KöMaL

1977
4. SZÁM

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK

FIZIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

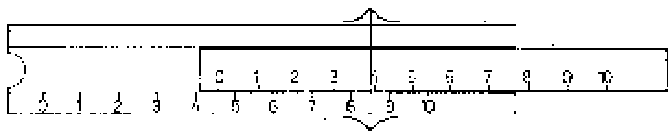
54. KÖTET
4.
SZÁM

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM
★
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
★
EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT

BUDAPEST, 1977. ÁPRILIS

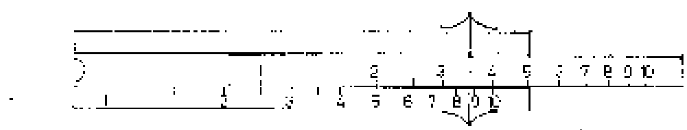
Mit tudhat egy számolóléc[1]?

Nem egy új szerkezetű logarlécet kívánok itt ismertetni, inkább egy módszert, aminek a segítségével magunk készíthetünk különböző kétváltozós függvények értékének gyors kiszámítására szolgáló eszközt. Minden számolóvonalzó működése szakaszok összeadásán alapszik. Ha két mm beosztású vonalzót egymás mellett elcsúsztatunk, akkor 2 jegy pontossággal tudunk összeadást gyorsan elvégezni. Az egyik összeadandót megkeressük az egyik vonalzón, a másik vonalzó „0" jelét hozzáállítjuk, s a másik vonalzón megkeresett érték alatt leolvassuk az eredményt. Például az 1. ábrán a $4{,}6+3{,}9=8{,}5$ összeget számoltuk ki.



1. ábra

Ha a kezdőponttól az egyik összeadandó a mm-re, a másik összeadandó ettől b mm-re van, az összeg $(a+b)$ mm-re lesz. Ha nem mm-es (egyenletes) beosztású skálát, hanem logaritmikus beosztású skálát alkalmazunk, akkor a szorzást tudjuk pillanatok alatt elvégezni. Hiszen az egyik tényező $\lg a$ mm-re, a másik $\lg b$ mm-re van a kezdőponttól, s a szorzat $\lg (ab)=\lg a+\lg b$ mm-re van (ha a skálákat a vonalzóhoz hasonlóan mozgattuk). Így a szorzást szakaszok ($\lg a$ és $\lg b$ mm hosszú szakaszok) összeadására vezettük vissza. Például: $2{,}5\cdot 3{,}5=8{,}75$ (2. ábra, lásd a II. o. gimn. tankönyv 300. oldalát és Balogh Arthur: A logarléc c. könyvének „A léc kezelésének alapelvei" c. fejezetét a 19–21. oldalakon.)



2. ábra

Az általánosan használt és a boltokban is kapható logarlécek két logaritmikus skálát és több segédskálát (sinus, tangens, exponenciális, négyzetes, reciprok értékek kiszámítására szolgáló skálákat) tartalmaznak. Ezek segítségével gyorsan ki lehet számolni bizonyos kétváltozós függvények helyettesítési értékét, de csak egyváltozós függvényekre való lebontással. Közben a részeredmények lejegyzése, összeadása és több léc- vagy ablakeltolás is szükséges. Ez főleg bonyolultabb képleteknél, vagy sok, aránylag egyszerű képlet egymás után való használatakor jelent nehézséget, hibalehetőséget. Módszeremmel bizonyos típusú kétváltozós függvények értéke egyetlen beállítással leolvasható, s a fent említett kellemetlenségek megszűnnek.

Módszerem a következő: tartozzon három alkalmasan megválasztott skála minden speciális feladathoz. Ha az egyik változó nem önmagában szerepel, ha-

[1] Örömmel közöljük ezt a cikket, mert ezzel is bátorítani akarjuk olvasóinkat, hogy küldjék meg nekünk kutatásaik közlésre érdemes eredményeit. — A Szerk.

