökközelitő algoritmusokra gondolunk, akkor az is belátható, hogy algebrailag zárt testet kapunk, bár itt körültekintőbben kell eljárnunk. Az algebrai zártság másik bizonyitása megtalálható pl. Roosenbloom/70/ vagy Rice /67/ -ben.

Primitiv rekurziv esetben meglepő a helyzet: még összeadásra sem zárt R_1 /pontosabban ld. a 2.18.B.tételt./ Könnyen belátható azonban, hogy R_8 és R_{16} is testet alkot primitiv rekurziv esetben, bár a bizonyitásnál tekintettel kell lenni az előjelekre és a sorozatok 0 tagjaira. Várhatóan R_8 nem algebrailag zárt, mert a modulus primitiv rekurziv voltát nem tudjuk biztositani. Mivel R_{16}-ban az intervallumoknak nem kell primitiv rekurziv módon 0-hoz tartaniuk, ezért R_{16} is algebrailag zárt.

<u>2.18.B.Tétel:</u> /ld. Specker//77/ IV.tétel:/
Létezik olyan R_1 -beli primitiv rekurziv x KVSZ, amelyre 3x nem R_1 -beli primitiv rekurziv KVSZ.

<u>Bizonyitás:</u> Legyen A a következő predikátum:

$$A(n) = 1 \ (= \text{igaz}) \iff (n \in \mathrm{Dom}\, \varphi_n)$$

Ekkor minden n-re létezik olyan m , ami n-nél nagyobb és

$$A(m) \quad \text{és} \quad q(n) = g(\min\{x \mid x \geq n \text{ és } A(x)\})$$

nem primitiv rekurziv függvénye n-nek ; ahol g tetszőleges olyan primitiv rekurziv függvény, amely értékkészlete 0 és 5 , és ez értékeket végtelen sokszor fel is veszi. Legyen R az A kifejezés karakterisztikus függvénye , azaz $R/n/=0$ ha $A/n/$ igaz és 1 egyébként. Legyen továbbá

$$\phi(n) = 3\,sg\,R(n) + g(n)(1 - sg\,R(n))$$

Ekkor könnyen belátható, hogy ϕ értékkészlete 1, 3 és 5 , és $\phi/n/ \neq 3$ akkor és csak akkor, ha $A/n/$ igaz.

Igy

$$\phi(\mu x(x \geq n \,\&\, \phi(x) \neq 3)) = \phi(\mu(x)(x \geq n \,\&\, A(x))) = q(n)$$

Legyen ekkor $x = \sum_{i=0}^{\infty} \phi(i) 10^{-i}$, nyilván R_1-beli.

Tegyük fel indirekte, hogy 3x is R_1-beli, azaz van olyan Θ primitiv rekurziv függvény, amelyre $3x = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta/i/10^{-i}$

Könnyen belátható azonban, hogy $q/n+1/=f/\Theta/n+1//$, ahol $f/n/=5$ ha n páros és 1 egyébként. Ez nyilvánvalóan ellentmondás, mert f és Θ primitiv rekurzivok, q pedig nem. Ez bizonyitja állitásunkat. ■

A tételt általánositja Lachlan /39/-ban, ahol bebizonyitja, hogy tetszőleges k, m, n természetes számokra

$$\exists x \in R_1^m : k \cdot x \notin R_1^n \iff \forall s \in \mathbb{N} : k \cdot n \nmid m^s$$

Érdekességként megemlitem Specker /77/-ben bizonyitott tételét, mely szerint minden R_8-beli primitiv rekurziv KVSZ előállitható két db R_{15}-beli primitiv rekurziv KVSZ összegeként. A fenti két tétel bizonyitása hasonló a 2.18.A. tétel bizonyitásához.

A sürüségekre visszatérve érdekes megemlitemi még, hogy a 2.15. definicióban nem szükséges az összes racionális számot igénybe vennünk. /ld. Lachlan /39//:

<u>2.19.Definició:</u> $A \subset Q$ rekurzive sürü,ha létezik olyan f rekurziv függvény,amelyre

$$\forall m,n \ . \ \pi(m) < \pi(n) \Rightarrow \pi(m) < f(m,n) < \pi(n) \ \& \ f(m,n) \in A$$

azaz két tetszőleges racionális számhoz rekurzive meg lehet találni a középük eső A-beli elemet. /Itt is érvényes a 2.1.definició megjegyzése!/
Továbbá a racionális számok tetszőleges A részhalmaza esetén legyen

$$C_A^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists f \text{ pr.rek.fv: } \forall m \in \mathbb{N} : \pi(m) \in A \Rightarrow (f(m) = 0 \Leftrightarrow \pi(m) < x)\}$$

és primitiv rekurziv függvények helyett rekurziv függvényeket megengedve hasonlóan kapjuk a C_A^1 halmazokat.

<u>2.21.Tétel:</u> /Speeker/77/ és Lachlan/39/:/
Ha $A \subset Q$ primitiv rekurziv sürü,akkor $C_A^0 = R_1$
ha $A \subset Q$ rekurziv sürü,akkor $C_A^1 = R_6$
/ahol most R_1 -et primitiv rekurziv esetben használtam és természetesen R_6 -ot rekurziv esetben./
A primitiv rekurziv KVSZ -ok további általános vizsgálatát főleg sürüségüket illetően ld.Lachlan/39/ és Mayoh /49/-ban, valamint a következő fejezetben.

Legtöbbször egy KVSZ-hoz több $\{r_n\}$ sorozat is tartozik./ld.pl.a 2.9.definiciót/ , és egy r_n sorozat /ami $^N Q$ egy eleme/ csak egy rekurziv számhoz konvergálhat. Igy tulajdonképpen - mivel konstruktiv felépités miatt csak a rekurziv függvények állnak rendelkezésünkre,és nem a rekurziv sorozatok határértékei,célszerübb az r_n sorozatokat határértékük szerint ekvivalenciaosztályokba rendezni és egy-egy ekvivalenciaosztályt hivni rekurziv KVSZ-nak. /ld.pl.Trosztnyikov /65/-öt./ Itt ismét felmerül a kérdés: egy r_n és r_n' sorozatot csak akkor tekintsünk ekvivalenseknek,ha a különbségsorozat effektive tart 0-hoz?Erről a vélemények megoszlanak./Ld.pl.Feferman/94/ cikkét./De az elmélet felépitésében nem játszik lényeges szerepet

Az 1.1. állitás és a fentiek alapján nem meglepő a rekurziv KVSZ-ok alább következő felépitése : /részletesebben lásd Aberth /1/-ben. Tulajdonképpen ez a felépités megtalálható több korai müben is,csak kevésbé észrevehetően,ld.pl.Markov/46/ vagy Klaua /35/-ban./

<u>2.22.Definició:</u> Az f programozható függvényt kiszámitható folyamatnak nevezzük,ha tetszőleges r_1 és r_2 racionális számokra $|f(r_1)-f(r_2)| < |r_1|+|r_2|$ /Tulajdonképpen egy kiszámitható folyamat egy olyan program,amely adott ε hibakorlát esetén kiszámitja az x_f valós szám közelitését ε hibával./v.ö.a 2.6. és 2.11.definiciókkal.//

A továbbiakban először bevezetjük a kiszámitható folyamatok közötti alapmüveleteket,majd természetes módon /intuitive a közelitett valós számok alapján / e kiszámitható folyamatokat az alapmüveletekkel kompatibilis ekvivalencia-osztályokba osztjuk,és az ekvivalenciaosztályokat fogjuk nevezni rekurziv KVSZ-oknak.Könnyen belátható módon /legegyszerübben a 2.6.és 2.11.definiciók alapján/ az igy kapott rekurziv KVSZ-ok definiciója megegyezik az eddigi definiciókkal,feltéve,hogy felépitésünkben parciális rekurziv függvényeket is megengedünk.

<u>2-23-Definició:</u> Ha f és g kiszámitható folyamatok,akkor közöttük az alapmüveleteket az alábbi módon definiáljuk:

$$(f \pm g)(r) = f\left(\tfrac{r}{2}\right) \pm g\left(\tfrac{r}{2}\right)$$
$$(f \cdot g)(r) = f\left(\tfrac{r}{N}\right) \cdot g\left(\tfrac{r}{N}\right)$$

ahol N=N/r/ a legkisebb olyan természetes szám,amelyre

$$\frac{2r}{N} \cdot \left(\left|f\left(\tfrac{r}{N}\right)\right| + \left|g\left(\tfrac{r}{N}\right)\right| + \frac{2r}{N} \right) \leq r$$

Nyilvánvalóan ilyen N szám tetszőleges f és g kiszámitható folyamatok esetén létezik,és N/r/ programozható függvény. Továbbá legyen

2.24.Definició: Az f kiszámitható folyamat nulla-folyamat, ha tetszőleges r racionális szám esetén $|f(r)| < |r|$
Két f és g kiszámitható folyamatot ekvivalensnek nevezünk, ha f-g nulla folyamat.Egy-egy ekvivalenciaosztályt pedig rekurziv KVSZ-nak nevezünk.

Intuitiv módon érződik,hogy ha N_f és N_g kiszámitható folyamatok kódjai,akkor még ebből f=g vagy f ekvivalens g-vel sem eldönthető,és ez könnyen igazolható.

