KÜLÖNLENYOMAT

A

MATEMATIKAI LAPOK

34. ÉVFOLYAM 4. SZÁMÁBÓL

A „Banach-elv"-ről

Horváth Miklós, Joó István és Szalkai István

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT, BUDAPEST
1991

A „BANACH-ELV"-RŐL

HORVÁTH MIKLÓS, JOÓ ISTVÁN és SZALKAI ISTVÁN

Bevezetés

Stefan Banach a század első évtizedeiben megalkotta a funkcionálanalízis számos klasszikus tételét, mint például a több változatban használt Banach—Steinhaus-tételt, a Hahn—Banach-tételt, a nyílt leképezés tételét, az inverz leképezés tételét, stb. (l. pl. Rudin [17] könyvében).

Általában véve munkásságának egyik fő iránya olyan tételek igazolása volt, melyek azt állítják, hogy egy konkrét módon megadott lineáris operátor folytonos. Az ő tiszteletére nevezzük Banach-elvnek a következő hipotézist:

Konstruktívan definiált Banach-téren értelmezett, konstruktívan megadott lineáris operátorok folytonosak.

(Mivel véges dimenziós Banach-tereken értelmezett lineáris funkcionálok folytonosak, így nyilvánvalóan csak végtelen dimenziós Banach-terekkel érdemes foglalkoznunk. Módszereinkben azonban a tér dimenziója nem lényeges.)

Ez még így nem egy tétel, hiszen nem mondtuk meg, mit jelent a „konstruktív" jelző. Világos, hogy transzfinit indukcióval megadható olyan lineáris operátor bármely végtelen dimenziós Banach-téren, ami nem folytonos. Másrészt a tapasztalat azt mutatja, hogy minden olyan esetben, amikor egy operátor definíciójában nem használjuk fel a kiválasztási axióma valamelyik ekvivalens alakját, az operátor folytonosságát sikerül belátni. (A transzfinit indukciós bizonyítások elfogadását a kiválasztási axióma feltételezése teszi lehetővé.) Ennek mélyebb okait tárja fel a Banach-elv valamilyen változatának igazolása. Az alábbi dolgozattal ez a célunk.

A „konstruktív" jelzőn értsük a következő formulát: „formulával definiálható". Ez célszerűnek látszik abból a szempontból is, hogy a klasszikus tételek (Banach—Steinhaus-tétel, inverz leképezés tétele) általában formulával megadható leképezésekről szólnak. Ezzel az interpretációval az egész kérdéskör átcsúszik a logika és a modellelmélet területére. A vizsgálatok legerősebb eszköze a Cohen által megalkotott forszolási technika lesz. (Ezt vázlatosan a 4. részben ismertetjük, azonban e bonyolult elmélet részletesen pl. a [4], [14], [20] művekben megtalálható.)

A modellelmélet alkalmazásának gondolata Banach munkásságának kiterjesztésében Ajtai Miklóstól származik ([1], [2]). Ebben a dolgozatban Ajtai eredményeinek bizonyos élesítéseit, illetve átfogalmazásait adjuk meg.

Az 1. részben a később felhasználásra kerülő modellelméleti eszköztárat ismertetjük. (Részletesebben erről [3], [19]-ben, illetve [9], [12] és [14] bevezető lapjain olvashatunk; illetve magyar nyelven [9], [16], [21] és [22]-ben.) A 2. részben ismertetjük Ajtai [1], [2]-beli fontosabb eredményeit és azok változatait. A 3. részben

Szalkai

egy példát mutatunk arra, hogy a fenti, logikai és halmazelméleti természetű eredmények segítségével milyen típusú analízis-tételek igazolhatók. Az utolsó részben Ajtai eredményeit általánosítjuk (4.15. és 4.21. tételek), előtte azonban ennek ürügyén nagyon röviden vázoljuk a forszolás elméletének elemeit. A dolgozat legvégén megfogalmazunk néhány megoldatlan problémát.

A definíciók, bizonyítások, példák végét □ jelöli.

1. Modellelméleti alkalmazások

Jelen dolgozat eredményeivel az analízisben, bizonyítási módszereivel a halmazelméletben és a logikában jártas szakemberek érdeklődésére tarthat számot. E két témakör eléggé távolálló, így célszerűnek láttuk az Olvasó dolgát megkönnyítendő egy rövid áttekintést adni a modellelmélet általunk felhasznált részeiről. (Részletesebb leírás található [3] és [19]-ben. Magyar nyelven a [9], [16], [21] és [22] művek megfelelő részeit ajánlhatjuk.) Hasznos, ha az Olvasó ismerős a (naív vagy axiomatikus) halmazelmélet elemeivel (pl. l. [9], [16], esetleg [11] és [14] bevezető fejezeteit). E rész végén nagyon röviden vázoljuk a konstruktív halmazok osztályát. Aki az alábbi (elemi logikai) fogalmakkal, valamint a konstruálható halmazokkal tisztában van, lapozzon a 2. részhez.

Először is rögzítsünk néhány standard jelölést. Legyen ω a nemnegatív egész számok halmaza, $n\in\omega$ helyett gyakran $n<\omega$-t írunk. $n\in\omega$ esetén $i\in n$ megegyezik $i<n$-nel, vagyis $n=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. A halmazelméletben $i\leqq n$ helyett mindig $i<k$-t írunk, ahol $k=n+1$.

$$^{n}A = A\times\ldots\times A$$

az n-szeres Descartes-szorzat, $^{0}A=\{\emptyset\}$, $^{\omega}A$ az A-beli elemekből képzett végtelen sorozatok halmaza, amit azonosítunk az $\omega\to A$ függvények halmazával. Általában tetszőleges A, B halmazok esetén ^{B}A jelöli a B-ből A-ba képező (az egész B-n értelmezett) függvények halmazát. Ha f egy függvény, akkor $\mathrm{Dom}\,(f)$, ill. $\mathrm{Ran}\,(f)$ az értelmezési tartományt, ill. az értékkészletet jelöli, $H\subset\mathrm{Dom}\,(f)$ esetén $f\restriction H$ jelöli az f függvény H halmazra való megszorítását. Az $R\subset{}^{n}A$ halmazokat A-n értelmezett n-változós relációknak nevezzük. A rendezett párokat (hármasokat, stb.) $\langle a, b\rangle$ vagy (a, b)-vel ($\langle a, b, c\rangle$ vagy (a, b, c)-vel, stb.) jelöljük. Az egyenlőség reláció az

$$I_A = \{\langle a, a\rangle\in{}^{2}A:\ a\in A\}$$

halmaz. A függvényeket az $\langle x, f(x)\rangle$ rendezett párok halmazával azonosítjuk, ahol $x\in\mathrm{Dom}\,(f)$. Tetszőleges I (véges vagy végtelen) indexhalmaz és tetszőleges A (elemekből, függvényekből, stb. álló) halmaz esetén $\langle a_i:\ i\in I\rangle$ az ^{I}A halmaz egy tetszőleges elemét jelöli, azaz A-beli elemeknek egy „I hosszú" sorozatát. (Amit pl. $\{a_i:\ i\in I\}$ vagy $a\in{}^{I}A$, $a_i=a(i)$, $(i\in I)$ alakban is írhatunk.)

1.1. Definíció [3, § 2]:

Legyen τ', τ'' két egyváltozós függvény, melyek értelmezési tartománya ω vagy ω egy kezdőszelete (azaz $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, ahol $n<\omega$) és legyen

$$\delta' := \mathrm{Dom}\,(\tau'),\quad \delta'' := \mathrm{Dom}\,(\tau'').$$

Egy *elsőrendű nyelv*, $\mathscr{L}(\tau', \tau'')$ egy halmaz, melynek elemei

a) az $x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots$ $(m<\omega)$ változójelek;

b) a $g_0, g_1, \ldots, g_\xi, \ldots$ $(\xi\in\delta')$ műveleti- (vagy függvény-) jelek, ahol g_ξ $\tau'(\xi)$-változós műveleti- (függvény-) jel;

c) a $P_0, P_1, \ldots, P_\eta, \ldots$ $(\eta\in\delta'')$ relációjelek, ahol P_η $\tau''(\eta)$-változós relációjel, és P_0 az egyenlőség reláció szimbóluma, így $\tau''(0)=2$ (hiszen „$=$" kétváltozós reláció);

d) a $\vee$, $\neg$, $\exists$ logikai jelek („vagy", „nem", „létezik");

e) a (,) zárójelek.

Végül a $\langle\tau', \tau''\rangle$ párt a *nyelv típusának* nevezzük. □

Megjegyezzük, hogy az elsőrendű jelző arra utal, hogy az a)-beli változójelek és a d)-beli kvantorok az illető modell alaphalmazának elemeit, és nem részhalmazait futják be. (L. a kiértékelés alább megadandó definícióját.) A dolgozatban mindvégig elsőrendű nyelveket fogunk használni.

Továbbá, a 0-változós függvényeket konstansoknak nevezzük. Ezeket inkább a megszokott $c_0, c_1, \ldots, c_i, \ldots$ $(i<\omega)$ betűkkel jelöljük. Az egyváltozós relációkat *tulajdonságoknak* is nevezzük. (Lásd még az 1.4. Definíció után írt megjegyzéseket is.)