nem valamely egyváltozós függvényében (pl. $x^2+3x-3+\sqrt{x}$, vagy $\lg x!$), akkor ne kelljen ezt külön (más skálán) „kiszámolni", hanem a függvény értéke már magán a skálán legyen ábrázolva. De hogyan? Készítsünk gondolatban egy egyenletes beosztású skálát (vagy dolgozzunk milliméterpapíron). 0-tól induljunk, de ne azt írjuk a skálára, hogy hány egységnyi távolságra vagyunk a kezdőponttól, hanem azt az x értéket, amit ha behelyettesítünk a szóban forgó függvénybe, akkor a kezdőponttól mért (előjeles) távolságot kapjuk. Hogy érthetőbb legyen, mondok egy példát. Vegyük pl. az (x^2+x+1) polinomot. Ekkor pl. a 0-tól 3 egységnyire levő ponthoz nem 3-at írunk, hanem 1-et, mert $1+1+1=3$. Hasonlóan 7 helyére 2-t, 13 helyére 3-at írunk és így tovább. Ezt bármilyen szigorúan monoton függvénnyel megtehetjük. Így az eredményt nem kell más skálára átültetnünk, amivel hibákat és pontatlanságot kerülhetünk el. Sőt le sem tudjuk olvasni az értékeket (erre külön skála kellene, egységnyi beosztásokkal), de mi nem is akarjuk tudni ezeket az értékeket, csak számolni velük.

Ha már a helyettesítési értéket felrajzoltuk a milliméterpapírra, akkor egy másik milliméterpapírra egy másik egyváltozós függvényt rajzolunk fel, pl. az y^2-y+1 függvényt. Itt az egyes szám egységnyire lesz a 0-tól, a kettes 3, a hármas 7 egységnyire stb. Mire volt jó e két skála elkészítése? Ha alaposabban megnézzük, már csak egy lépés választ el az igazán hasznos logarléctől, de ne vágjunk a dolgok elébe, előbb fejezzük be az általánosítást. Mivel két egyenletes skálával dolgozunk, ezért a két skála egymás melletti elcsúsztatásával a függvényértékeket ÖSSZEADHATJUK vagy KIVONHATJUK. Formulával $f(x)\pm g(y)$. Ha az így kapott eredmény leolvasására szolgáló egyenletes milliméterskálát is átalakítjuk az előbbi két skálához hasonlóan, akkor a már kapott eredmény EGYVÁLTOZÓS függvényét kapjuk, formulával: $F(f(x)\pm g(y))$, ahol F tetszőleges (szigorúan monoton) egyváltozós függvény lehet.

A leolvasó skála elkészítése: ki kell számítanunk, hogy az alapskála minden egyes pontjához tartozó számot $F(z)$-be helyettesítve milyen eredményt kapunk, s ezt írjuk a ponthoz. Tulajdonképpen az $(f(x)\pm g(y))$ eredményt helyezzük az $F(z)$ egyváltozós függvénybe, és az eredményt írjuk a skálára.

Mivel továbbra is az egészeket szeretnénk a skálákon feltüntetni, az eddig elmondottak azt jelentik, hogy az álló (illetve a mozgó) skálán az n egész helyét az origótól számított $f(n)$ (illetve $g(n)$) milliméterre jelöljük ki, az álló skála fölött elhelyezett leolvasó skálán pedig az n egészet az origótól $F^{-1}(n)$ milliméterre tesszük, ahol F^{-1} az F függvény inverze.

Nézzünk egy egyszerű példát! Mindenki ismeri Pitagorasz tételét, melynek csak $a^2+b^2=c^2$ része érdekel minket. Ebből a sokszor használt képlet: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Ebben az esetben $f(x)=x^2$ és $g(y)=y^2$, tehát $f(x)=g(y)$, ezért két egyforma skálával dolgozunk. Ha a leolvasó skálát is elkészítettük, azt a műveletvégző skálákhoz teljesen hasonlónak találjuk. Ha végiggondoljuk, hogyan is készítettük el a skálákat, akkor ez egészen természetesnek fog tűnni. Az $f(x)$ és $g(y)$ skálák a négyzetre emelés skálái, $F(z)$ pedig ennek inverzéé, a négyzetgyökvonásé, de $f(x)$ skáláját fordított módon készítettük el, mint $F(z)$-ét. A leolvasó skála így felesleges, két skálával is számolhatunk. Egyetlen léceltolással

3. ábra

– feltéve, hogy megfelelő alapra felragasztottuk a skálákat — elvégezhetjük a számolást. Megtakarítottuk a Függvénytáblázat háromszori alkalmazását és egy összeadást. A kész skálákat a 3. ábrán láthatjuk, egy alkalmazási példával együtt ($3^2+4^2=5^2$). Eszközünk persze arra is használható, hogy az átfogó és az egyik befogó hosszából a másik befogó hosszát meghatározzuk. (Hogyan?)