2.25.Definició: Ha f tetszőleges kiszámitható folyamat, akkor legyen

$$\left(\frac{f}{g}\right)(r) = f\left(\frac{r}{N}\right) / g\left(\frac{r}{N}\right)$$

ahol természetesen g nem ekvivalens a nulla folyamathoz és N=N/r/ a legkisebb o olyan természetes szám, amely az alábbi két egyenlőtlenséget kielégiti:

$$\left|g\left(\frac{r}{N}\right)\right| > \frac{r}{N} \quad \text{és} \quad \frac{\frac{2r}{N}\left(\left|f\left(\frac{r}{N}\right)\right| + \left|g\left(\frac{r}{N}\right)\right|\right)}{\left(\left|g\left(\frac{r}{N}\right)\right| - \frac{2r}{N}\right)\cdot\left|g\left(\frac{r}{N}\right)\right|} < r$$

/E bonyolult feltételről a bizonyitás végiggondolásakor lesz világos, hogy szükséges./

2.26.Tétel: A 2.24.definicióban bevezetett reláció ekvivalenciareláció , továbbá a 2.23. és 2.25.definiciókban bevezetett müveletekkel kompatibilis,továbbá az ekvivalenciaosztályok a müveletekre nézve testet alkotnak.
A rekurziv KVSZ -ok testét a továbbiakban K-val jelölöm.
Ezenkivül ha minden r racionális számhoz megfeleltetjük az azonosan r eredményt adó kiszámitható folyamat osztályát,akkor Q egy homomorf beágyazását kapjuk.
A tételt nem bizonyitom,lévén apró rutinszámolások sorozata.Részletesebben ld.Aberth/1/ -ben.

2.27.Tétel: A rekurziv KVSZ-ok R-nek résztestjét alkotják.

2.28.Definició: Egy f kiszámitható folyamat pozitiv illetve negativ azszerint,hogy létezik olyan pozitiv r racionális szám amelyre $f/r/ > 0$ illetve $f/r/ < -r$. Az f kiszámitható folyamat nagyobb g-nél,ha f - g pozitiv.

A definiciók értelmessége következik abból,hogy hogyan definiáltuk a kiszámitható folyamatokat. Könnyen belátható hogy a fenti rendezés is kompatibilis az ekvivalencia relációval , igy természetes módon definiálnatjuk a kiszámitható folyamatok és a rekurziv KVSZ-ok rendezését.A müveletek , a rendezés és az abszzolutérték kö - zötti azonosságok mind igazak maradnak.

A KVSZ-ok körében az irracionalitást és a transzcendenciát egészen természetes módon lehet definiálni.Például lássuk Goodstein/21/ definicióját : egy r_n racionális számsorozat irracionális rekurziv KVSZ -ot definiál, ha léteznek olyan h és g függvények , melyek rekurzivok, g mindig 1-nél nagyobb értéket vesz fel és $n > h/p,q,r/$ esetén $\left|r_n - \frac{p-q}{r+1}\right| > 1/g(p,q,r)$. Az irracionális és transzcendens rekurziv KVSZ -ok további tulajdonságait lásd Goodstein fent emlitett müvében,az 1.6.tételtől kezdve.

Bár a rekurziv KVSZ-ok rendezése trichotom,sőt bizonyithatóan tetszőleges a,b rekurziv KVSZ-ok esetén az $a > b$, $a=b$, $a < b$ esetek közül pontosan az egyik állhat fennt / mert K be van ágyazva R-be/ . De effektiv módszer nem létezik annak eldöntésére,hogy éppen melyik , és melyik nem, sőt ezt még ellenőrizni sem tudjuk. További ha $x \geqslant y$ -t ugy definiáljuk,hogy $x < y$ nem igaz , akkor található olyan $x \in K$,amelyre $x \geqslant 0$, de sem $x > 0$ sem $x=0$ nem igazolható./ld.Bishop/7//,Troelstra/84/b/,Dummett /18/ . Azonban ha tudjuk,hogy $a \neq b$ akkor algoritmikusan el tudjuk dönteni,hogy az $a > b$ illetve $a < b$ esetek közül melyik áll fennt.Mindezek könnyen beláthatóak;az irodalomban ld.pl. Abertn/1/,Monk/55/ vagy Rice/67/-ben.Hasonlóan azt sem lehet eldönteni,hogy egy adott K-beli szám racionális-e, előjelét vagy valamelyik tizedesjegyét sem tudjuk megadni, valamint a reciprok sorozat küszöbfüggvényét sem tudjuk megadni./Ez nem mond ellent annak hogy $R_1 = R_{24}$. A tizedesjegyeket előállitó rekurziv függvény létezik, csak nem tudjuk megadni./ Mindezek bizonyitására a következő részben visszatérek.

Mindezek alapján már az sem meglepő,hogy a maximum, minimum és abszolutérték függvények nem algoritmikusak./ld.még Rice /67/ 227.oldalon/

Természetesen merül fel a kérdés : hogyan adunk meg egy kiszámitható valós számot?A Gödel-számozás ismeretében könnyen megadható egy olyan primitiv rekurziv függvény,amely egy adott számról eldönti,hogy egy szám egy programozható illetve parciális rekurziv függvény kódja-e.Azonban könnyen beláthatóan nincs olyan algoritmus,amely azt döntené el egy adott természetes számról, hogy egy kiszámitható folyamat kódja-e.Igy látható,hogy már a kiszámitható számok megadására illetve ellenőrzésére nincs effektiv módszerünk. Igy K nem is rekurzive felsorolható.Általában pedig:

2.29.Tétel: /Trosztnyikov/85/:/

Legyen M algoritmuskettősök egy olyan halmaza,amelyre

a./ $M \subset K$

b./ ha $a \in M$ és $a=b$ akkor $b \in M$

c./ $0 \in M$

d./ ha $r \in M$ és $r>0$ akkor létezik olyan $b \in M$, amelyre $b \neq 0$ és $b<r$

Továbbá/ld.Kusner/38/ és Ceitin/12/ , hogy tetszőleges r pozitiv számhoz nem lehet algoritmikusan megadni egy nála kisebb b pozitiv számot.K további tulajdonságait ld.Aberth/1/-ben,és Rice/67/-ben.

Rice /67/-ben az algebrai teljesség bizonyitása után a következőket irja: "It seems probable that another such adoptation wuold give a^b in K ,/a,b in K , $0<a$/ . If this is the case,it is unlikely that K will be citized for the lack of any particular useful number." /Azaz: úgy tünk , hogy hasonló átirás igazolná,hogy $a,b \in K$, $0<a$ esetén a^b is K-beli.Ha ez valóban igy van,akkor nem lehetséges,hogy K-ból hiányozhatna bármely fontos szám./Ez valóban igy van,és szerintem a bizonyitás önmagát kinálja a 2.8.definició alapján:

2.30.Tétel: Tetszőleges $a,b \in K$ esetén $a^b \in K$.
BIZONYITÁS: om a következő: Könnyen belátható, hogy ha az r_n sorozat határértéke r és az s_n sorozat határértéke s akkor az $r_n^{s_n}$ sorozat határértéke r^s. Ezért elegendő - és nem is okoz különösebb nehézséget - az utóbbi sorozathoz egy rekurziv modulust megadni.
A hatvány és exponenciális függvények szigorú monotonitása miatt

$$|r_n^{s_n} - r_m^{s_m}| \leq |r_n^{s_n} - r_m^{s_n}| + |r_m^{s_n} - r_m^{s_m}| < \left(\max(r_n, r_m)\right)^{s_n} |r_n - r_m| +$$
$$+ r_m^{\max(s_n, s_m)} \cdot |s_n - s_m|$$

és mivel mindkét sorozat korlátos, ezért a kivánt sorozathoz szemmel láthatóan létezik rekurziv modulus. Mivel a határértékre a hatványozás azonosságai öröklődnek, igy K-ban is igazak a hatványozás megszokott azonosságai. ■
Lásd még a 4.8. problémát a 4. fejezetben.

Tulajdonképpen a 2.4. definició ekvivalenciaosztályai alapján definiált KVSZ-ok is elég távol vannak a számitógépek által valóban kiszámitott számoktól.
Végül felmerül a kiszámitható számokon értelmezett kiszámitható metrika kérdése. Ha K-t R-be beágyazva képzeljük el, akkor semmi gondunk sincs. Ha pedig nem, akkor is megfelel az abszolútérték.

3.§.KISZÁMITHATÓ SOROZATOK

Legtermészetesebben azt gondolhatná valaki,hogy kiszámitható sorozatnak nevezünk egy olyan algoritmust,amely tetszőleges természetes számhoz /az indexhez/ megad egy rekurziv KVSZ -t.Azonban az előző fejezetben láttuk,hogy nem lehet olyan egyszerüen megadni egy rekurziv KVSZ-ot.Cseréljük ki kétváltozós rekurziv függvényre valamelyik definicióban szereplő egyváltozós rekurziv függvényt , és a második változó jelölje az indexet.Ez a definició található Meschkowsky /50/ ,Gregorczyk /25/ , Pour-El /65/ és Rice /67/ -ben.Az előző fejezet 1,8,15 és 16 definicióinak fenti változatait vizsgálja részlegesen Klaua /35/-ban.Azonban meglepő móden a 2.§. definicióinak fenti módosult változatai nem ekvivalensek .Ezt részletesen Mostowsky vizsgálta meg /56/-ben.Pontosabban:

3.1.DEFINICIÓ: /Mostowsky/56/./ Legyenek tetszőleges 1-nél nagyobb p természetes szám esetén $C_1, C_{2,p}, C_3, C_4$ és C_5 a valós sorozatok következő részhalmazai:

$$C_1 = \{(x_k)\subset\mathbb{R} \mid \exists f \text{ rek.fv.}: \forall k, n\geq 1 \quad |x_k - \frac{f(k,n)}{n}| < \frac{1}{n}\}$$

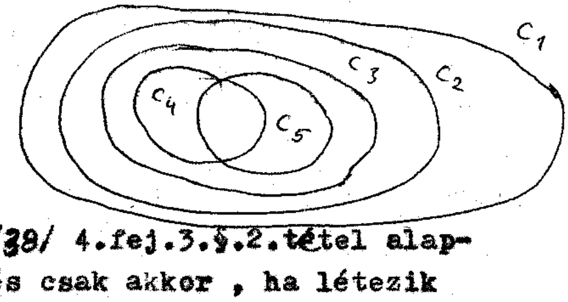
$$C_{2,p} = \{(x_k)\subset\mathbb{R} \mid \exists f \text{ rek.fv.}: \forall k\,; f(n,k)<p \text{ és } x_k = \sum_{n=0}^{\infty} f(n,k)/p^n\}$$

$$C_3 = \{(x_k)\subset\mathbb{R} \mid \exists f \text{ rek.fv. } \forall p>1, \forall k\,; f(n,k,p)<p \text{ és } x_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n,k,p)}{p^n}\}$$

$$C_4 = \{(x_k)\subset\mathbb{R} \mid \exists f \text{ rek.fv.}: \forall p,q,k\,; f(p,q,k)=1 \Leftrightarrow p/q < x_k\}$$

$$C_5 = \{(x_k)\subset\mathbb{R} \mid \exists f \text{ rek.fv.}: \forall p,q,k\,; f(p,q,k)=1 \Leftrightarrow p/q > x_k\}$$

3.2.TÉTEL: /Mostowsky/56/ :/ $C_1 \supsetneq C_{2,p} \supsetneq C_3 \supsetneq C_4 \cup C_5$ tetszőleges 1-nél nagyobb p természetes szám esetén. A rekurziv halmazok kapcsolatát a mellékelt Venn-diagram szemlélteti , a tartalmazások valódiak.