A többi megszokott logikai jel (pl. $\Rightarrow$, $\&$, $\Leftrightarrow$, $\forall$) mind kifejezhetőek a d)-ben felsorolt logikai jelekkel, vagyis csak rövidítések, így nyugodtan használjuk őket képleteinkben. (Hiszen $a\Rightarrow b$ ekvivalens $a\vee b$-vel, $a\& b$ ekvivalens $\neg((\neg a)\vee(\neg b))$-vel, $a\Leftrightarrow b$ ekvivalens $(a\Rightarrow b)\&(b\Rightarrow a)$-vel, és végül tetszőleges $\varphi(x)$ formulára $\forall(x)\varphi(x)$ ekvivalens $\neg(\exists x(\neg\varphi(x)))$-vel.)

Példa:

A halmazelmélet nyelve:

$$\delta'=\emptyset,\quad \delta''=2\quad (=\{0,1\}),\quad \tau''(0)=2,\quad \tau''(1)=2,$$

$$P_0=„=",\quad P_1=„\in".$$

□

A továbbiakban rögzítsünk egy

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\tau',\tau'')$$

elsőrendű nyelvet. Ezen a nyelven „*kifejezések*et" változójelekből, „*formulák*at" pedig kifejezések relációjelekbe való behelyettesítéséből kaphatunk. Pontosabban

1.2. Definíció (elsőrendű kifejezések és formulák, l. pl. [3, 3.4]):

a) A változójelek $(x_m, m<\omega)$ 0-adrendű kifejezések.

b) Ha k_j $(j<n, n<\omega)$ legfeljebb i-edrendű kifejezések és legalább egyikük $i-1$-edrendű, és g egy n-változós műveleti jel, akkor

$$g(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$$

egy i-edrendű kifejezés.

c) Ha P egy n-változós relációjel és k_j $(j<n, n<\omega)$ bármilyen rendű kifejezések, akkor

$$P(k_0, \ldots, k_{n-1})$$

egy 0-adrendű formula vagy prímformula.

d) Ha φ, ψ legfeljebb i-edrendű formulák és φ pontosan $i-1$-edrendű, akkor

$$\neg\varphi,\quad (\exists x)\varphi(x),\quad \varphi\vee\psi$$

i-edrendű formulák.

e) Egy, a nyelv elemeiből álló jelsorozatot *kifejezés*nek vagy *formulá*nak nevezünk, ha valamely $i<\omega$-ra i-edrendű kifejezés vagy i-edrendű formula.

f) Az $\mathscr{L}$ nyelv kifejezéseinek és formuláinak halmazát $K(\mathscr{L})$, illetve $F(\mathscr{L})$-lel jelöljük. □

Egy $\Gamma\subset F(\mathscr{L})$ formulahalmazt gyakran *axiómarendszer*nek vagy *elmélet*nek is szoktunk nevezni. Például ZFC-vel jelöljük a halmazelmélet szokásos axiómarendszerét, melyre gyakran fogunk a továbbiakban hivatkozni. (Például Hajnal—Hamburger [9] könyvében ZFC axiómáit részletesen megtaláljuk.) Azonban, nem szükséges ezeket az axiómákat fejből tudnunk, elég ha csak annyit jegyzünk meg: szokásos matematikai levezetéseinket, mint bebizonyítható, végső soron (csak) ZFC axiómáinak felhasználásával végezzük, az 1.10 és 1.11-ben ismertetett logikai axiómák és következtetési szabályok felhasználásával.

A φ formulában szereplő változók közül *szabad előfordulású*nak nevezzük azokat, amelyek φ-ben előfordulnak, de nincsenek lekötve kvantorokkal ($\exists x$, $\forall x$). Speciálisan *zárt* egy formula, ha nincs szabad változója. A matematikában megszokott állítások mind zártak. (L. pl. [3, 3.5].)

Miután bemutattuk a nyelvtant, azaz az $\mathscr{L}$ nyelv használatának szintaxisát, rátérünk a szemantikára, tehát arra, hogyan lehet konkrét jelentéseket tulajdonítani a nyelvben leírt kifejezéseknek és formuláknak.

1.3. Definíció (l. pl. [3, 3.1]):

$\mathfrak{A}$ egy $\langle\tau',\tau''\rangle$ *típusú struktúra,* ha

$$\mathfrak{A}=\langle A,\langle f_\xi\colon \xi\in\delta'\rangle,\langle r_\eta\colon \eta\in\delta''\rangle\rangle,$$

ahol A egy nem üres halmaz (a struktúra alaphalmaza), és

$$f_\xi\colon {}^{\tau'(\xi)}A\to A,\quad r_\eta\subseteq {}^{\tau''(\xi)}A,\quad r_0=I_A. \qquad \square$$

(Azaz f_ξ $\tau'(\xi)$-változós függvény A-n, r_η $\tau''(\eta)$-változós reláció A-n, r_0 pedig az egyenlőség reláció, amit inkább az „$=$" jellel jelölünk.)

A struktúra tehát megmondja, hogy a formulák mire vonatkoznak: az x_n változójelek A elemein futnak, a g_ξ műveleti jelen $\mathfrak{A}$-ban az f_ξ függvényt, a P_η relációjelen pedig az r_η relációt kell érteni. Ismét ne feledjük: a 0-változós függvények konstansok, azaz $\tau'(\xi)=0$ esetén $f_\xi=d_\xi\in A$. (A τ' és f_ξ által kijelölt konstansokat időnként $d_0, d_1, \ldots$-vel jelöljük, vagyis az $\mathscr{L}$ nyelv c_i konstansjelének interpretáltja $d_i\in A$.)

Legtöbbször, ha nem okoz félreértést, a nyelv konstans-, függvény- és relációjeleit és az $\mathfrak{A}$ struktúrában nekik jelentést adó konstansokat, függvényeket, relációkat ugyanazzal a betűvel vagy szimbólummal jelöljük.

Legyen $\bar{a}=\langle a_i\colon i<\omega\rangle\in{}^{\omega}A$; nevezzük $\bar{a}$-t a *változók* egy A-beli *kiértékelésé*nek. Ha k egy kifejezés, akkor k *kiértékelése* $\mathfrak{A}$-ban a változók fenti kiértékelése mellett, $k_{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$ úgy kapható, hogy az x_m változójelek helyébe a_m-et ($m<\omega$), a g_ξ műveleti jelek helyébe az f_ξ függvényt tesszük ($\xi\in\delta'$), P_η helyébe r_η-t írjuk ($\tau\in\delta''$), [3, 3.7]. □

Az egyenlőség reláció minden nyelvben, és így minden struktúrában is szerepel, azonban ezzel, ha nincs rá külön szükség, külön nem foglalkozunk.

1.4. Definíció (Az igazság definíciója, [3, 3.8]):

Azt, hogy a változók $\vec{a}$ kiértékelése mellett a φ formula *igaz* vagy *hamis*, jelölésben:

$$\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \uparrow, \quad \text{illetve} \quad \varphi_{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = \downarrow,$$

így döntjük el:

a) Ha φ prímformula, $\varphi = P_\eta(k_0, \ldots, k_{n-1})$, akkor

$$\langle (k_0)_{\mathfrak{A}}[\vec{a}], \ldots, (k_{n-1})_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] \rangle \in r_\eta$$

esetén legyen $\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \uparrow$, máskor $\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \downarrow$.

b) Ha φ, ψ formulák és igazságukat már eldöntöttük, akkor legyen

$$(\neg\varphi)_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \begin{cases} \downarrow, & \text{ha} \quad \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \uparrow, \\ \uparrow, & \text{ha} \quad \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \downarrow; \end{cases}$$

$$(\varphi \vee \psi)_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \begin{cases} \downarrow, & \text{ha} \quad \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \psi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \downarrow, \\ \uparrow & \text{máskor}, \end{cases}$$

$$(\exists x_m \varphi)_{\mathfrak{A}}[\vec{a}] = \begin{cases} \uparrow, & \text{ha van olyan } b \in A, \text{ hogy } \varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}(a_m|b)] = \uparrow, \\ \downarrow & \text{máskor}, \end{cases}$$

ahol $\vec{a}(a_m|b) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, b, a_{m+1}, \ldots \rangle$ az a kiértékelés, amit az a_m tag b-re való kicserélésével kapunk. $\varphi_{\mathfrak{A}}(\vec{a})$-t a φ formulának a változók $\vec{a}$ kiértékelése melletti $\mathfrak{A}$-beli *kiértékelésének* nevezzük. □

Egyszerűség kedvéért tetszőleges $\eta \in \delta''$, $\langle a_0, \ldots, a_{m-1} \rangle \in {}^m A$ esetén $\langle a_0, \ldots, a_{m-1} \rangle \in r_\eta$ helyett inkább a megszokott $r(a_0, \ldots, a_{m-1})$ formát írjuk (az $a_0, \ldots, a_{m-1}$ elemek az r_η relációban vannak).