Nézzünk bonyolultabb példák után! $x^2+px+q=0$ másodfokú egyenlet megoldóképlete:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Láthatjuk, hogy jelenlegi módszerünkkel a képlet kiszámítására egyetlen léceltolás nem elegendő. De a benne szereplő $\sqrt{p^2/4-q}$ kifejezés már megfelel céljainknak, ezt ugyanis az $f(x)=p^2/4$ és $g(y)=-q$, valamint $F(z)=\sqrt{z}$ függvényekkel ki tudjuk számolni.

Az $f(x)$ skála megrajzolásakor a kezdőponthoz ismét a 0 szám kerül (mert $0^2/4=0$). Az 1-es számot 0,25 mm-re rajzoljuk, a 2-es számot 1 mm-re (mert $1^2/4=0{,}25$ és $2^2/4=1$), és általában az n számot $n^2/4$ mm-re.

A $g(y)=-y$ skála elkészítése — remélem — nem okoz különösebb nehézséget, hiszen az egy olyan fordított számegyenes, amelynek egysége $e=1$ mm. Jó, ha a nulla a skála közepén van, hiszen pozitív és negatív számokkal egyaránt számolni fogunk. Mivel most már F^{-1} nem azonos f-fel, szükségünk van a leolvasó skálára is, ez különben azonos az előző példában szereplő skálával (4. ábra, a csúszka állása szerint $\sqrt{(6{,}3/2)^2-(-18)}=5{,}3$). Tulajdonképpen $f(x)$ most nem monoton, de szerencsénkre páros függvény, így a $+n$, $-n$ számokat egy helyen tüntethetjük fel a skálán. Furcsának találhatjuk, hogy az F skála minden z száma alatt az f skála $2z$ pontja található. De ha utánagondolunk, hogy egy tetszőleges P ponthoz milyen tulajdonságú számot írtunk ezeken a skálákon, akkor ez természetes lesz.

A másodfokú megoldóképlet ezen részénél tehát megtakarítottuk a Függvénytáblázat kétszeri alkalmazását, egy osztást és egy kivonást. Látható, hogy ez a logarléc már egyszerűbb feladatoknál mekkora segítséget nyújt, hát még bonyolultabbaknál!

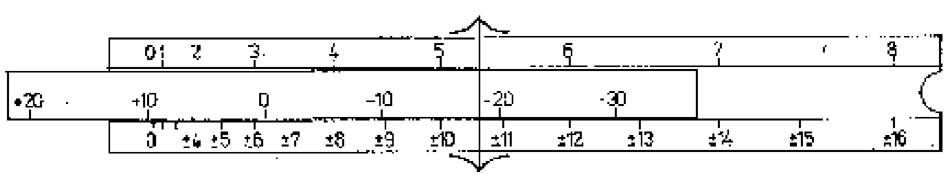
Csak néhány példát mutatok a matematika, fizika és a csillagászat tárgyköréből:

$${}^{a}\log b,\qquad f(a)=-\lg(\lg a),\qquad g(b)=\lg(\lg b),\qquad F(z)=10^z;$$

$$n!k!,\qquad f(n)=\lg(n!),\qquad g(k)=\lg(k!),\qquad F(z)=10^z;$$

a harmadfokú egyenlet megoldóképletének egy részlete:

$$\sqrt{p^3/27+q^2/4},\qquad f(p)=p^3/27,\qquad g(q)=q^2/4,\qquad F(z)=\sqrt{z};$$



4. ábra

a Lorenz-transzformáció;

$$\frac{M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c}}}, \quad f(M)=\log M, \quad g(v)=-\frac{1}{2}\lg\left(1-\frac{v^2}{c}\right), \quad F(z)=10^z;$$

és még sok egyéb képlet, például $1/t+1/k+1/f=0$, vagy $\sin\alpha/\sin\beta$, $r^2\pi\cdot m/3$ stb. De ezzel logarlécünk lehetőségeit még mindig nem aknáztuk ki. Haszpra Ottó és Pálmay Lóránt Nomogramok című könyvében (Tankönyvkiadó, Bp., 1962, a továbbiakban H. P.) az 52. oldalon módszert találunk az

$$af(x)g(y)+bf(x)+cg(y)+dh(z)+e=0$$

alakú kapcsolatok $f(x)+g(y)+h(z)=0$ alakra hozására, és megjegyzéseket arra nézve, hogy mely összefüggések hozhatók ábrázolható alakra. Az összes ilyen összefüggés kiszámítására készíthetünk logarlécet. A skálák elkészítése előtt is érdemes gondolkodni az átalakítási lehetőségeken, mert a szerkesztés esetleg lényegesen egyszerűsíthető.