3.3.TÉTEL: /Mostowsky/56/,Kusmer/38/ 4.fej.3.§.2.tétel alapján:/ $C_{2,p} \subseteq C_{2,q}$ akkor és csak akkor , ha létezik olyan n természetes szám,amelyre $p \mid q^n$. /Ezt szokás Mostowsky-Успенский tételnek is hivni .V.ö.2.18.A.tétellel./

Azaz a $C_{2,p}$ halmazok tartalmazás szempontjából úgy viszonyulnak egymáshoz, mint a természetes számok Z_p maradékosztályai. A 2.8. definició alapján definiált rekurziv sorozatok lényegében a C_1 -beli sorozatok.

3.4. Definició: Egy valós számokból álló x_n sorozat kiszámitható, ha létezik racionális számoknak olyan kettős $r_{n,k}$ rekurziv sorozata /azaz léteznek olyan f, g és h kétváltozós rekurziv függvények, amelyekre $r_{n,k}=(f/n,k/-g/n,k/)/(1+h/n,k/)$/ és létezik olyan k szintén kétváltozós rekurziv függvény, amelyekre

$$\forall n,m \quad \text{ha } i>k/n,m/ \text{ akkor } \quad |x_n-r_{n,i}|< 1/m$$

/ld. Kusner /38/./

Ha egy x_n /kiszámitható/ sorozathoz létezik olyan f /tetszőleges/ függvény, amelyre

$$\forall i,j,k \qquad i,j > f/k/ \text{ esetén } \quad |x_i-x_j|< 1/k$$

akkor f a sorozat regulátora vagy modulusa.

Egy x_n kiszámitható sorozatot fundamentálisnak nevezünk, ha létezik /és meg is tudjuk adni/ rekurziv modulusát. A sorozat kvázifundamentális , ha rekurziv modulus létezése nem cáfolható /az intuicionista logika értelmében./

Továbbá egy x_n kiszámitható sorozatot pszeudofundamentálisnak nevezünk, ha

$$\forall n \neg\neg \exists k \forall m,l \quad (m,l \geq k \Rightarrow |x_m - x_l| < 1/n)$$

3.5. Definició/ld. Aberth /1/:/ Kiszámitható függvénynek nevezünk egy olyan függvényt, amely rekurziv KVSZ -okhoz rekurziv KVSZ -ot rendel , pontosabban azokat előállitó kiszámitható folyamatok kódszámaihoz kiszámitható folyamatok kódjait rendeli, és kompatibilis az ekvivalencia-relációval. Mivel a természetes számok N halmazát beágyaztuk a rekurziv KVSZ-ok halmazába, igy definiálhatjuk a kiszámitható sorozatokat speciális , N-en értelmezett kiszámitható függvényekként.

A 3.4. definició nyilvánvalóan ekvivalens a C_1 halmazzal, vagy helyesebben fogalmazva a 3.4. definicióban megadott rekurziv sorozatok éppen a C_1 halmazt adják.
Az is könnyen belátható, hogy ha egy sorozat a 3.5. definició szerint kiszámitható, akkor C_1 -nek eleme, hiszen a szóban forgó $F:N \to K$ függvény az azonosan n értéket adó program kódszámához megad egy programozható függvényt /ill. annak egy kódszámát/, amely a kivánt módon approximálja x_n -et. Formulával:

$$\frac{f(n,k)}{k} = F\left(N_{\tilde{n}}, \frac{1}{2k}\right)$$

Forditva, ha adott egy f/n,k/ rekurziv függvény, amely bizonyitja, hogy (x_n) C_1-beli, akkor meg kell adnunk egy olyan $F:N \to K$ függvényt, amelyre $F/N_n,./ \sim N_{f/n,.}/$, és $N_g \sim N_{g'}$ esetén $F/N_g,./ \sim F/N_{g'},./$; pontosabban ilyen F függvény létezését kell igazolnunk. Ilyen F-et konstruálni nem lehet, hiszen egy Aberth -féle függvény esetében nem tudjuk ellenőrizni, hogy $N_g \sim N_{g'}$ esetén $F/N_g,./ \sim F/N_{g'},./$ fennáll-e. Azonban a következő fejezet 4.10. definiciója utáni gondolatmenet alapján könnyen belátható, hogy minden rekurziv függvénynek megfeleltethető egy $F:K \to K$ függvény. Igy kaptuk, hogy a 3.4. és 3.5. definicióban adott meghatározások ekvivalensek a 3.1. definicióbeli C_1 halmazzal.

Az utóbbi meghatározás szerintem tulságosan bonyolult, elméleti vizsgálódásokhoz is csak néha hasznos, gyakorlatilag pedig teljesen hasznavehetetlen.

A kiszámitható sorozatok konvergenciáját a 3.4. definició / Kusner/30/ / és a 3.5. definició /Aberth/1/ / alapján vizsgálom.

<u>3.6. DEFINICIÓ:</u> Egy x_n kiszámitható sorozat konvergál egy /nem feltétlenül kiszámitható/ valós számhoz, x-hez, ha létezik egy olyan k függvény, hogy $i > k/n/$ esetén $|x-x_i| < 1/n$. Továbbá egy x_n kiszámitható sorozat rekurzive konvergál egy x számhoz, ha a fenti k függvény rekurziv. A sorozatot konvergensnek nevezzük, ha effektive konvergál egy x rekurziv KVSZ -hoz. /A k függvényt szokás a sorozat regulátorának vagy modulusának is nevezni./

3.7.TÉTEL: /ld.Kusner /38/ 3.fejezet 2.§.1.tétel vagy Aberth /1/ 12.tétel:/
Minden fundamentális sorozathoz konstruálható egy olyan rekurziv KVSZ , amely az ő határértéke /azaz minden effektive Cauchy - sorozat konvergens./

BIZONYITÁS: Tegyük fel,hogy x_n kielégiti a Cauchy-feltételt: /a 3.5.definició alapján/:

$$n, m > f(k),\ k \in K \text{ esetén } |x_n - x_m| < k$$

Jelöljük a sorozatot illetve annak modulusát előállitó programozható függvényeket G ill. F -el.Tetszőleges r racionális szám esetén jelöljük továbbá az azonosan r eredményt adó kiszámitható folyamat kódját N_r -el.Ezenkivül tetszőleges pozitiv racionális r számra legyen k/r/ a legkisebb olyan egész szám,amely nagyobb F/N_r,r/+r -nél. A K-n definiált rendezés szerint ekkor minden pozitiv r racionális szám esetén k/r/>f/r/ . Legyen ekkor g/r/=G/(k(r/2)),(r/2) /.

Belátjuk,hogy g egy kiszámitható folyamat és $\{g\} = \lim x_n$.

$$|g(2r_1) - g(2r_2)| \le |g(2r_1) - x_{k(r_1)}| + |x_{k(r_1)} - x_{k(r_2)}| +$$
$$+ |x_{k(r_2)} - g(2r_2)| \le r_1 + \max(r_1, r_2) + r_2 < 2(r_1 + r_2)$$

Tehát g kiszámitható folyamat.
Legyen $e \in K$ pozitiv . Ekkor a rendezés definiciója miatt létezik olyan r racionális szám,amelyre 0 < h/r/-r , ahol h az e -t előállitó kiszámitható folyamat, $e = \{h\}$.
Legyen akkor 6s = h/r/-r . Ekkor

$$|x_n - \{g\}| \le |x_n - x_{k(s)}| + |x_{k(s)} - g(2s)| + |g(2s) - \{g\}| \le$$
$$\le r/2 + s + 2s \le r$$

Ami azt mutatja.hogy g valóban az x sorozat határértéke.■

3.8.Tétel: /Kusner /38/:/ Ha egy kiszámitható sorozat rekurziv módon konvergál egy x valós számhoz,akkor x is rekurziv KVSZ.
/Ez is mutatja,hogy K előző fejezetben emlitett algebrai teljessége nem olyan meglepő./

Bizonyitás:

Triviális.Legyen ugyanis $|x_k - r_{n,k}| < 2^{-m}$ ha $n \geq h/k,m/$, és $|x_k - x| < 2^{-m}$ ha $k \geq h'/m/$. Ekkor könnyen belátható,hogy az $r_n = r_{h(n,\ h'/n/)}$ sorozat rekurzive konvergál az x számhoz , azaz x valóban rekurziv KVSZ . ■

Nyilván nem effektive konvergencia esetén is lehet a határérték rekurziv KVSZ./ld.pl.Pour-El /65/ 6.példa,550. old./ Az abszolut konvergencia, alapmüveletek és a határérték kapcsolata valamint a határérték további tulajdonságai mind könnyen bizonyithatóak,ld.pl.Klaua /35/ és Kusner /38/ -ben. Továbbá az elemi konvergencia-kritériumok /D'Alambert,Raabe,stb./ is mind igazak maradnak /ld.pl.Kusner/38/./

Meglepőek és fontosak az alábbi tételek:

3.10.TÉTEL: /ld.Aberth/1/,Kusner/38/ 3.fejezet 3.§.vagy Specker /77/-ben:/

Létezik olyan monoton növő korlátos kiszámitható sorozat, amelynek határértéke nem rekurziv KVSZ /nyilván a sorozat nem effektive konvergens./

Bizonyitás: Legyen

$$\text{ahol } P'/i,n/ = \begin{cases} 1 & \text{ha az i kódszámu program az } i \in \mathbb{N} \text{ input esetén legfeljebb n lépés után megáll} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

■

3.11.TÉTEL: /Aberth/1/ 14.tétel/:

Legyen x_n egy kiszámitható sorozat, határértéke x kiszámitható valós szám.Legyen továbbá R egy tetszőleges olyan tulajdonság K elemein, amely igaz a sorozat elemein,de nem igaz a határértékén.Ekkor R nem effektiv,azaz nem létezik olyan algoritmus,amely tetszőleges rekurziv KVSZ -ról eldöntené,hogy R igaz - e avagy sem.