Egyváltozós relációk bizonyos tulajdonságú elemeket jelölnek ki, a modell alaphalmazának egy részhalmazát, amit mi $R^{\mathfrak{A}}$-val vagy R^A-val jelölünk (R a reláció, $\mathfrak{A} = \langle A, R, \ldots \rangle$ a struktúra). Formulával: $R^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} \in A : \mathfrak{A} \models R[\vec{a}]\}$. (Lásd az 1.5. Definíciót.) Vegyük észre, hogy csak nagy ritkán lesz $R^{\mathfrak{A}}$ A-nak eleme!

Általában, ha φ egyváltozós (egy szabad változót tartalmazó) formula, $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ adott struktúra (esetleg a $\mathscr{V} = \langle V, \ldots \rangle$ univerzum, az „összes halmaz és elem összessége"), akkor $\varphi^{\mathfrak{A}}$-val jelöljük az $\mathfrak{A}$-ban φ tulajdonságú elemek összességét, osztályát. Osztálynak nevezzük (valamely) formulával definiálható elemek (halmazok) összességét. Példaként említhetjük az összes elem osztályát (melyet pl. az „$x = x$" formulával definiálhatunk), a rendszámok osztályát (l. az 1.17. Definíció utáni megjegyzésekben), a konstruálható halmazok osztályát (l. az 1.26. Definíciót). Mi többnyire halmazmodelleket használunk, azaz $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ esetén A halmaz. (Halmazok és osztályok részletes leírását pl. [9] és [10] könyvekben találhatjuk meg.) Azonban hasznos lesz, ha eszünkbe jut, hogy mi nem vagyunk egy halmazba „bezárva", azaz érveléseink az összes halmazra vonatkoznak, a „világban érvényes" $\in$-relációt használjuk. Ezért szoktunk a $\mathscr{V} = \langle V, \in \rangle$, ún. „világ-modellről" beszélni, ami osztálymodell, hiszen V nem halmaz, hanem csak osztály. Akit azonban zavar ez a kettősség és az osztálymodell nem teljesen tisztázott fogalma, nyugodtan gondolja úgy, hogy egy „jó" nagy $\mathscr{V} = \langle V, \in \rangle$ halmazmodellben dolgozunk, minden érvelésünk ennek elemeire és (nem feltétlenül elemi) részmodelljeire vonatkoznak

(l. 1.15. Definíciót). Akármilyen modellben gondolkodunk is (osztály- vagy halmazmodell), érveléseinknek BÁRMELYIK modellben igaznak kell lennie! (Gondoljunk csak Gödel 1.13. teljességi tételére!) A továbbiakban mi mindig csak halmazmodellekkel foglalkozunk.

1.5. Definíció (Formula igazsága struktúrában):

A φ formula *igaz* az $\mathfrak{A}$ struktúrában, más szóval $\mathfrak{A}$ *modellje* φ*-nek*, ha minden $\vec{a}\in{}^{\omega}A$ kiértékelésre $\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}]=\uparrow$. Jelölése: $\mathfrak{A}\models\varphi$. □

1.6. Megjegyzés:

Világos, hogy $\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}]$ csak attól függ, milyen értéket ad $\vec{a}$ a φ szabad változóinak. (Hiszen $\mathscr{L}$ és $\mathfrak{A}$ rögzített.) Más szóval, ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ kiértékelések megegyeznek minden olyan m indexre, amelyre x_m szabad változó φ-ben, akkor

$$\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{a}]=\varphi_{\mathfrak{A}}[\vec{b}].$$

1.7. Megjegyzés:

A formulák felírásában teszünk néhány ésszerű egyszerűsítést. Például elhagyjuk a felesleges zárójeleket: pl. $(\exists x_1)(\exists x_2)((\ldots\exists x_m(\varphi)\ldots))$ helyett $\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_m\varphi$-t írunk. Továbbá a műveleti jeleket prenex alakban írjuk prefix alak helyett: pl. $+(2,3)$ helyett $2+3$-at írunk. Mint az 1.1. Definíció végén, bevezetjük a $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, &, $\bigvee$ rövidítéseket. Végül, a jelek között precedencia (elsőbbség) rögzítésével további zárójeleket takaríthatunk meg: (pl.

$$[[(x+(3\cdot z))\geqq y]\ \&\ (x\in z)]\Rightarrow(x\neq y)$$

helyett egyszerűen $x+3z\geqq y\,\&\,x\in z\Rightarrow x\neq y$-t írunk. □

A továbbiakban lássuk a szintaktikai és szemantikai következmény fogalmát, vagyis, hogy egy állítás mikor következik „logikai úton", és mikor következik „a valóságban" más állítások egy rendszeréből, pl. egy axiómarendszerből.

1.8. Definíció:

Legyen $\Gamma\subset F(\mathscr{L})$ az $\mathscr{L}$ nyelv formuláinak egy halmaza

a) Az $\mathfrak{A}\langle\tau',\tau''\rangle$ típusú struktúra *modellje* Γ*-nak*, jelben

$$\mathfrak{A}\models\Gamma,$$

ha minden Γ minden φ elemére $\mathfrak{A}\models\varphi$.

b) Legyen $\psi\in F(\mathscr{L})$. Azt mondjuk, hogy ψ a Γ-nak *(szemantikai) következménye*, ha Γ minden $\langle\tau',\tau''\rangle$ típusú modelljében ψ is igaz. Jelölésben

$$\Gamma\models\psi.$$ □

A szintaktikus (nyelvtani) következmény fogalmát néhány definícióval készítjük elő.

1.9. Definíció:

Ha k egy kifejezés és φ egy formula, akkor

$$\varphi_{x_m}[k]$$

az a formula, amit úgy, kapunk, hogy hogy az x_m változó φ-beli összes szabad előfordulásai helyébe helyettesítjük (beírjuk) a k kifejezést. Más szóval, a formulák induktív felépítését követve (prímformulákra értelem szerint)

$$(\neg\varphi)_{x_m}[k] = \neg(\varphi_{x_m}[k]),$$

$$(\varphi \vee \psi)_{x_m}[k] = (\varphi_{x_m}[k]) \vee (\psi_{x_m}[k]),$$

$$((\exists x_n)\psi)_{x_m}[k] = \begin{cases} (\exists x_n)(\varphi_{x_m}[k]), & \text{ha} \quad n \neq m, \\ (\exists x_n)\psi, & \text{ha} \quad n = m. \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy a $\varphi_{x_m}[k]$ helyettesítés *megengedett*, ha a helyettesítés során k egyetlen szabad változója sem válik lekötötté a $\varphi_{x_m}[k]$ formulában, valamely, a φ formulában szereplő „hatása" folytán. □

Például a

$$\varphi(x) = \text{„}(\exists y)(x = y \ \& \ z > y)\text{"}$$

formulában nem megengedett a

$$\varphi_x[y+1]$$

helyettesítés (hiszen a „helyettesítés" után a formula $\varphi_x[y+1] = \text{„}(\exists y)(y+1 = = y \& z > y)\text{"}$ lenne, ami nyilvánvalóan hamis)! Azt mondjuk, hogy ψ *részformulája* φ-nek, ha — szemléletesen — φ felírásában ψ szerepel, egybefüggően. A precíz definíciótól (ami ismét a formulák induktív felépítése alapján történik) most eltekintünk.

Megszokott (matematikai) következtetéseink során az elfogadott Γ axiómarendszer mellett még logikai „alapigazságokat", és a megengedett logikai következtetési szabályokat is felhasználjuk.

1.10. Definíció (Logikai axiómák vagy tautológiák, l. pl. [3, 4.1]):

a) $(\neg\varphi) \vee \varphi$ *(állítás axióma)*,

b) Ha k kifejezés és a $\varphi_{x_m}[k]$ helyettesítés megengedett, $(m < \omega)$, akkor

$$\varphi_{x_m}[k] \Rightarrow (\exists x_m)\varphi(x_m) \quad \textit{(helyettesítés axióma)},$$

c) $x_n = x_n \quad (n < \omega)$ *(egyenlőség axióma)*,

d) $\xi \in \delta'$, $\eta \in \delta''$, $\tau'(\xi) = n$, $\tau''(\eta) = m$ esetén

$$(x_{i_0} = y_{i_0} \ \& \dots \& \ x_{i_{n-1}} = y_{i_{n-1}}) \Rightarrow g_\xi(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}) = g_\xi(y_{i_0}, \dots, y_{i_{n-1}})$$

és az

$$(x_{i_0} = y_{i_0} \ \& \dots \& \ x_{i_{m-1}} = y_{i_{m-1}}) \Rightarrow P_\eta(x_{i_0}, \dots, x_{i_{m-1}}) = P_\eta(y_{i_0}, \dots, y_{i_{m-1}})$$

formulák *(identitás axiómák)*. □

Pontosabban a fenti formulák (axiómák) minden szabad x_i, y_j változóját $(\forall x_i)$, $(\forall y_j)$ kvantorokkal kell lezárnunk. Továbbá helyesebb lenne a fenti axiómákat *axiómasémák*nak neveznünk, hiszen a bennük szereplő kifejezések, relációk és formulák helyére a nyelv összes lehetséges kifejezését, relációját, formuláját behelyettesíthetjük, és az így kapott végtelen sok axiómát kell tekintenünk.