Nézzük a többváltozós függvényeket. Ha ezzel a módszerrel dolgozunk, akkor a cikk elején, a skálák alkalmazásával és elméletével kapcsolatban írtakat teljes indukciószerűen ismételve s az előbb említettekkel egybevetve beláthatjuk, hogy az alábbi módszerrel lehet újabb változókat bevezetni. A leolvasott $F(f(x)\pm g(y))$ eredményt tekintjük u változónak, és az x, y változókhoz hasonlóan a $H(h(u)\pm k(v))$ függvényt számoljuk ki. Az eljárást folytatjuk, ameddig meg nem unjuk, kiszámolhatjuk az

$$F[\ldots(f_3[f_1(x_1)\pm f_2(x_2)]\pm f_4(x_4)\pm\ldots]$$

függvényt, ahol $x=x_I$ és $f(x)=x_{II}=f(y)$ is lehet. Itt úgy jártunk el, mint a nomogramoknál, amikor többváltozós függvény értékét kellett kiszámítanunk (lásd H. P. 72. oldal).

Visszatérve a kétváltozós függvényekre, szeretnénk elérni, hogy olyan függvények helyettesítési értékét is tudjuk léccel számítani, amelyek nem az eddig tárgyaltak típusába tartoznak. Vagyis nem x-nek és y-nak vesszük egy-egy egyváltozós függvényét, és a két függvényt adjuk össze, és az eredménynek vesszük egy egyváltozós függvényét. Szükség van erre, mert általában a kétváltozós függvények nem ilyen típusúak, mint azt a $\sqrt{xy}+xy$, vagy $(x^y/y^2-x^2y)^{xy}$ példák mutatják. Lehet-e az eddig tárgyalt módszerrel (amely a szakaszok összeadásán alapszik) szerkeszteni olyan lécet, amely az általános $f(x, y)$ kiszámolást gyorsan elvégzi, csak a két skálán beállított x, y számok segítségével? A válasz: nem lehet. Ennek a belátását az olvasóra hagyjuk. Jó lenne pedig általánosabb kétváltozós függvényeket is számolóléccel számolni. Ha bárkinek volna használható ötlete, írja meg nekem.

Most a logarléc gyakorlati elkészítéséhez szeretnék adni néhány hasznos tanácsot. Fontos a skálahossz és az egység megválasztása. Ha a skála hosszát és az ábrázolni kívánt intervallumot megadjuk, akkor egyszerű számítással meghatározhatjuk az egységet, és a skálát elkészíthetjük. Ha viszont az ábrázolni kívánt intervallum és a pontosság van megadva, akkor már nehéz a skála hosszának vagy egységének a megállapítása.

Az egyenletes skála abszolút hibája, a logaritmikus skála relatív hibája állandó egy logarlécen belül, de más skálának sem a relatív, sem az abszolút hibája nem állandó. Ha túl nagy az egység vagy túl kicsi, bizonyos számok nem lesznek olvashatóak. Én a 250 mm-es skálát ajánlom, mely eléggé áttekinthető és könnyen kezelhető, ezenkívül a megfelelő egység megállapítása mellett eléggé pontos. Legtöbbször az 1 mm-es egység a legmegfelelőbb. A kereskedelemben kapható logaritmikus papír 90 mm-es egysége legtöbbször megfelelő. (Lásd H. P. 90. oldalának utolsó bekezdését, és a 19. oldalon kezdődő „Adott pontosságú skála elkészítése" c. fejezetet.)

Rajzlapból elkészítve hasznos kis segítséget kapunk gyors számolások elvégzésére. A lg x függvény ábrázolásához 180 mm-es, az $x!$ függvény elkészítéséhez 9; 0,9; 0,09; és 0,009 mm-es egységeket ajánlok. A skálák elkészítésekor a sok és bonyolult, áttekinthetetlen számolás helyett egyszerűbb megszerkeszteni a skálát. Ha elég nagy ábrát készítünk, és elég gondosan dolgozunk, szerkesztésünk nem lesz pontatlanabb, mint a kiszámított értékek felrajzolása esetén.

A módszer azon alapszik, hogy ha az $f(x)$ függvényt az előbb ismertetett módon műveletvégző skálán ábrázoljuk, és utána felrajzoljuk a szám 0-tól való távolság függvényt Descartes-féle koordináta-rendszerben, akkor ugyanolyan leképezési görbét kapunk, mintha az eredeti függvényt ábrázoltuk volna. Ez magától értetődőnek fog tűnni, ha arra gondolunk, hogyan is szerkesztettük meg a függvényskálát. Innen már könnyű kitalálni azt a módszert, amellyel a „Skála szerkesztése függvénygörbe alapján" lehetővé válik.