Bizonyitás:

Belátjuk,hogy ha az x_n sorozat határértéke x , és R igaz a sorozat tagjain,de nem igaz a határértéken,akkor R még az $\{x_1, x_2, \ldots, x\}$ halmazon sem dönthető el rekurzive. Tudjuk,hogy K tetszőleges e pozitiv eleme esetén $|x_n - x| < e$ ha $n > f/e/$, ahol f egy kiszámitható függvény. A határértéket,a sorozat tagjait és a modulust állitsák elő a g , f_n kiszámitható folyamatok illetve az F programozható függvény . Indirekte tegyük fel , hogy létezik olyan G programozható függvény,amelyre $G/N_h/=1$ vagy 2 aszerint, hogy $R/\{h\}/$ igaz vagy nem.

Legyen továbbá P'' általánositása a P' függvénynek : legyen $P''/n,m,a/=1$ ha az n kódszámu programozható függvény az m bemenet hatására legfeljebb a db lépés után a stop utasitáshoz érkezett és megállt .Egyéb esetekben legyen $P''/n,m,a/=0$. Könnyen belátható,hogy P'' is programozható. Tetszőleges P program esetén legyen g_P' egy kiszámitható folyamat:

$$g_P'/r/ = \begin{cases} g/\frac{r}{2}/ & \text{ha } P''/N_P,m,N_P/=0 \text{ , ahol m a legkisebb egész szám,amelyre } 1/m \leqslant r \\ f_k/r/ & \text{ha } P''/N_P,m,N_P/ = 1 \text{ , ahol m a fenti egész szám,és m' a legkisebb olyan egész szám,amelyre } \\ & P''/N_P,m,N_P/ = 1 \text{ és k a legkisebb egész szám,amely nagyobb } F/N_P,t/+t \text{ -nél,} \\ & \text{ahol } t = 1/2m' \end{cases}$$

Ekkor nyilván tetszőleges P programra g_P' egy kiszámitható folyamat , és tetszőleges $r_1 \geqslant 1/(m'-1) > r_2$ racionális számokra

$$|g_p'(r_1) - g_p'(r_2)| \leq |g(r_1/2) - x| + |x - x_k| + |x_k - f_k(r_2)| \leq r_1 + r_2$$

Ezenkivül nyilvánvalóan tetszőleges P programra $\{g_P'\} = x$ avagy x_n valamilyen n indexre aszerint , hogy $P/N_P/$ definiált avagy sem . Ha eldönthető lenne , akkor a programmegállási probléma is , ami bizonyitja állitásunkat . ■

A tételből nyilvánvalóan adódik az előző fejezet végén emlitett algoritmusok zömének lehetetlensége.Pl.legyen $x_n = r_n$ egy racionális számsorozat,amely $\sqrt{2}$-őt közeliti.Ekkor $R/x/$ = "x racionális" a fenti tétel alapján nem rekurzivan eldönthető. Vagy $r_n = 10^{-n}$ sorozat tagjai pozitiv számok,de a határértékük nem az , stb.
A leningrádi iskola pontos vizsgálataiban megkülönbözteti a konvergencia különböző változatait is /ld,pl. Kusner /38/./,amellyel most itt részletesen nem foglalkozom:

<u>3.12.Definició:</u> Egy x_k kiszámitható sorozat pszeudokonvergens , ha létezik olyan x valós szám , amelyre

$$\forall n \neg\neg \exists m \forall l \qquad (l>m \Rightarrow |x-x_l| < 1/n)$$

<u>3.13.Tétel:</u> Létezik olyan sorozat,amely pszeudokonvergens de nem effektive konvergens.Azonban ha egy sorozat monoton és pszeudokonvergens akkor effektive is konvergens.
A fent emlitett müben megtaláljuk további tételek alapján a pszeudoszámok /ld.2.14.definiciót/ beágyazását K-ba.

Nem csak a rekurziv KVSZ -okkal , hanem a sorozatokkal kapcsolatban is sok kérdés algoritmikusan megoldhatatlan. Például nem tudjuk algoritmikusan megállapitani egy tetszőleges x_n kiszámitható sorozatról,hogy van-e effektiv modulusa,konvergens-e,egy adott x rekurziv KVSZ határértéke -e, sőt egy pszeudoszámmal ekvivalens rekurziv KVSZ-ot sem tudunk megadni,stb.E kérdésekről részletesebben ld.pl. Aberth/1/,Ceitin/12/ vagy Kusner/38/ müvekben.

4.§. KISZÁMITHATÓ FÜGGVÉNYEK

Egyes szerzők /pl. Miller/51/, /52/ / csak intuitive definiálják a kiszámitható függvények fogalmát : tetszőleges helyen tetszőleges pontossággal meg tudjuk adni értékét. /Lényegében ezt a definiciót használja hallgatólagosan Myhill /57/ és sok más szerző is./ A definiciót pontossá téve a következőt kapjuk:

4.1. DEFINICIÓ: Egy $f: R \to R$ függvény kiszámitható, ha létezik egy g programozható függvény, amelyre tetszőleges r racionális és m természetes szám esetén $|f(r) - g(m,r)| < 1/m$
A definicióba beleérthetjük, hogy f az irracionális helyeken az őt közelitő racionális helyeken felvett helyettesitési értékek határértéke - ha ilyen létezik , vagy pedig tetszőleges./Ezzel kapcsolatban ld. a 4.15. tételt./
Már itt, ha precizek akarunk lenni, kiszámitható függvényen az őt közelitő programozható függvények ekvivalenciaosztályait kell értenünk /ld. pl. Goodstein /21/ és Cleave /14/ -ban./

Más szerzők definiálják ugyan a kiszámitható függvények fogalmát, de egy kissé bonyolultabb módon lényegében a fenti definicióval ekvivalens meghatározást kapnak . Kiemelném a következőt:

4.2. Definició: /Mycielsky/65/, 542. oldal/ :
Legyen $I^q \subset R^q$ egy q dimenziós téglatest, végpontjai legyenek kiszámitható valós számok . Egy $f: I^q \to R^q$ függvény kiszámitható, ha léteznek olyan $g: N \times Q^q \to Q$ és $h: N \to N$ rekurziv függvények , amelyekre

ha $|x - r| < 1/h(n)$ akkor $|f(x) - g(n,r)| < 1/n$

Ez a definició nem teljesen ekvivalens az előzővel. Az előző definició megenged nem folytonos függvényeket is /pl. legyen $f/\frac{p}{q}/ = q$, ha p és q relativ primek/. Azonban ha kikötjük, hogy f folytonos, akkor a két definició ekvivalens.

Szemmel láthatóan ha egy függvény a 4.2.definició szerint kiszámitható akkor a 4.1.definició szerint is. Ha pedig f a 4.1. definició szerint kiszámitható,akkor /mivel folytonos,igy egyenletesen is folytonos/ h/n/= =2n választással kapjku,hogy g/2n,r/ a kivánt függvény. A kiszámitható függvények folytonosságával egyébként részletesebben a 4.15.tételben foglalkozom.

A kiszámitható függvények másik definiciójának tekinthetnénk a kiszámitható polinomokkal való közelitést. Egyenletes konvergenciát megkövetelve csak a kiszámithatóan folytonos függvényeket kapjuk meg,igy ezzel is csak később foglalkozom.

Azonban ide kivánkozik Ceitin következő definiciója és tétele:

4.3.DEFINICIÓ: /ld.Aberth/1/ és Ceitin /10/,/11/./
Egy parciális rekurziv függvényt kiszámithatónak nevezünk,ha azonositható egy K<—>K leképezéssel , és tetszőleges K-beli x elemre ha létezik f/x/ , akkor

a/ f/x/ ∈ K és b/ y∼x esetén létezik f/y/ és f/y/∼f/x/.

/Ez ekvivalens a 4.9.definicióval,igy a többi definicióval való ekvivalenciájára is ott térek ki./

4.4.Tétel: /Ceitin/13/,2.§./ Minden kiszámitható f függvényhez / ami a fenti definició értelmében kiszámitható/ konstruálható olyan pontonként konvergáló g_n függvénysorozat, amelyek grafikonja kiszámitható racionális koordinátáju pontokban törő töröttvonal.