1.11. Definíció (A következtetési szabályok, l. pl. [3, 4.9] előtt):

Legyenek φ, ψ, ϑ formulák. Akkor

a) $\langle\varphi|\varphi\vee\psi\rangle$ *(kiterjesztési szabály),*

b) $\langle\varphi\vee\varphi|\varphi\rangle$ *(összevonási szabály),*

c) $\langle(\varphi\vee\psi)\vee\vartheta|\varphi\vee(\psi\vee\vartheta)\rangle$ *(asszociativitási szabály),*

d) $\langle\varphi\vee\psi,\ \neg\varphi\vee\vartheta|\psi\vee\vartheta\rangle$ *(levágási szabály),*

e) Ha x_m szabad változója ψ-nek, akkor

$$\langle\varphi\Rightarrow\psi|(\exists x_m)\varphi\Rightarrow\psi\rangle. \quad \textit{(kvantorbevezetési szabályok).} \qquad \square$$

A fenti szabályok $\langle\pi|\varrho\rangle$ alakú formula-párok $(\pi, \varrho\in F(\mathscr{L}))$. Ezek úgy értendők, hogy ha π (premissza) már előzőleg bizonyított (vagy a feltételezett Γ axiómarendszer eleme), akkor ϱ (konklúzió) is következik. Mint könnyen látható, a logikai axiómák és a következtetési szabályok minden, az $\mathscr{L}$ nyelv típusának megfelelő $\mathfrak{A}$ struktúrán teljesülnek. Bár szerkezetük nagyon egyszerű, mint nemsokára látni fogjuk (1.13. Tétel), mégis elegendőek: segítségükkel a megszokott következtetések, érvelések mind elvégezhetők.

1.12. Definíció (Szintaktikai következmény):

Legyen Γ egy formulahalmaz, φ és φ_j $(j<m)$ legyenek $\mathscr{L}$ tetszőleges formulái $(m<\omega)$. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle\varphi_j\colon j<m\rangle$$

formulasorozat *φ egy bizonyítása a Γ axiómarendszerben,* ha $\varphi_{m-1}=\varphi$ és minden $j<m-1$ esetén az alábbi négy feltétel közül legalább az egyik igaz:

a) φ_j logikai axióma,

b) $\varphi_j\in\Gamma$,

c) van olyan $k<j$, hogy $\langle\varphi_k|\varphi_j\rangle$ következtetési szabály,

d) van olyan $k, n<j$, hogy $\langle\varphi_k, \varphi_n|\varphi_j\rangle$ következtetési szabály.

Azt mondjuk, hogy *φ bizonyítható Γ-ból,* ha van bizonyítása Γ-ból. Jelölése:

$$\Gamma\vdash\varphi. \qquad \square$$

Megemlítjük, hogy a matematika eddig megszokott érvelései is a fenti definíció szellemében készültek, legfeljebb nem ennyire aprólékosan. Pontosabban, Hilbert és még jónéhány matematikus a halmazelmélet, a geometria, stb. legtöbb tételéről sokéves munkával megmutatta, hogy valóban levezethetők a halmazelmélet, ill. a geometria axiómarendszeréből, csupán a fenti szabályok alkalmazásával.

A továbbiakban számunkra lényeges lesz a következmény szintaktikai és szemantikai fogalmának kapcsolata. Nagyon egyszerűen belátható, hogy ha $\Gamma \vdash \varphi$, akkor $\Gamma \models \varphi$, tehát ha φ (szintaktikai) tétel a Γ axiómarendszerben, akkor igaz is Γ-ban. (Vagyis, ha φ levezethető Γ-ból a szabályok betartásával, akkor igaz is Γ minden modelljében.) Ennek megfordítása is teljesül, tehát az igaz állításokat be is lehet bizonyítani:

1.13. Tétel (Gödel teljességi tétele, 1930) ([3, 4.9]):

Ha Γ axiómarendszer (azaz formulahalmaz) és φ egy formula, akkor $\Gamma \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash \varphi$. □

A tétel szerint tehát, ha Γ minden halmazmodelljében φ igaz (azaz $\Gamma \models \varphi$), akkor található φ-nek Γ-ból egy formális bizonyítása is. Ez talán meggyőzi azokat, akik kételkednek a levezetési szabályok „erősségében". No persze, mindennapi matematikai érveléseinket nem bontjuk le az 1.10—1.12. pontokban leírt elemi lépésekre, de az Olvasó elhiheti (vagy utánajárhat), hogy ez mindig megtehető.

1.14. Megjegyzés:

Definíció szerint $\Gamma \models \varphi$ azt jelenti, hogy Γ minden $\mathfrak{A}$ modelljében φ is igaz, azaz $\mathfrak{A} \models \varphi$, ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Ennél gyengébb állítás az, hogy *van* Γ-nak egy olyan modellje, melyben φ igaz, ezt úgy is mondják, hogy *a φ állítás Γ-val konzisztens.* Gödel fenti tétele szerint ez ekvivalens azzal, hogy $\Gamma \nvdash \neg\varphi$, azaz φ biztosan nem cáfolható Γ-ban. Ha olyan Γ-modell is van, amelyben $\neg\varphi$ igaz, azaz $\neg\varphi$ is konzisztens Γ-val, akkor φ sem bizonyítható Γ-ban. Ilyenkor azt mondjuk, hogy φ *független* a Γ axiómarendszertől. □

A következőkben felsorolunk néhány modellelméleti alapfogalmat.

1.15. Definíció [19, 5.2]:

Legyenek $\mathfrak{A} = \langle A, \langle f_\xi^A : \xi \in \delta' \rangle, \langle r_\eta^A : \eta \in \delta'' \rangle \rangle$ és $\mathfrak{B} = \langle B, \langle f_\xi^B : \xi \in \delta' \rangle, \langle r_\eta^B : \eta \in \delta'' \rangle \rangle$ $\langle \tau', \tau'' \rangle$ típusú struktúrák.

a) $\mathfrak{A}$ *részstruktúrája* $\mathfrak{B}$-nek, jelben $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, ha $A \subseteq B$ és $\xi \in \delta'$, $\eta \in \delta''$ esetén

$$f_\xi^A = f_\xi^B \restriction {}^{\tau'(\xi)}A, \quad r_\eta^A = r^B \cap {}^{\tau''(\eta)}B.$$

b) Legyen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Az $\mathfrak{A}$ *elemi része* $\mathfrak{B}$-nek, jelben

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B},$$

ha tetszőleges φ formulára és $\vec{a} \in {}^{\omega}A$ kiértékelésre

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{a}].$$

c) Az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ struktúrák *elemien ekvivalensek*, ha bármely zárt $\varphi \in F(\mathscr{L})$ formulára

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Jele:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}.$$

d) Az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúra izomorf, ha van olyan

$$h\colon A \to B$$

bijekció, hogy bármely $\xi\in\delta'$, $\eta\in\delta''$ és $\bar{a}\in{}^{\omega}A$ esetén

$$h\big(f_\xi^A(a_0, \dots, a_{n-1})\big) = f^B\big(h(a_0), \dots h(a_{n-1})\big)$$

és

$$r_\eta^A(a_0, \dots, a_{m-1}) \Leftrightarrow r_\eta^B\big(h(a_0), \dots, h(a_{m-1})\big)$$

(feltettük, hogy $\tau'(\xi)=n$, $\tau''(\eta)=m$). Jelölése:

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}. \qquad \square$$

Megjegyezzük, hogy c)-ben elég zárt formulákra szorítkoznunk, hiszen $\mathfrak{A}\models\varphi$-t éppen a

$$\mathfrak{A} \models (\forall x_{i_0})(\forall x_{i_1}), \dots, (\forall x_{i_n})\varphi$$

formula segítségével definiáltuk, ahol $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ éppen φ szabad változói.

Nem minden részstruktúra elemi részmodell. A kiértékelési eljárást átgondolva világos, hogy az elemi rész(modell) tulajdonság a következőt jelenti: bármely $(\exists x_m)(\varphi)$ alakú formulához, ha van olyan $b\in\mathfrak{B}$, amelyre $\mathfrak{B}\models\varphi_{\mathfrak{B}}[\bar{a}(a_m|b)]$, akkor van olyan $a'\in A$ is, hogy $\mathfrak{A}\models\varphi_{\mathfrak{A}}[\bar{a}(a_m|a')]$. Nyilvánvalóan $(\omega, <)$ tetszőleges (véges) kezdőszelete részstruktúrája $(\omega, <)$-nek, de nem elemi része. (Véges struktúrákat izomorfia erejéig egyértelműen le lehet írni formulákkal.)