1. lépés: derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt.

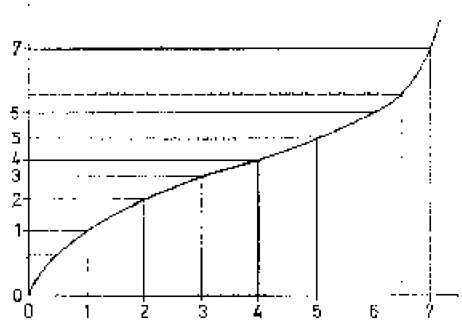
2. lépés: az x tengely nevezetes pontjaiból (egész, esetleg fél, tizedes, π, e, C stb.-ből) merőlegeseket állítunk. A merőlegesek és a függvénygörbe metszéspontjait kivetítjük az y tengelyre.

3. lépés: a kivetített pontokhoz azon számokat írjuk, amiből kiinduló merőleges metszéspontjának kivetített képe (l. az 5. ábrát).

4. lépés: az újraszámozott y tengely megadja a műveletvégző skálát. Azt állapíthatjuk meg, hogy ha a függvény deriváltja nő, akkor az egész értékek közti távolság a skálán nő, és ha a derivált csökken, a beosztások közti távolság is csökken.

Ezt könnyű belátni. Ha az osztásokat (az egészek osztásait, amik a hosszskálán egyenletesen helyezkednek el) a függvénygörbén keresztül az y tengelyre kivetítjük, a logarléc elkészített műveletvégző skálájának beosztásait kapjuk. Ha megvizsgáljuk az x tengely osztásainak és kivetített képeinek viszonyát, felismerhetjük a kapcsolatot a függvény deriváltjával (l. az 5. ábrát).

Ha több skála azonos, és mindegyik a lécen vagy mindegyik a testen van (vagy az egyiken ábrázolt számok n-szeresei a másikon ábrázolt számoknak),



5. ábra

felesleges mindegyiknek külön skálát készíteni. Elég egy megkülönböztető színnel az egész számok fölé n-szeresüket is fölírni, figyelmeztetésül (lásd a másodfokú egyenlet megoldóképletének $f(x)$ és $F(z)$ skáláit). A gyakorlás után egészen könnyen és gyorsan használjuk majd logarlécünket, akárcsak a megszokott általános léceket. Még ajánlom H. P. 26. oldalán található „Skála szerkesztése függvénygörbe után. Grafikus interpoláció" c. fejezeteit. A szerkesztéseknél felhasználható a „Függvényhálózatok" c. fejezet is.

A logarléc használhatóságát még az is megszabja, hogy az ábrázolt többváltozós függvény milyen gyakran fordul elő, és milyen bonyolult, milyen hamar és pontosan lehet a logarléccel kiszámítani.

Végül, de nem utolsósorban köszönetet mondok Békefi Zsuzsanna tanárnőmnek, aki önzetlenül segített cikkem megírásában.

Mindenkinek sok örömet és sikert kívánok saját készítésű számolólécének használatához!

Szalkai István III. o. t.
Veszprém, Lovassy László Gimnázium

Feladatmegoldások

F. 2061. *Igazoljuk, hogy cos x^2 függvény nem periodikus.*

I. megoldás. Vizsgáljuk a $\cos x^2$ függvény pozitív zérushelyeinek elhelyezkedését. A nagyság szerint k-adik zérushely

$$x_k = \sqrt{(2k-1)\frac{\pi}{2}} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

A szomszédos zérushelyek távolsága:

$$x_{k+1}-x_k = \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(2k-1)\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}.$$

Ebből látható, hogy a szomszédos zérushelyek távolsága egyre csökken:

$$x_{k+2}-x_{k+1} < x_{k+1}-x_k.$$

Emiatt a $\cos x^2$ függvény valóban nem lehet periodikus, hiszen ha az lenne, az origótól tetszőlegesen messze is fordulnának elő olyan szomszédos gyökhelyei, amelyek távolsága megegyezik (x_2-x_1)-gyel.

Hajnal Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a $\cos x^2$ függvény periodikus, periódusát jelöljük p-vel ($p>0$). Ekkor minden valós x-re

(1) $$\cos (x+p)^2 = \cos x^2,$$

ahonnan azt kapjuk, hogy minden rögzített x-re van olyan k egész szám, hogy vagy

(2) $$(x+p)^2 = x^2 + 2k\pi$$ vagy

(3) $$(x+p)^2 = -x^2 + 2k\pi.$$