A fenti tétel alapján nyilvánvalóan minden kiszámitható függvényt lehet polinomokkal közeliteni,méghozzá rekurziv módon.Később azt is látni fogjuk,hogy minden kiszámitható folytonos függvény egyenletesen közelithető polinomokkal./ld.Pour-El /61/./ Azonban:

4.4.A.Tétel: Létezik olyan f függvény,amely a fenti definició szerint kiszámitható, 0∈D/f/ , de a 0 pont semmilyen környezetében nincs értelmezve. /ld.Ceitin /13/./

A 4.1.definicióra visszatérve az $F:R\to R$ függvényt tekintsük csak racionális pontokban,és tetszőleges r racionális pontban legyen $F/r/=\lim r_n$, ahol r_n alkalmas racionális számokból álló Cauchy-sorozat. Igy tulajdonképpen az F függvényt azonositottuk egy $f':N\times Q\to Q$ függvénnyel. /$F/r/=\lim f'/n,r/$ /. Ha feltesszük,hogy az f' függvény és a konvergencia kiszámitható,akkor az előbbivel ekvivalens definiciót kapunk:

<u>4.5.Definició:</u> /Ceitin/9/,Goodstein/21/:/
Egy $F:R\to R$ függvény kiszámitható,ha léteznek olyan $f':N\times Q\to Q$ és $k:N\to N$ parciális rekurziv függvények, hogy tetszőleges r racionális szám esetén

$$\text{ha } n>k(m) \text{ akkor } |F(r)-f'(n,\pi(r))|<1/m$$

A definició nyilvánvalóan nem függ π választásától, és ekvivalens a 4.1.definicióval.Ugyanis tetszőleges f' parciális rekurziv függvény esetén $\pi^{-1}\circ f'\circ\pi$ programozható függvény és tetszőleges f programozható függvény esetén $\pi\circ f\circ\pi^{-1}$ pedig parciális rekurziv függvény. /v.ö.1.1.állitással/

Specker /77/ 8.definiciója a következő:
<u>4.6.Definició:</u> **Egy** $f:R\to R$ függvény kiszámitható,ha léteznek olyan $g,k,h:N^3\to N$ és $u,v:N\to N$ rekurziv függvények,amelyekre minden $x=p/q$ és $y=r/s$ racionális számokra ha $x_n=\frac{g-k}{1+h}/p,q,n/$ és $y_n=\frac{g-k}{1+h}/r,s,n/$,akkor

$$|x-y|<1/u(k) \quad \text{esetén} \quad |x_n-y_n|<1/k$$

$$\text{és} \quad n,m>v(k) \quad \text{esetén} \quad |x_n-x_m|<1/k$$

és $f/x/=\lim x_n$.
Azaz x_n egy $f/x/$ -hez konvergáló kiszámitható Cauchy - sorozat,és f kiszámithatóan folytonos.

A fenti definiciók a kiszámitható függvények fogalmát a szokásos analizis mintájára határozták meg. Mivel egy $F:R\to R$ függvény esetén több f programozható függvény is létezik,amely őt approximálja , a 4.1.definició értelmében például,ezért természetes az alábbi

4.7.Definició: /Cleave/14/,Goodstein/21/:/
Két $f,g:N\times Q\to Q$ programozható függvényt ekvivalensnek nevezünk,ha tetszőleges $/m,r/\in N\times Q$ esetén $|f(m,r)-g(m,r)|<1/m$ továbbá ezen ekvivalenciaosztályokat nevezzük kiszámitható függvényeknek.

A fenti ekvivavalenciaosztályokba a 4.1.definició szerint kiszámitható függvények nyilvánvalóan beágyazhatók: F -hez rendeljük az $f/2m,r/$ ekvivalenciaosztályát.Megforditva nem minden ekvivalenciaosztályhoz tartozik egy $F:R\to R$ függvény,ami a 4.1.definició szerint kiszámitható. Például $f/m,r/=/-1/^m$ primitiv rekurziv,igy programozható is,azonban ekvivalenciaosztályához nincs megfelelő F. Eddig lényegében csak a Q-n értelmezett kiszámitható függvényekkel foglalkoztunk,jobban mondva csak a Q-n felvett értékeivel törődtünk.Felmerül az probléma,hogy egy $f:K\to K$ kiszámitható függvényt egyértelmüen meghatároznak-e Q-n felvett értékei?Az eddigi /1,2,3, 5,6,7/ definiciók szerint nyilvánvalóan nem,de e definiciók nem is tesznek különbséget e függvények között.Azonban a következő definiciók esetében nem ilyen egyszerü e kérdés.
A $K\to K$ függvények definiciói közül lássuk először Demuth/17/ és Kusner/38/ általános definicióját:

4.8. DEFINICIÓ:Egy $f:K\to K$ algoritmus kiszámitható számokon értelmezett kiszámitható függvény,ha

$$\forall x,y\in K \quad \left(\exists f(x) \text{ és } x=y \text{ akkor } \exists f(y) \text{ és } f(y)=f(x)\right)$$

Mint tudjuk,az algoritmus nem matematikai fogalom.Különböző ekvivalens megfogalmazásai közül azt kell a fenti definicióba behelyettesiteni,amely összeillik K általunk éppen elfogadott definiciójával.Például ha K egy elemét ,az ekvivalenciaosztályt egy ℓ reprezentáns programozható függvénnyel,jobban mondva kiszámitható folyamattal adjuk meg,amit azonosithatunk kódszámával,akkor egy $f:K\to K$ függvényt egy $F:N\to N$ függvénynek tekinthetünk . Ezt az F függvényt neveztük a fenti definicióban algoritmusnak. Ha N_ℓ egy kiszámitható folyamat kódja,és f illetve F értelmezési tartományának eleme,akkor $F/N_\ell/$ is egy kiszámitható folyamat,melynek r racionális szám helyen vett helyettesitési értékét $F/N_\ell,r/$ -el jelölök. Vagyis pontosabban $f(\{\ell\})=\{F(N_\ell),\,\}$. A 4.8.definició azt a természetes követelményt irja elő, hogy ha

N_α és N_β ekvivalens kiszámitható folyamatok kódjai , akkor $F/N_\alpha,./$ és $F/N_\beta,./$ is ekvivalensek legyenek. Igy kaptuk a 4.8.definició egyik speciális esetét , amely vele ekvivalens:

4.9.Definició:/Aberth /1/:/
Egy $f:K\to K$ függvény kiszámitható,ha létezik olyan $F:N\times Q\to Q$ programozható függvény,amelyre

/i/ ha N_α egy kiszámitható folyamat kódja,akkor $F/N_\alpha,./$ is kiszámitható folyamat

/ii/ ha N_α és N_β ekvivalens kiszámitható folyamatok kódjai, akkor $F/N_\alpha,./$ és $F/N_\beta,./$ is ekvivalensek

/iii/ $f/\{\alpha\}/ = \{F/N_\alpha,./\}$

/Azaz f $\{\alpha\}$ -n felvett értéke az $F/N_\alpha,./$ kiszámitható folyamat ekvivalenciaosztálya./ A fenti definició következő változata található Grzegorczyk/25/ 4.§.-ban:

4.10.Definició: Egy $f:K\to K$ függvényt Banach-Mazur féle kiszámitható függvénynek nevezünk,ha minden kiszámitható $/a_k/$ sorozat esetén $f/a_k/$ is kiszámitható sorozat./v.ö.a3.1. definicióval/

Szemmel láthatóan a 3,8 és 9 definiciók ekvivalensek. Ez utóbbi /10/ definició azt a szemlélete tükrözi,ahogyan egy függvény értékét a gyakorlatban szoktuk kiszámitani.
A definició bővebb,mint az eddigi definiciók.Legalábbis Pour-El ezt állitja , az állitás igazolását /melyről Pour-El semmit sem emlit/ a 4.22.tételben irom le. Azonban a következő definició jobban illik össze a többi definicióval: /ld.Grzegorczyk/27/ és Pour-El/65/:/

4.11.Definició:Egy függvényt $/F:I\to R$, ahol I kiszámitható végpontu R^q -beli tégla/ kiszámithatónak nevezünk /Mazur-féle értelemben/,ha kielégiti a 4.10.definició feltételét /azaz sorozat-folytonos/ , továbbá effektive egyenletesen folytonos , azaz létezik olyan d rekurziv függvény,hogy tetszőleges I-beli x és y pontokra $|x-y|<1/d(n)$ esetén $|f(x)-f(y)|<1/n$.

Pour -El fent emlitett müvében továbbá azt is állitja,hogy a fenti definició ekvivalens Mycielski 4.2.-ben adott definicióval,az állitás igazolása szintén a 4.22.tételben található. A további definiciók előtt néhány érdekes tétel:

<u>4.12.Tétel:</u>/Grzegorczyk/25/ 4.§./

Ha f egy Banach-Mazur értelemben kiszámitható függvény,akkor

/i/ kiszámitható végpontu $I \subset R^q$ tégla esetén $\max_I f$ a végpontok kiszámitható függvénye

/ii/ ha f szigoruan monoton a kiszámitható végpontu /a,b/ zárt intervallumon /a végpontokat f_1 és f_2 számitja ki/ akkor az f^{-1} inverzfüggvény kiszámitható az f_1 és f_2 függvények felhasználásával . /Itt f_1 és f_2 nem feltétlenül rekurziv függvények!/

<u>4.13.Állitás:</u> Ha f és g kiszámitható függvények /akármelyik definició alapján/ akkor $f \pm g$, fg és $g \neq 0$ esetén f/g is kiszámitható függvények.

Az állitás igazolása ismét csak apró számolásokból áll, a 2.§. definiciói alapján,ezért nem részletezem./részletesen ld.pl.Aberth/1/ 285.oldalon/

Nyilvánvalóan $F/N_{\mathcal{L}},r/ = U/N_{\mathcal{L}},r/$ a K-n való identitásfüggvényt adja , igy a fenti állitás alapján minden polinom kiszámitható , sőt a maximum,minimum,abszolutérték , és minden rekurziv ill.programozható függvény is. Ez utóbbihoz azonban szükséges a nem egészen nyilvánvaló

<u>4.14.Tétel:</u>/Aberth/1/,285 oldal/:

Ha f és g kiszámitható függvények és $D/f/ \supset R/g/$ akkor fog is kiszámitható függvény.