A definíciókból közvetlenül ugyan nem következik, de könnyen belátható, hogy izomorf modellek elemien ekvivalensek is. Hogy az elemi ekvivalencia gyengébb az izomorfiánál, az a

$$\langle \mathbf{Q}, <\rangle \sim \langle \mathbf{R}, <\rangle \quad \text{és} \quad \langle \mathbf{Q}, <\rangle \not\cong \langle \mathbf{R}, <\rangle$$

példából látható. Ennél több is igaz: bármely két sűrűn rendezett halmaz elemien ekvivalens. Sőt. pl. $\mathbf{R}$ és $\mathbf{Q}\times\omega_1$ ($\mathbf{Q}$-t ω_1-szer egymás után téve, ahol ω_1 a legkisebb, nem megszámlálható rendszám) oly sűrűn rendezett halmazok, melyek egyike sem elemien ekvivalens a másik egyetlen részhalmazával sem! Azonban az elemi részből következik az elemi ekvivalencia. Ennek belátásához mindössze elegendő az elemi rész definícióját zárt formulákra végigondolni.

Mint a bevezetőben már említettük, formulákkal definiált objektumokkal kívánunk foglalkozni. Ehhez azonban meg kell vizsgálnunk, hogy különböző modellekben a formulák mennyire viselkednek másként. Az alkalmazott módszer (forszolás) elemi részmodelleket használ, sőt ún. standard (tranzitív megszámlálható, l. a következő definícióban) modelleket használ. Erre azért van szükség, mert tetszőleges $\mathfrak{A}\prec\mathfrak{B}$ részmodellek esetén $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$, ezek elemeinek, illetve az alaphalmazok elemei elemeinek kapcsolatáról semmit sem tudunk: például $x\in a\in A$ esetén $a\in B$ ugyan, de x nem feltétlenül eleme B-nek. (Ne felejtsük el, hogy mi a halmazelmélet nyelvét akarjuk használni, ami mindössze két relációjelet tartalmaz: $=$ és $\in$.)

Az alábbi definícióban szükségünk lesz a különböző modellekben érvényes „eleme" reláció megfelelőjére. Mivel mi halmazokkal, halmazmodellekkel foglalkozunk, amelynek elemei is halmazok, rendelkezésünkre áll egy (természetes, az ún.

„világbeli") „eleme" reláció, amelyet a továbbiakban $\in^V$ vagy $\in$-vel jelölünk. Ha pedig egy $\mathfrak{A}=\langle A, E, \ldots\rangle$ struktúrában dolgozunk, rendszerint E jelöli az A elemei között értelmezett, $\mathfrak{A}$-beli „eleme" relációt, melyre időnként az $\in^A$ vagy $\in^{\mathfrak{A}}$ jelet használjuk.

1.16. Definíció (l. pl. [4, § 1 és 0.3]):

(a) Egy struktúra *megszámlálható,* ha alaphalmaza megszámlálható.

(b) Egy $\mathfrak{A}=\langle A, E, \ldots\rangle$ struktúra *tranzitív,* ha tetszőleges $a\in A$ és $x\in a$ esetén $x\in A$. (Azaz $a\subset A$.)

(c) Az $\mathfrak{A}=\langle A, E, \ldots\rangle$ struktúra $\in$*-modell,* ha tetszőleges $a, b\in\mathfrak{A}$ esetén

$$\mathfrak{A}\models \text{„}a\in b\text{"} \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad a\in b.$$

(Azaz $E={\in}\cap(A\times A)$.)

(d) A $\varphi\in F(\mathscr{L})$ formula *felfelé abszolút,* ha tetszőleges tranzitív $\in$-modell esetén $\mathfrak{A}\models\varphi$-ből $\mathscr{V}\models\varphi$ következik; *lefelé abszolút,* ha $\mathscr{V}\models\varphi$-ből $\mathfrak{A}\models\varphi$ következik; és *abszolút,* ha $\mathfrak{A}\models\varphi$ és $\mathscr{V}\models\varphi$ ekvivalensek.

(e) Tetszőleges Γ elmélet (formulahalmaz) esetén φ *Γ-abszolút,* ha (d)-ben csak Γ modelljeire szorítkozunk, azaz $\mathfrak{A}\models\Gamma$, $\mathfrak{B}\models\Gamma$ és φ helyett $\mathfrak{B}\models\varphi$ áll. □

Megjegyezzük, hogy (c)-ben $\mathscr{V}=\langle V, \in\rangle$ helyett tetszőleges $\mathfrak{B}\supseteqq\mathfrak{A}$ tranzitív struktúrát is írhattunk volna.

(d) és (e)-ben jelzett V az ún. „világmodell', az összes halmaz osztálya. (L. az 1.5. Definíció előtt.) Így $\mathscr{V}\models\varphi$ helyett nyugodtan írhatunk egyszerűen φ-t. (Mint például $\mathscr{V}\models a\in b$ helyett eddig is csak $a\in b$-t írtunk.)

Jelölje ZFC a halmazelmélet Zermelo—Fraenkel-féle (standard) axiómarendszerét a kiválasztási axiómával együtt (AC=Axiom of Choice). (L. pl. [8], [9], [10], [12], [14], [16], [19]-ben.)

A leszálló Löwenheim—Skolem-tétel (1.23. Tétel) szerint, ha ZFC-nek van modellje, akkor megszámlálható modellje is van. Továbbá Mostowski (l. 1.19. Tétel) szerint a (kívülről nézve) jólfundált modellek izomorfak egy tranzitív modellel. (A jólfundált modellek fogalmát az 1.18. Definícióban ismertetjük.) Vegyük észre azonban, hogy mindezekből nem következik, egy ZFC-modell létezéséből sem, hogy ZFC-nek lenne megszámlálható tranzitív (ún. standard) modellje!

A következő definícióban azt írjuk le, hogy mely objektumokat, tulajdonságokat, stb. tudunk formulákkal egyértelműen definiálni. Erre többek között a „konstruálhatóság" leírásánál lesz szükségünk.

1.17. Definíció [19, 4.6]:

Legyen $\mathscr{L}=\mathscr{L}\langle\tau', \tau''\rangle$ tetszőleges nyelv, $\Gamma\subset F(\mathscr{L})$ formulahalmaz és $\mathfrak{A}$ tetszőleges $\langle\tau', \tau''\rangle$ típusú struktúra.

a) A φ formula *egyértelműen definiál Γ-ban* (vagy más szavakkal *Γ felett*) egy elemet (objektumot, konstanst, stb.), ha

$$\Gamma\vdash(\exists x)\varphi(x) \;\&\; (\forall x\forall y)[\varphi(x) \;\&\; \varphi(y)\Rightarrow x=y].$$

Erre a rövidebb

$$\Gamma \vdash (\exists ! x)\varphi(x)$$

jelölést szoktuk használni.

b) Ha a fent definiált elemnek az $\mathscr{L}$ nyelvben van neve, a c konstans (vagy konzervatív bővítéssel adjuk az $\mathscr{L}$ nyelvhez — l. pl. [9]-ben), akkor *c-t φ egyértelműen definiálja Γ felett,* ha

$$\Gamma \vdash (\exists ! x)\varphi(x) \ \& \ \varphi(c).$$

c) A φ formula *Γ-ban egyértelműen definiál egy függvényt* (operációt), ha

$$(*) \qquad \Gamma \vdash (\forall x_0)\ldots(\forall x_{n-1})[(\exists ! y)\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y)].$$

d) Ha a fent definiált függvénynek (operációnak) az $\mathscr{L}$ nyelvben van neve, $f \in \mathscr{L}$ (vagy konzervatív bővítéssel kerül $\mathscr{L}$-be), akkor f-et *φ Γ-ban egyértelműen definiálja,* ha $(*)$ mellett még az alábbi is teljesül:

$$\Gamma \vdash (\forall x_0)\ldots(\forall x_{n-1})(\forall y)[\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \Leftrightarrow y = f(x_0, \ldots, x_{n-1})].$$

e) A φ formula *Γ-ban (egyértelműen) definiálja a* nyelv *R relációját* (tulajdonságát), ha

$$\Gamma \vdash (\forall x_0)\ldots(\forall x_{n-1})[\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \Leftrightarrow R(x_0, \ldots, x_{n-1})].$$

f) A φ formula *egyértelműen definiálja* $\mathfrak{A}$ *felett a* $c \in A$ konstanst (az $f\colon {}^nA \to A$, $f \in \mathfrak{A}$ függvényt, vagy az $R \subset {}^nA$, $R \in \mathfrak{A}$ relációt), ha a fenti a)—e) pontokban „$\Gamma \vdash$" helyett „$\mathfrak{A} \models$" írható.

g) Egy elem, függvény vagy reláció Γ-abszolút, ha az őt definiáló formula abszolút a Γ axiómarendszer tetszőleges struktúrája felett. □

Az egy szabad változóval rendelkező formulákat úgy is tekinthetjük, hogy bizonyos *tulajdonságú* elemeket írnak le az $\mathscr{L}$ nyelven. Azaz φ egyváltozós R relációt definiál Γ-ban (Γ felett) — akár benne van R az $\mathscr{L}$ nyelvben, akár nem. Az R (konzervatív) bővítéssel került $\mathscr{L}$-be, ha $R \notin \mathscr{L}$ és

$$\emptyset \vdash (\forall x)\big(\varphi(x) \Leftrightarrow R(x)\big).$$

Ekkor, adott $\mathfrak{A}$ struktúra esetén

$$R^{\mathfrak{A}} := \{\bar{x} \in A\colon \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{x})\}.$$

Ez (A-t kívülről nézve) nyilván A egy részhalmaza, mely azonban nem feltétlenül eleme A-nak (A-t ismét kívülről nézve). A elemeiről (amik természetesen az általunk megszokott, „külső" eleme reláció szerint elemei A-nak) tudunk beszélni A-ban, sőt azokat nevezzük A-ban halmazoknak. Így R nem feltétlenül halmaz A-ban, de mindenesetre osztály A-ban, hiszen formulával definiált (az osztályok részletesebb leírását l. pl. [9], [10]-ben). Mindezek alapján könnyen definiálhatnánk egy osztály/tulajdonság abszolútságát.