<u>Bizonyitás:</u>Tegyük fel,hogy f és g reprezentánsa / a 4.9. definició szerint/ F ill. G .Ekkor "adott" $\{\mathcal{L}\}$ esetén $G/N_{\mathcal{L}},\cdot/$ egy programozható függvény , igy a kódoló P_0 program segitségével kódja előállitható : $N_{G(N_{\mathcal{L}},\cdot)} = P_0(G(N_{\mathcal{L}},\cdot))$

Igy e számot választva ekvivalenciaosztálya reprezentánsaként

$$(f \circ g)(\{\mathcal{L}\}) = \{F(P_0(G(N_{\mathcal{L}},\cdot)),\ \cdot)\}$$

Mivel F és G is kielégitik a 4.10.definició feltételeit, ezért fog fenti előállitásából látszik,hogy az is kiszámitható függvény. ■

Továbbá a 3.7.tétel bizonyitásának módositásával könnyen belátható,hogy egyenletesen konvergáló függvénysorozat határértéke is kiszámitható függvény . / ennek vázlatát ld. Aberth / 1/ 285.oldal alján /.Ebből következik az,hogy ha f kiszámitható függvény a 2.1. definició értelmében,akkor a mostani /4.9./ definició szerint is az.A forditott irányu tartalmazást ismét a 4.22. tételben vizsgálom meg .

4.15.Tétel: /ld.Demuth-Kucera/94/ 88.oldal vagy Aberth/1/:/
Minden kiszámitható függvény minden pontban folytonos.
Bizonyitás:ez legkönnyebben a 3.11.tétel alapján látható be.Legyen $x_n \to x_0$ kiszámitható számok egy sorozata , és legyen $R/x/ =$ " $|f(x)-f(x_0)|<r/2$ " , ahol r rögzitett szám.Ekkor nem lehet,hogy x_n kiszámitható sorozat és $x_n \to x_0$ és $f/x_n/ \not\to f/x_0/$. ■

Ezt a tétel a 4.4. definicióra Kreisel,Lacombe,Shoenfield, Moschowakis és Ceitin bizonyitották. A tétel alapján az 1,3,5,6 definiciókban feltehető , hogy f folytonos függvény, mint ezt a legtöbb szerző /pl.Miller/46/ / meg is teszi.A folytonosság ténye azonban nem jelenti a függvény kiszámitható folytonosságát,hanem csak azt,hogy a függvénynek nem lehet kiszámitható pontban kiszámitható szakadása.Például a következő kiszámitható függvény nem kiszámithatóan folytonos:

Amint az irodalomban közismert,még a kiszámithatóan egyenletes folytonosság vagy korlátosság sem következik a kiszámitható pontonkénti folytonosságból./ld.pl.Aberth/1/ 18.tétel/.

4.16.Tétel:/Demuth-Kucera /94/ 88,oldal/:
A kiszámitható függvények értelmezési tartományai pontosan a kiszámitható G_δ halmazok . /Ezt Friedberg , Cernov és Demuth bizonyitották./ A kiszámitható G_δ halmazok és a tétel bizonyitását ld.Demuth-Kucera/94/ irodalomjegyzékében megadott müvekben./

Kreitz /37/ 3.pont/168.oldal/ megjegyzése szerint a 4.1. definició / ha f folytonos / egyenértékü a 4.9.definicióval, azonban bizonyitást nem közöl. Az állitást pontosan a 4.22. tételben vizsgálom meg.
Legtöbb szerző azért használja a 4.1.definiciót, mert a 4.9. /és a vele ekvivalens definiciók/ sokkal távolabb állnak a szokásos analizis szemléletmódjától, és a bonyolultság /pl.Azra /6/ alapján/ vizsgálatára kevésbé alkalmasak.
Tekintsük a K-> K függvények egy másik megközelitését:
Ha g:K->K kiszámitható függvény, akkor ez azt jelenti, hogy egy K-beli x egy közelitő algoritmusából /pl.a 2.5.definicióban szereplő f függvényt/ -melyet most f_x-el jelölök- meg tudjuk határozni g/x/egy közelitő algoritmusát, azaz $f_{g/x/}$-et. Ha függvényhez függvényt rendelek, akkor ez funkcionál. Tehát definiáljuk először a kiszámitható /rekurziv/ funkcionálokat, pl. Grzegorczyk /25/ alapján:

4.17.DEFINICIO: Funkcionálnak nevezünk minden olyan leképezést, amely számelméleti /N-> N/ függvényekhez számelméleti függvényeket rendel. Alapfunkcionáloknak nevezzük a következőket:

identitásfunkcionál:		$u/f/ = f$
különbség	-"-	$-/f,g/ = f-g$
hatvány	-"-	$T/f,g/ = f^g$
konstans	-"-	$S/f/ = +^{\bullet}$

ahol most $+^{\bullet}$ -al jelöltem a rekurzióelméletben közismert S rákövetkező vagy léptető függvényt, azaz minden x természetes számra $+^{\bullet}/_x/=x+1$.
A funkcionálokon a következő operációkat definiáljuk:
helyettesités: ha Φ és Θ funkcionálok, akkor helyettesitéssel a következő funkcionált kapjuk:

$$\chi\langle f, g_1, \dots g_t\rangle(x_1, \dots x_{l-1}, x_{l+1}, \dots x_k, y_1, \dots y_k) = \phi\langle f\rangle(x_1, \dots x_{l-1}, \Theta\langle g_1, \dots g_t\rangle(y_1, \dots y_k), x_{l+1}, \dots x_k)$$

függvény vagy számértékü változók ismétlése, fiktiv változók bevezetése

a feltételes μ operátor : ha $\forall f_1, \dots f_k \forall y_1, \dots y_k \exists x \, \phi\langle f_1, \dots f_k\rangle(x, y_1, \dots y_k) = 0$ akkor legyen

$$(\mu(\phi))\langle f_1, \dots f_k\rangle(y_1, \dots y_k) = \min\{z \mid \phi\langle f_1, \dots f_k\rangle(z, y_1, \dots y_k) = 0\}$$

ha a fenti definicióból elhagyjuk a feltételt, akkor feltétel nélküli μ operátorról van szó,melynek eredménye parciális rekurziv funkcionál./

Elemi funkcionáloknak nevezzük azon funkcionálokat, amelyek megkaphatók az alapfunkcionálokból a fenti operációk véges sokszori alkalmazásával,a feltétel nélküli μ operáció kivételével.Ha a feltétel nélküli μ operációt is megengedjük,akkor kapjuk a kiszámitható funkcionálokat.

A kiszámitható funkcionálok tulajdonságait és felhasználásukat /és a fenti definició inditékait/ ld.Grzegorczyk fen emlitett müvében.
Igy pl.a 2.4. definició alapján más meg is kaptuk a kiszámitható függvények definicióját:

<u>4.18.DEFINICIÓ:</u> /ld.pl.Grzegorczyk/25/,Pour-El /61/,/65/ vagy Shepherdson/75/./
Egy $F:R\to R$ függvény kiszámitható,ha létezik olyan kiszámitható Φ funkcionál,amelyre

$$\forall a\in R\ \forall f\in N^N \text{ ha } \forall k\in N \left|\frac{f(k)}{k+1}-a\right|<\frac{1}{k+1} \text{ akkor } \forall k\in N \left|\frac{\Phi\langle f\rangle(k)}{k+1}-F(a)\right|<\frac{1}{k+1}$$

azaz ha f approximálja $a\in R$ -et,akkor Φ/f/ approximálja F/a/ - t.
Gregorczyk /27/-ban e definició ekvivalenciáját megmutatta a 4.11.,továbbá az alábbi definiciókkal :

<u>4.19.Definició:</u> Egy $f:R\to R$ kiszámithatónak nevezünk,ha az alábbi feltételek /a/- f// valamelyike teljesül:

a./ a racionális számok tetszőleges kiszámitható /rekurziv/ sorozatára $f/r_n/$ is rekurziv racionális számsorozat, továbbá effektive egyenletes folytonos ./v.ö.a 4.11. és 4.10.definiciókkal./

b./ /i/ f folytonos /nem feltétlenül kiszámithatóan/
/ii/ tetszőleges r_n rekurziv racionális számokból álló sorozatra $f/r_n/$ is rekurziv
/iii/ az $f/r_n/$ sorozat racionális végpontu szakaszokra megszoritva kiszámithatóan egyenletesen folytonos, azaz van g rekurzív fv: $\forall m,n,k\in N, \forall a,b\in R$
$r_n < a,b < r_m$ és $|a-b| < 1/g(m,n,k)$
esetén $|f(a)-f(b)| < \frac{1}{k+1}$

c./ /i/ f folytonos

/ii/ létezik olyan g függvény, amelyre

$$\forall n,k \in N \qquad \left| \frac{g(n,k)}{k+1} - f(r_n) \right| < \frac{1}{k+1}$$

/iii/ létezik olyan g' függvény, amelyre $r_n < r_\ell, r_t < r_m$ és $|r_\ell - r_t| < 1/g'(m,n,k)$ esetén $|g(\ell,k) - g(t,k)| < 3$

d./ azonos a c/ feltétellel, de az /ii/ feltételt az alábbi két feltétellel helyettesitjük:

/ii/' $f/r_n/ = \lim_k \frac{g/n,k/}{k+1}$

/ii/'' az $/a_k/ = /\frac{g/n,k/}{k+1}/$ sorozat kiszámithatóan konvergens sorozat

e./ Legyen s_n a racionális végpontu nyilt szakaszok kiszámitható felsorolása. Ekkor f kiszámitható, ha létezik olyan g rekurziv függvény, hogy

/i/ $\forall a \forall n \qquad a \in s_n \Rightarrow f(a) \in s_{g(n)}$

/ii/ $\forall a \forall m \qquad a \in s_m \Rightarrow \exists n \in N : a \in s_n \ \& \ s_{g(n)} \subset s_m$

/iii/ $\forall n,k \qquad s_n \subset s_k$ és $n \geq k \Rightarrow s_{g(n)} \subset s_{g(k)}$

Megjegyzem, hogy Lacombe eredeti definiciójában -mert hiszen ez a definició Lacombe /40/ eredeti definiciója- nem szerepelt az $n \geq k$ feltétel, de Grzegorczyk megjegyzése szerint az /iii/ feltétel teljes egészében elhagyható.