Adott $\Gamma \subset F(\mathscr{L})$ elmélet (formulahalmaz, axiómarendszer) esetén a „Γ felett abszolút", „Γ-ban abszolút" elnevezések helyett a rövidebb „Γ-abszolút" kifejezést használjuk. Ha φ egy tetszőleges formula és $\mathfrak{A}$ egy struktúra, φ-nek $\mathfrak{A}$-beli igazságértékét, vagy az általa definiált objektumot általában $\varphi^{\mathfrak{A}}$-val jelöljük.

Mint láttuk, tranzitív ZFC-modellek létezése körülbelül olyan erős plusz feltételezés, mint hogy ZFC-nek létezik modellje. Azonban, ha 1.16. (d)-ben tetszőleges modellekre kívánjuk meg a feltétel teljesülését, akkor A. Tarski egy tétele szerint csak az univerzális ($\forall$) kvantorokat tartalmazó formulák elégítik ki, illetve a velük Γ szerint ekvivalens formulák. (Két formula Γ szerint ekvivalens, ha $\Gamma \vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$.)

Vegyük észre, hogy ha φ egyértelműen definiálja az R tulajdonságot, és φ abszolút, akkor tetszőleges $\mathfrak{A}=\langle A, \ldots\rangle$ tranzitív modellre

$$R^A = R \cap A.$$

Lássunk most néhány ZFC-abszolút konstanst, operációt, illetve tulajdonságot, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

$y = \bigcup x$ (x elemeinek uniója),

$z = x \cap y, \quad z = x \cup y, \quad z = \{x, y\}, \quad z = \langle x, y\rangle$ (rendezett pár),

$z = x \times y$ (Descartes-szorzat), „f függvény", „f injektív", $z = \mathrm{Dom}(f)$, $z = \mathrm{Ran}(f)$, „f bijekció", „x tranzitív halmaz", $\emptyset$ (üres halmaz);

— ω (a természetes számok halmaza) — hiszen legyen

$$\psi(z) = „\emptyset \in z \;\&\; (\forall x)(x \in z \Rightarrow x \cup \{x\} \in z)",$$

majd

$$\varphi(z) = \psi(z) \;\&\; „(\forall x)(\psi(x) \Rightarrow z \subseteq x)"$$

és könnyen láthatóan φ egyértelműen definiálja ω-t (l. még a 3. fejezetben adott Φ_0 formulát):

— $\mathcal{O}n$ (a rendszámok osztálya, l. [9], [10]-ben), mert: $\alpha \in \mathcal{O}n$ (α rendszám), ha az $(\alpha, \in)$ struktúra tranzitív és jólrendezett — hiszen

$$\varphi(x) = „\langle x, \in\rangle \text{ lineáris rendezés}$$
$$\& (\neg \exists f)[f\colon \omega \to x \text{ függvény } \& \; (\forall i < \omega)\, f(i+1) \in f(i)]"$$

és $\alpha \in \mathcal{O}n$ (azaz α rendszám) ekvivalens $\varphi(\alpha)$-val.

Továbbá minden Δ_0 formula (csak korlátos kvantorokat, vagyis $(\forall x \in a)$, $(\exists x \in a)$ alakú kvantorokat tartalmazó formulák, ahol a paraméter, vagy x-től különböző változó) szintén abszolút. (L. pl. [4], [9], [10], [12] vagy [14]-ben). Az előbb említett tulajdonságok és elemek mind leírhatók Δ_0 formulákkal. (L. még a 3.5. Állítás előtt leírt állítást, és a Levy-hierarchia definícióját 4.16-ban.)

A továbbiakban egy modellt, ha nem okozunk vele félreértést, ugyanazzal a betűvel jelöljük, mint az alaphalmazát, pl. A-t írunk $\mathfrak{A}$ helyett. Ha egy φ formula egyértelműen definál egy objektumot, mondjuk a valós számok halmazát, akkor az $\mathfrak{A}$ modellben így meghatározott elemet $\mathbf{R}^{\mathfrak{A}}$-val vagy $\mathbf{R}^A$-val jelöljük: ez különböző modellekben más és más lehet! Továbbá tetszőleges ψ formula igazságértéke függ a modelltől, a ψ $\mathfrak{A}$-beli igazságértékét $\psi^{\mathfrak{A}}$-val jelöljük. Ha N, M két modell, akkor „N-ben gondolkodni" annyit jelent, hogy a formulák, ill. konstansok N-beli kiértékelésére gondolunk. A 3. és 4. részben, sokszor fogunk egyik modellből a másikba „ugrálni". (Pontosabban: csak megszámlálható tranzitív ZFC-modelleket használunk.)

A mi világunkban, V-ben van egy $\in^V$ reláció halmazok és elemeik között. Ha azonban $\mathfrak{A} = \langle A, \in^{\mathfrak{A}}\rangle$ egy olyan struktúra, melynek típusa megegyezik a halmazelmélet nyelvének típusával, akkor a modellbeli $\in^{\mathfrak{A}}$ reláció nem feltétlenül esik egybe az $\mathfrak{A}$ modell A alaphalmaza elemei közötti „valódi" $\in^V$ relációval. Számunkra azonban hasznosak lesznek a „jó" modellek is, a lehető legjobban hasonlítanak V-re, és részmodelljeik is hasonlítanak (a bennük definiálható objektumokat tekintve) az eredeti modellre.

1.18. Definíció [4]:

Legyen az $\mathfrak{A}$ struktúra típusa ugyanaz, mint a halmazelmélet nyelvének típusa. Akkor az $\mathfrak{A}=\langle A, E\rangle$ struktúra *jólfundált*, ha E kétváltozós reláció A-n és nincs olyan $\bar{a}\in{}^{\omega}A$, melyre minden $n\in\omega$ esetén $\mathfrak{A}\models$„$a_{n+1}Ea_n$" teljesülne. □

Vegyük észre, hogy $\bar{a}$ legtöbbször nem eleme A-nak. Ennek megfelelően beszélhetünk „belülről" (csak A-beli sorozat létezését tiltanánk meg) és „kívülről" (ez erősebb feltétel) jólfundált struktúrákról. Ha csak jólfundáltat említünk, kívülről jólfundált struktúrákra gondolunk.

Nevezetes a következő

1.19. Tétel (Mostowski ún. „suvasztási" tétele, l. pl. [12], [14]):

Minden jólfundált $\in$-modell izomorf egy tranzitív modellel. □

1.20. Megjegyzés:

A hatványhalmaz — operáció nem abszolút. (Nyilván $z=P(x)$ pontosan akkor, ha $\varphi(x,z)$, ahol

$$\varphi(x,y) = „\forall y\ (y\subseteqq x \Leftrightarrow y\in z)"$$

és tetszőleges $\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{B}$ tranzitív $\in$-modellek esetén $P^{\mathfrak{A}}(x)=P^{\mathfrak{B}}(x)\cap A$ minden $x\in A$-ra.) Sőt, ha pl. $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ elemei A-nak, az $\langle a_n\colon n\in\omega\rangle$ sorozat (mint egy $\omega\to A$ függvény) nem feltétlenül eleme A-nak. Hiszen, ha pl. $A\supset\omega$ egy kívülről nézve) megszámlálható ZFC-modell (l. később a Löwenheim—Skolem-tételeket), akkor nyilván van olyan természetes számokból álló sorozat, ami nincs A-ban, hiszen ${}^{\omega}A$ nagyobb számosságú, mint A. Vagyis a jólfundáltságot nem elég „belülről" definiálni (tehát csak azon $\bar{a}\in{}^{\omega}A$ sorozatokra szorítkozni, amik maguk is A-ban vannak). □

1.21. Definíció:

a) A Γ axiómarendszer *ellentmondástalan*, ha nincs olyan φ formula, hogy

$$\Gamma\vdash\varphi \quad \text{és} \quad \Gamma\vdash\neg\varphi.$$

b) Γ *konzisztens*, ha van modellje, azaz olyan struktúra, hogy

$$\mathfrak{A}\models\Gamma.$$

c) Legyen H tetszőleges halmaz és jelölje

$${}^{\omega\geqq}H \quad \text{ill.} \quad {}^{\omega>}H$$

a H elemeiből képezhető összes véges vagy végtelen, illetve az összes véges sorozatok halmazát. □

A következő tételben néhány fontos modellelméleti eredményt gyűjtöttünk egy csokorba.

1.22. Tétel [3, 4.2], [19, 5.3]:

a) Ha $\Gamma \subset F(\mathscr{L})$, $\varphi \in F(\mathscr{L})$ és $\Gamma \models \varphi$, akkor van olyan $\Gamma' \subseteqq \Gamma$ véges axiómarendszer, hogy $\Gamma' \models \varphi$.
b) Γ ellentmondástalan pontosan akkor, ha konzisztens.

c) **(Gödel kompaktsági tétele):**

Ha Γ minden véges részének van modellje, akkor Γ-nak magának is van modellje.
d) Γ pontosan akkor ellentmondástalan, ha minden véges része ellentmondástalan.

e) **(Felszálló Löwenheim—Skolem-tétel):**

Ha minden $n \in \omega$-ra van Γ-nak $\geqq n$ elemű modellje, (azaz olyan $\mathfrak{A}$, hogy $\mathfrak{A} \models \Gamma$ és $|A| \geqq n$), akkor van tetszőlegesen nagy számosságú modellje is. □

Megjegyezzük, hogy b) könnyen levezethető Gödel 1.13. teljességi tételéből.
a) lényege az, hogy Γ akármekkora axiómarendszer, egy tetszőleges φ állítás bizonyításához Γ-nak legfeljebb véges sok elemét használjuk fel (hiszen bizonyításunk is véges sok lépésből áll, és minden lépésben legfeljebb kettő axiómát használhatunk fel Γ-ból).
Amennyiben az $\mathscr{L}$ nyelv nem megszámlálható (sok függvény-, konstans-, reláció-, tulajdonságjelet tartalmaz), akkor az e)-ben állított modellről csak annyit tudunk biztosan mondani, hogy számossága akármilyen nagy, de legalább annyi, mint $\mathscr{L}$ számossága.
Bizonyítsuk be most e)-t c)-ből, hogy megismerjük a nyelv konstansokkal való bővítésének módszerét. Legyen $\varkappa$ tetszőleges számosság és az $\mathscr{L}$ nyelvhez vegyünk hozzá $\varkappa$ darab 0-változós függvényt (azaz konstanst), legyenek ezek c_γ $(\gamma \in \varkappa)$. Álljon Γ_1 az összes $\neg(c_\gamma = c_\delta)$ alakú formulából, ahol $\gamma \neq \delta$, $\gamma, \delta \in \varkappa$. Akkor a $\Gamma \cup \Gamma_1$ rendszer véges részeinek van modellje, így c) szerint van olyan $\mathfrak{A}$, hogy $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \Gamma_1$, akkor viszont $|A| \geqq \varkappa$. □

(A bővítésről könnyen belátható, hogy „konzervatív": durván szólva nincsenek „lényegében" új formulák és nem lehet új formulákat bizonyítani (l. pl. [9] Függelékét).) Így pl. a természetes számoknak nincs olyan axiómarendszere, amit csak megszámlálható struktúrák reprezentálhatnak.
Az e) tétel „párja" a következő

1.23. Tétel (Leszálló Löwenheim—Skolem-tétel [19, 5.3]):

Ha $\varkappa$ végtelen számosság, Γ-nak van $\varkappa$ számosságú modellje és ha $\lambda < \varkappa$ is végtelen számosság (és $\mathscr{L}$ legfeljebb λ számosságú), akkor Γ-nak van λ számosságú modellje is. □

Például, ha egy (véges vagy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen) axiómarendszer ellentmondástalan (azaz modellezhető), sőt végtelen modellje is van, akkor legfeljebb megszámlálhatóan végtelen modellje is van. Más kérdés, hogy egy ilyen modellben „belülről" általában nem tudjuk az összes elemet felsorolni, egy ilyen sorozat nem eleme a modellnek.
Végül említsük meg a konstruálhatóság fogalmát. Nagyon durván szólva egy halmaz akkor konstruálható, ha formulával leírható. (Pontosabban, ez egybeesik a

definiálhatóság 1.17-ben leírt definíciójával. A konstruálható halmazok fogalmát nemsokára pontosabban fogjuk definiálni.) Ismeretes, hogy ha ZFC-nek van modellje, akkor olyan modellje is van, melyben minden halmaz a modellen belül konstruálható (l. 1.28. Tétel). Másrészt az ilyen modellnek megvan az a különleges tulajdonsága, hogy az alaphalmaz összes eleme formulával jól rendezhető. Emiatt például a kiválasztási axióma alkalmazása bármely bizonyításban konstruktívvá (formulával definiálhatóvá) válik, mert minden halmazból a legkisebb elemet kiválasztjuk. Ennek a tulajdonságnak dolgozatunk további részében szerepe lesz. Hiszen, mint tudjuk, a kiválasztási axióma segítségével tetszőleges Banach-téren definiálható egy nem folytonos lineáris funkcionál. A fentiek alapján ez a konstruálhatósági axióma (ún. „$V=L$") teljesülése esetén konstruktív, azaz formulával definiálható. Mivel L-ben (ez egy osztálymodell) igaz $V=L$; és így az L modellben a fentiek alapján igaz a következő: Létezik formulával definiálható végtelen dimenziós Banach-tér és rajta egy formulával definiálható lineáris funkcionál, amely *nem* folytonos.

Vagyis, a bevezetésben vázolt ún. „Banach-elv" már rögtön nem igaz. Így, az 1.14. Megjegyzés alapján már csak abban reménykedhetünk, hogy a „Banach-elv" ZFC-vel konzisztens, azaz ZFC valamely modelljében igaz. Ezt Ajtai Miklós kutatásainak felhasználásával a következő fejezetben mutatjuk meg. (Vagyis végeredményben a Banach-elv független a ZFC axiómarendszertől.)

Most azonban lássuk az L modellt ([19, 9.6])!

A konstruálhatóság egzakt leírásához előrebocsátunk egy jelölést. Ezentúl $\mathcal{O}n$ jelöli a rendszámok osztályát. (A rendszámokról bővebben [9] és [10]-ben olvashatunk. Pl. ω részhalmaza, sőt kezdőszelete $\mathcal{O}n$-nak.) Ami számunkra lényeges: $x\in\mathcal{O}n$ leírható Δ_0 formulával.

A konstruálható halmazok osztályát legegyszerűbben transzfinit indukcióval (a teljes indukció általánosítása, l. pl. [9] vagy [10]-ben) kaphatjuk meg: kiindulunk az $\emptyset$ halmazból és az α-dik lépésben ($\alpha\in\mathcal{O}n$) konstruáljuk meg L_α-t, az α-dik szintet, az eddig már „elkészített" halmazok felhasználásával. Ehhez pontosan meg kell mondanunk: hogyan használjuk fel egy halmaz elemeit újabb halmazok definiálására. (A halmazelmélet nyelvét használjuk, és így többek között minden általunk használt objektum: elem, konstans, függvény, reláció nem egyéb, mint — halmaz.)

1.24. Definíció:

a) Adott X halmaz és $\mathcal{L}$ nyelv esetén $\mathcal{L}_X$ az $\mathcal{L}$ nyelv bővítése a c_x konstansjelekkel, $(x\in X)$.

b) *Az X halmazból* egy b halmaz *konstruálható*, ha van olyan $\varphi\in F(\mathcal{L}_x)$ egyváltozós formula, amelyre

$$b=\{x\in X\colon \langle X,\in\rangle\models\varphi(x)\}.$$

c) $\mathrm{Def}(A):=\{b : b$ definiálható A valamely eleméből$\}$. □

Itt $\langle X,\in\rangle$ az X alaphalmazból és az általunk használt „természetes", „világbeli" $\in$ eleme relációból álló struktúrát jelöli.

1.25. Definíció:

Az L_α halmazokat ($\alpha \in \mathcal{O}n$) a következésképpen definiáljuk:

a) $$L_0 = \emptyset.$$

b) Ha $\alpha = \beta + 1$ rákövetkező rendszám, akkor legyen
$$L_\alpha := \mathrm{Def}(L_\beta \cup \{L_\beta\}).$$

c) Ha α limeszrendszám, akkor legyen
$$L_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta.$$

d) *A konstruálható halmazok összessége:* $L = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}n} L_\alpha$. □

A definíció alapján könnyen belátható, hogy L_α minden α rendszámra halmaz, míg L osztály, mivel $x \in L$ formulával leírható, sőt ez a formula Δ_0, és így abszolút. Továbbá
$$L_\alpha \cup \{L_\alpha\} \subseteq L_{\alpha+1} \subseteq L_\beta \subseteq L$$
minden $\alpha < \beta \in \mathcal{O}n$ esetén; L_α mindig tranzitív halmaz, és így L tranzitív osztály; valamint $L \cap \alpha = L_\alpha \cap \alpha = \alpha$ minden $\alpha \in \mathcal{O}n$ rendszámra; és végül $\mathcal{O}n \subset L$.