f./ Létezik olyan g rekurziv függvény, amelyre

/i/ $\forall a, \forall m \qquad a \in s_m \Rightarrow f(a) \in s_{g(m)}$

/ii/ $\forall a, b \in R \qquad b \neq f(a) \Rightarrow \exists n \in N : a \in s_n \ \& \ b \notin s_{g(n)}$

A többváltozós függvények illetve a vektorértékü függvények bevezetése egyszerüen elintézhető, például egy rekurziv $\pi_p : N \to Q^p$ rögzitett bijekcióval. Például:

<u>4.20. Definició:</u> Egy rekurziv f függvény esetén az $r_n = \pi_p \circ f/n/$ sorozatot rekurzivnak nevezzük. Egy $\underline{x} \in R^p$ vektor kiszámitható, ha létezik hozzá effektive konvergáló rekurziv sorozat. Végül egy $F : R^p \to R$ függvényt kiszámithatónak nevezünk, ha létezik olyan Φ funkcionál, hogy tetszőleges $f : N \to N$ függvény esetén ha $\forall n \ \| \underline{x} - \pi_p \circ f(n) \| < \frac{1}{n}$ akkor $\forall n \ \| F(\underline{x}) - \pi_p \circ \phi \langle f \rangle (n) \| < \frac{1}{n}$

Természetesen a fenti definició változatait is érdemes megvizsgálni, de én most ezzel nem foglalkozom.

__4.21. Definició:__ /Pour-El és Caldwell/61/:/
Polinomok egy kéttős sorozata rekurziv, ha léteznek olyan d, s, a és b rekurziv függvények, amelyekre

$$P_{N,n}(x) = \sum_{j=0}^{d(N,n)} (-1)^{s(N,n,j)} \frac{a(N,n,j)}{b(N,n,j)} x^j$$

Egy f függvényt kiszámithatónak nevezünk, ha létezik polinomok egy olyan rekurziv sorozata, hogy tetszőleges N és M természetes számokra

ha $|x| \leq N$ és $g(N,M) \leq n$ akkor $|f(x) - P_{N,n}(x)| < \frac{1}{M+1}$

__4.22. TÉTEL:__
Jelölje i=1,2,3,5-11,18,19 és 21 esetén F_i az i-edik definicióban adott kiszámitható függvények halmazát. Ekkor

$$F_6 = F_2 = \underset{\underset{F_{10}}{\cap\!\!\!\!\neq}}{F_{11}} = F_{18} = F_{19} = F_{21} = F_3 = F_8 = F_9 \subsetneq F_1 = F_5 \subsetneq F_7$$

__BIZONYITÁS:__

Az $F_2 \subseteq F_6$ tartalmazás könnyen belátható az u/k/=h/2k/, x_n = g/2n,x/ és v/k/ = 2k választással.
A forditott irányú tartalmazás nyilván $f \in F_6$ folytonos kiterjesztésére vonatkozik, és a h/n/= =u/2n/, g/n,r/=r_{8n} választással könnyen igazolható.

Az $F_2 \subseteq F_{11}$ tartalmazás következik a d/n/=2h/n/ és $r'_{n,k}$ = g/n,$r_{h/n/,k}$/ választásokból.
Forditva legyen a_k a racionális számok egy felsorolása, és ekkor h/n/=d/2n/ és g/a_k/=$r'_{2m,k}$ bizonyitják állitásunkat.

Az $F_{11} \subsetneq F_{10}$ tartalmazás

Az $F_{11}=F_{18}=F19$ tartalmazásokat Grzegorczyk az emlitett müvében belátta, most nem ismétlem meg a bizonyitást.

Az $F_{21}=F_{11}$ állitás igazolását Pour-El /61/-ben belátta.

$F_3 = F_8 = F_9$, hiszen e definiciók ugyanazt mondják, csak nem szó szerint.

Az $F_3 \subseteq F_{21}$ tartalmazás következik a 4.4. állitásból, a 14. állitásból pedig az $F_{21} \subseteq F_9$ tartalmazás.

Az $F_9 \subsetneqq R_1$ tartalmazás csak szemléletbeli gondot okoz. Legyen ugyanis $f/\{\ell\}/ = \{F/N_\ell,./\}$, azaz ha $\tilde{r}$ az azonosan r racionális számot adó kiszámitható folyamat, akkor úgy képzeljük K R-be való beágyazását, hogy $F/N_r, 1/2m/$ 1/m hibával adja meg $F/N_r,./$ osztályát. Igy pedig $g/m,r/=F/N_r, \frac{1}{2m}/$ bizonyitja állitásunkat.

Az $F_5=F_1$ állitást láttuk a 4.5. definició után.

A z $F_1 \subsetneqq F_7$ tartalmazást pedig a 4.7. definició után.

Igy bebizonyitottuk a 4.22. tételt. ■

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

Az irodalomjegyzékben "A" betüvel jelöltem meg az alapvető , a kiszámitható analizis egyes speciális kérdésett tárgyaló , vagy a tudományág kialakulásában fontos szerepet játszó műveket ; "B" betüvel a bevezető , modern felfogásúakat, melyeket az anyaggal ismerkedőknek ajánlok ; "C" betüvel azokat , amelyek kissé más szemszögből vizsgálják a kiszámithatóság fogalmát a klasszikus analizisben , és végül "D" betüvel jelölt művek a téma filozófiai vonatkozásait tár - gyalják.

[1B] ABERTH,O.:Analysis in the computable number field,J. Assoc.Comput.Mach.15/1968/,275-299.MR 38=5626

[2A] ———— A chain of inclusion relations in computable analysis,Proc.Amer.Math.Soc.22/1969/,539-548.

[3A] ———— The failure in computable analysis of a classical existence theorem for differential equations,Proc.Amer.Math.Soc.30/1971/.151-156.

[4A] ———— The concept of effective method applied to computational problems of linear algebra, J. comput.System /Sci.5/1971/,17-25.

[5B] ———— Computable analysis,McGraw-Hill,New-York,1980.

[6] AZRA,J.P.et JAULIN,B.:Recursivité , Gauthier-Villars , Paris,1973.

[7BC] BISHOP,E.:Foundations of constructive analysis,Mc Graw-Hill , 1967.

[8A] BROUWER,L.E.J.:Collected works, I. ,North-Holland ,Amsterdam , 1975 .

[9A] ЦЕЙТИН,Г.С.:Теорема Коши в конструктивном анализе, Усп.Мат.Наук,IO,Но4/66/,/I955/,207-209.

[10A] ———— Алгоритмические операторы в конструктивных полных сепарабельных метрических пространствах,Докл.Акад.Наук.СССР I28,Но. I/I959/,49-52.

[11A] ———— Алгоритмические операторы в конструктивных метрических пространствах,Труды Мат.Инст. Стеклова,67/I962/,295-36I.

[12A] ———— Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе,там же 362-384.

[13A] ———— Три теоремы о конструктивных функциях,там же 537-543.

[14A] CLEAVE,J.:The primitive recursive analysis of ordinary differential equations and the complexity of their solutions , J.Comput.System Sci.3/1969/, 447-455.

[15] CODDINGTON,E.and LEVINSON,N.:Theory of ordinary differential equations , McGraw - Hill,New-York,1955.

[16] DEKKER,J.C.E.and MYHILL,J.:Recursive equivalence types, Univ.Calif.Publ.Math.3/1960/,67-214.

[17A] ДЕМУТ,О.:Необходимое и достаточное условие интегри - руемости конструктивных функций по Риману, ДАН СССР,176-No4/1967/,757-758.

[18D] DUMMETT,M.:Elements of intuicionism,Clarendon Press , Oxford,1977.

[19] FEFERMAN,S.:A language and axioms for explicit mathematics,Algebra and Logics,Serie Lect.Notes in Math.,No.450,1975,pp.87-139.

[20A] FREUND,R.:Real functions and numbers defined by Turing machines,Theoretical Comp.Sci.23/1983/,287-304.

[21B] GOODSTEIN,R.L.:Recursive analysis,North-Holland Publ.Co., Amsterdam,1961 /Serie Stud.in Logic and Found.../

[22C] GRODZKI,Z.:Theory of shift registers,Inf.Cont.21/1972/, 196-205.

[23C] ——— The complexity of shift registers , ugyanott, 206-210.

[24] GRZEGORCZYK,A.:Some classes of recursive functions,Rozprawy Mat. 4/1953/,1-46.

[25C] ——— Computable functionals,Fund.Math.42/1955/,168-202.

[26C] ——— On the definitions of computable functionals, ugyanott,232-239.

[27A] ——— On the definitions of computable real continuous functions,Fund.Math.44/1957/,61-71.

[28C] HERMANN,G.and ISARD,S.:Computability over arbitrary fields, J.London Math.Soc./2/ 2/1970/,73-79.

[29B] HERMES,H.:Enumerability,decidability,computability , Springer-Verlag,New-York,1969.

[30BD] HEYTING,A.:Intuicionism - an introduction,North-Holland,1956 /Serie Stuies in Math.Logic and Found. ... /

[31D] KALMÁR LÁSZLÓ:Foundations of mathematics - whither now ? , Problems in the Philosophy of Math.,Amsterdam, 1967,pp.187-207.

[32D] ——— A matematika alapjai I-II.,Egyetemi jegyzet,Bp. 1978.

[33A] KER-I KO:On the definitions of some complexity classes of real numbers,Math.System Theory,16/1983/,95-109.

[34D] KINO,A.,MYHILL,J.and VESLEY,R.E./eds./:Intuicionism and proof theory /Proc.of the Summer conf.at Buffalo, 1968/,North-Holland,1970./Serie Stud.in Logic and.../

[35B] KLAUA,D.:Konstruktive analysis , VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften , Berlin 1961.

[36C] KONIKOWSKA,B.Continuous machines,Inf.Cont./2/ 22/1973máj/, 353-372.

[37A] KREITZ,Ch.and WEINRAUCH,K.:Complexity theory on real numbers and functions,Lect.Notes in Comp.Sci.145/1 /1983/,165-174.

[38B] КУШНЕР,Б.Б.:Лекции по конструктивному математическому анализу,Наука,Москва,1973,

[39A] LACHLAN,A.H.:Recursive real numbers,J.Symb.Logic.26 /1963/,1-16.

[40A] LACOMBE,M.D.:Éxtension de la notion de la fonction aux fonctions d'une variable ou plusieurs variables réelles,Comp.Rend.Acad.Sci,Paris, 240/1955/,2478-2480.;241/1955/,13-14.,151-153.

[41A] ——— Quelques proprietés d'analyse récursive, Compt.Rend.Acad.Sci.Paris 244/1957/,838-840., 996-997.

[42] LAKATOS IMRE:Bizonyítások és cáfolatok,Gondolat,Bp.1981.

[43A] LEHMAN,R.S.:On primitive recursive real numbers,Fund.Math. 49/1961/,105-118.

[44B] МАЛЦЕВ,А.И.:Алгоритмы и рекурсивные функции,Наука, Москва,1965.

[45C] MANIN,Yu.I.:A course in mathematical logic/Transl.from the Russian/,Springer-Verlag,Berlin,1977 /Serie Graduate Texts in Math.No.53./
vagy ami számunkra ugyanaz:
МАНИН,Ю.Н.:Вычислимое и невычислимое,изд.Советское радио,Москва,1980 /Серия кибернетика./

[46A] МАРКОВ,А.А.:О непрерывности конструктивных функций, Усп.Мат.Наук.9 Но3/61/,/1954/,226-229.

[47D] ——— О конструктивной математике,Труды Мат.Инст. Стеклова,67/1962/,8-14.

[48B] MAZUR,S.:Computable analysis,Rozprawy Mat.33/1963/,1-110.

[49A] MAYOH,B.H.:Semi-effective numberings and definitions of the computable numbers,Archiv f.Math.Logik,11. /1968/,113-125.

[50A] MESCHKOWSKI,H.:Rekursive reelle Zahlen,Math.Zeitschrift, 66/1956/,189-202.

[51A] MILLER,W.:Unsolvable problems with differentiability hypothesis,Proc.4th Ann.Princeton Conf.on Information Sci.and Systems,1970,460-482.

[52A] ——— Recursion function theory and numerical analysis,J.Comp.System Sci.4/1970/,465-472.

[53A] ——— Toward abstract numerical analysis,J.Assoc. Comp.Mach.20/1973/,399-408.

[54C] MOCHOWAKIS,Y.N.:Notation systems and recursive ordered fields,Compositio Math.17/1965/,40-71.

[55B] MONK,D.J.:Mathematical logic,Springer-Verlag,New-York, 1976,109-110.

[56A] MOSTOWSKY,A.:On computable sequences,Fund.Math.44/1957/, 37-51.

[57A] MYHILL,J.:Criteria for constructibility of real numbers, J.Symb.Logic 18/1953/,7-10.

[58A] ——— A recursive function defined on a compact interval and having a continuous derivate that is not constructive,Mich.Math.J.18/1971/,97-98.

[59D] PACH JÁNOS:Matematikai pokolgép,Magyar Tudomány,1981/10, 746-749.

[60B] PÉTER,R.:Recursive functions,Akadémia,Bp.1967,§24 and appendix.

[61A] POR-EL,M.B. and CALDWELL,J.On a simple definition of computable function of a real variable - with applications to functions of a complex vari - able,Zeitschrift f.Math,Logik u.Grundl.d.Math. 21/1975/,1-19.

[62A] POUR-EL,M.B.and RICHARDS,I.:Differentiability properties of computable functions - a summary,Acta Cyb. Szeged 1/1979/,124-126.

[63A] ——— A computable ordinary differential equation which possesses no computable solution,Ann.Math.Logic,17 /1979/,61-90.

[64A] ——— The wave equation with computable initial data such that its unioue solution is not computable, Adv.in Math.39/1981/,215-239.

[65A] ——— Computability and noncomputability in classical analysis,Trans.Amer.Math.Soc.275/1983/,539-560.

[66A] RABIN,M.O.:Computable algebra,general theory and theory of computable fields,Trans.Amer.Math.Soc.95/1960/, 341-360.

[67A] RICE,H.G.:Recursive real numbers,Proc.Amer.Math.Soc.5/1954/, 784-791.

[68A] RITCHIE,R.:Classes of predictably computable functions, Trans.Amer.Math.Soc.106/1963/,139-173.

[69] ROGERS,H.Jr.:Theory of recursive functions and effective computability,McGraw-Hill,New-York,1967.

[70A] ROOSENBLOOM,P.C.:An elementary constructive proof of the fundamental theorem of algebra,Amer.Math.Monthly, 52/1945/,562-570.

[71D] RUZSA IMRE:A matematika és a filozófia határán,Gondolat, Bp.1968.

[72] SAIN MÁRTON:Matematikatörténeti ABC,Tankönyvkiadó,Bp.1977.

[73A] ШАНИН,Н.А.:Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства,Труды Мат.Инст.Стеклова,67/1962/,15-294.

[74C] SCHNORR,Cl.P.Komplexität von algorithmen mit anwendung auf die analysis,Archiv f.Math.Logik 14/1971/,54-68.

[75A] SHEPHERDSON,J.C.:On the definition of computable function of a real variable,Zeitschr.f.Math.Logik u.Grundl. d.Math.22/1976/,391-402.

[76] SOARE,R.I.:Recursive enumerable sets and degrees, Bull.Amer.Math.Soc./1978/,1149-1162.

[77A] SPECKER,E.:Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis,J.Symb.Logic 14/1949/,145-158.

[78A] ——— Der Satz von Maximum in der rekursiven Analysis,Constructivity in Math.,Proc.Amsterdam Colloq.1957,ed.Heyting,A.,North-Holland,Amsterdam,1959/Serie Studies in Logic and the Found.of Math./

[79D] STEAVEN-KÖRNER:Introduction to the philosophy of Mathematics,Harper et Row,1960.

[80D] SZABÓ ÁRPÁD:Anfänge der grieschischen Mathematik, Akadémia,Bp.1969.

[81D] ——— A görög matematika kibontakozása,Magvető, Bp.1978/Gyorsuló idő sorozat/

[82C] TRAUB,J.F.:Computational complexity of iterativa processes,Siam.J.Comput.1/1972/.167-179.

[83] TROELSTRA,A.S.:Metamathematical investigations of intuitionistic Arithmatic and Analysis,Springer-Verlag,Berlin,1973,/Serie Lect.Notes in Math. No.344./

[84B] ——— Aspects of constructive mathematics,in: Handbook of Math.Logic,North-Holland,Amsterdam,1977,pp.973-1052./Serie Stud.in Logic... vol.90./

[85D] TROSZTNYIKOV,V.N.:Konstruktiv módszerek a matematikában, Gondolat,Bp.1981.

[86A] TURING,A.M.:On computable numbers with an application to the Entscheidungs problem.Proc.London Math. Soc./2/ 42/1936-37/,230-265.

[87A] ——— A correction /to [86] above/,Proc.London Math. Soc./2/ 43/1936-37/,544-546.

[88] WAERDEN,B.L.van der:Egy tudomány ébredése,Gondolat,Bp.1977.

[89C] ZAKOWSKI,W.:A generalization of the notion of a machine and computability,Inf.Cont./2/ 33/1977/,166-176.

[90A] ЗАСЛАВСКИЙ,И.Д.и ЦЕЙТИН,Г.С.:О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций,Труды Мат.Инст.Стеклова,67/I962/458-502.

[91A] ЗАСЛАВСКИЙ,И.Д.:Опровержение некоторых теорем классического анализа в конструктивном анализе, Усп.Мат.Наук СССР,IO Но4/66/,/I955/,209-2IO.

[92A] ——— Некоторые особенности конструктивных функций вещественного переменного по сравнению с классическими,Труды 3ого Всесоюзная Мат.Съезда томI,Изд.Акад.Наук СССР,I956,I83-I84.

[93A] ——— Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций,Труды Мат.Инст. Стеклова 67/I962/,385-457.

További irodalom:

[94] Logic colloquium '78, Proc. of the coll. held in Mons, Aug. 1978 edited by Boffa, M., Dirk van Dalen, Kenneth Mc Aloon, North-Holland, Amsterdam, 1979 /Serie Stud. in Logic and the Found. .../

[95] BISHOP, E. and CHENG, H.: Constructive measure theory, Memoires of the Amer. Math. Soc., 1972.

[96] KONIKOWSKA, B.: On some approximation problems of continuous computation/Lect. Notes in Comp. Sci. No. 28./, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 91-106.

[97] ZAKOWSKI, W.: Continuous simple Z-machines, Z-countable functions and sets of functions of n real variables, ugyanott, pp. 143-156.

[98] LÖB, M. H. and WAINER, S. S.: Hierarchies of number theoretic functions, I-II., Archiv f. Math. Logik u. Grundl. d. Math. 13/1970/, 39-51, 97-113; 14/1971/, 198-199.

[99] HAUCK, J. Berechenbare reelle funktionen, Zeischrift f. Math. Logik, 19/1973/, 121-140.

[100] MARTIN-LÖF, P.: Notes on constructive mathematics, Almqvist et Wiksell, Stockholm, 1970.

[101] NAGORNY, N. M.: Algorithms and real numbers, Lect. Notes in Comp. Sci. No. 45, i. e. Math. Found. Comp. Sci. 1976.

[102] RICHMAN, F. /ed./: Constructive mathematics /in. Lect. Notes in Math., Vol. 873./

[103] SKANDALIS, K.: Programmability in the set of real numbers and second order recursion, Annal. Soc. Math. Polonae, Ser. IV. Fund. Inf. VI. 3-4./1983/, 257-274.