1.26. Definíció:

A
$$(\forall x) \quad x \in L$$
formulát *konstruálhatósági axiómá*nak nevezzük. Elterjedtebb szimbolikus jelölésmódja:
$$V = L.$$ □

Ismertek a következő eredmények:

1.27. Tétel (Gödel, 1940):

L-ben teljesülnek ZFC axiómái és a konstruálhatósági axióma ($V = L$). □

Nem mondhatjuk, hogy L modell, mert nem halmaz, ellenben osztálymodell. Ez második példánk osztálymodellre, hiszen $L \subsetneqq V$.

Eddigi jelöléseinkkel összhangban, ha M tranzitív ZFC-modell, L^M jelöli az M-ben konstruálható halmazok osztályát. (Azaz L egész fenti definícióját, amely formulával leírható, M-ben végezzük, és a kapott halmazok összességét jelöljük L^M-el.) L^M M-ben belülről nézve nem halmaz, azonban osztály, hiszen (abszolút) formulával definiálható. Az M-modellt kívülről nézve L^M azonban halmaz, hiszen M maga halmaz. Vegyük észre: ha $\mathfrak{A}$ halmazmodell és φ formula, akkor az „$\mathfrak{A} \models \varphi$", azaz „$\mathfrak{A}$ modellje φ-nek" „reláció" (a halmazmodellek osztálya és a formulák halmaza között) is leírható formulával, és értéke függ attól a modelltől, amelyben kiértékeljük. Így van értelme az $(\mathfrak{A} \models \varphi)^M$, vagy más szóval az $M \models (\mathfrak{A} \models \varphi)$ állításoknak.

1.28. Tétel:

Legyen M tranzitív $\in$-ZFC-modell. Ekkor

a) $$L^M \models \text{„ZFC } \& \ V = L\text{''},$$

b) $$L^M = L \cap M = L_{\alpha(M)}, \quad \textit{ahol} \quad \alpha(M) = M \cap \mathcal{O}n. \qquad \square$$

a) értelmében az L^M modellben is teljesül a konstruálhatósági axióma ($V=L$), azaz minden halmazt formulával lehet definiálni. (L^M halmazmodell, hiszen $L^M \subseteq M$ és M halmazmodell volt.) Könnyen láthatóan tetszőleges M modellnek tartalmaznia kell a formulákkal definiálható halmazokat, azaz $L^M \subset M$ minden modellre. („Amiről tudok beszélni, az létezik.") Konstruálhatósági axiómánk azt mondja, hogy más halmaz nincs is, azaz minden halmaz definiálható formulával („Amiről nem tudok beszélni, az nincs."). Modellekre ezt az $L^M = M$ egyenlőséggel írhatjuk le, *ha* $M=L$ vagy $M=M^L$, azaz pl. $L^L=L$. Vagyis, ha L-ben újra definiáljuk a konstruálható halmazok osztályát, akkor visszakapjuk az eredeti L osztályt. A fenti gondolatmenettel bizonyítjuk be az $L \models (V=L)$ és $L^M \models (V=L)$ tételeket.

Az 1.28. Tétel (b) része következik (nem egykönnyen) az „x konstruálható" (azaz $x \in L$) formula abszolútságából. A másik egyenlőség mindössze azt a (szemléletesen érthető) tényt fejez ki, hogy az M-beli β rendszámokra L_β^M, L-nek β-dik szintjéből M-be eső része M-ben van. („Ami M-be beleférne, vagyis benne kellene, hogy legyen, az benne is van.") Megjegyezzük, hogy $\beta < \alpha(M)$ mert $\alpha(M) \notin M$, csak $\alpha(M) \subset M$. Ez utóbbi következik a rendszámok abszolútságából (és így pl. $\mathcal{O}n \subset L$). A fentiekből az Olvasó már bizonyára rájött, hogy L, ill. L^M a lehető legkisebb modell.

1.29. Tétel:

Van egy olyan elsőrendű φ formula, amely $V=L$ esetén az univerzumot (minden halmazt) jól rendezi, azaz az

$$x <_L y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi(x, y) \ \& \ (x \neq y)$$

jelölés mellett igaz a következő:

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}V = L \Rightarrow (\forall x)(\forall y)[x <_L y \vee y <_L x \vee y = x] \ \& \ (V, <_L)$$

jól fundált teljes rendezés". $\square$

A fenti tétel segítségével a kiválasztási axióma erősebb változata igazolható: az ún. kiválasztási függvény konstruktív, azaz formulával definiálható, és így minden, a kiválasztási axiómát (és más formulával definiálható eszközöket) használó konstrukció konstruktív, azaz formulával definiálható! Ez pedig mint említettük, speciálisan a Banach-elvre is ad egy konstruktív ellenpéldát, L-ben.

A következő fejezetekben olyan modelleket keresünk, amelyekben a Banach-elvre bizonyíthatóan nincs konstruktív ellenpélda.

2. Definiálható Banach-terek

Ebben a részben ismertetjük Ajtai Miklós [1], [2]-ben megjelent néhány eredményét és néhány olyan segédállítást bizonyítunk be, amelyek lehetővé teszik ezen eredmények alkalmazását. A következő, 3. részben pedig megadjuk az analízis egy tételének logikai úton való bizonyítását, amely sémaként szolgálhat hasonló analízis-tételek belátásához.

A következő két fejezetben szokásos módon bizonyítunk, valamint az analízis néhány fogalmát írjuk le részletesen (elsőrendű) formulák segítségével. Az utolsó fejezetben elsősorban különböző modelleket vizsgálunk meg (hiszen ez a forszolás alapvető módszere).

Előrebocsátunk néhány definíciót. Legyen T egy valós számtest feletti vektortér.

A

$$|.|: T \to \mathbf{R}$$

leképezést *pszeudonormának* nevezzük, ha

a) $$|x| \geqq 0 \;\&\; |x| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0} \quad (\forall x \in T),$$

b) $$|\lambda x| \leqq |x| \quad (\forall x \in T)(\forall \lambda \in \mathbf{R},\ |\lambda| \leqq 1),$$

c) $$|x+y| \leqq |x|+|y| \quad (\forall x, y \in T);$$

félnormának (vagy *Minkowski-funkcionálnak*) nevezzük, ha

a′) $$|x| \geqq 0 \quad (\forall x \in T),$$

b′) $$|\lambda x| = |\lambda|\,|x| \quad (\forall \lambda \in \mathbf{R})(\forall x \in T),$$

és a fenti c) teljesül.

Az

$$F: T \to \mathbf{R}$$

leképezést *racionális konvex funkcionál*nak (vagy *racionális félnormának*) nevezzük, ha

a″) $$F(x) \geqq 0 \quad (\forall x \in T),$$

b″) $$F(rx) = |r|F(x) \quad (\forall x \in T)(\forall r \in \mathbf{Q}),$$

c″) $$F(x+y) \leqq F(x)+F(y) \quad (\forall x, y \in T) \quad \text{(konvexitás)}.$$ □

Érvényes a következő tétel:

2.1. Tétel (Ajtai Miklós [1], [2]):

Legyen M a ZFC egy megszámlálható tranzitív modellje. Akkor létezik egy $N \supseteq M$ tranzitív ZFC modell a következő tulajdonságokkal. Legyen $\langle T, |.|\rangle \in N$ egy teljes pszeudonormával ellátott valós vektortér, $F \in N$ egy racionális konvex funkcionál T-n és $c \in M$. Ha van olyan $\Phi(x, y, z)$ formula, melyre fennáll

$$N \models (\forall x, y)[\Phi(x, y, c) \Leftrightarrow (x = \langle T, |.|\rangle \;\&\; y = F)],$$

akkor

$$N \models \text{„}F \textit{ folytonos } T\text{-n”}.$$ □

(A szükséges halmazelméleti fogalmakat az előző részben definiáltuk.)

A tétel bizonyításából (l. [1] vagy [2]) kitűnik, hogy $|.|$ félnorma esetén is igaz marad a tétel állítása.

A tétel tehát azt állítja, hogy minden M modellnek van egy N bővítése, amelyben bármely formulával definiált $\langle T, |.|\rangle$ Banach-téren bármely formulával definiált

F funkciónál folytonos. Eszerint „konkrét" tereken „konkrétan" megadott funkcionál folytonosságát ZFC-ben nem lehet megcáfolni. (Másfelől viszont bizonyítani sem lehet ebben az általános alakjában, mint erre utaltunk az előző részben. Ha pl. teljesül a konstruálhatósági axióma, másképpen $V=L$, akkor létezik az összes halmaznak egy formulával definiált jólrendezése, és így a kiválasztási axióma is „konstruktívvá" válik, tehát formulával definiálható egy végtelen dimenziós Banach-tér és azon egy nem folytonos lineáris funkcionál.)

A 4. részben megadjuk a tétel egy lehetséges általánosítását nem metrizálható terekre (4.21. Tétel).

2.2. Következmény:

Legyenek φ_1, φ_2, ψ olyan formulák, melyek a c_1, c_2, d paraméterekből egyértelműen definiálják a $(B_1, \|.\|_1)$ és $(B_2, \|.\|_2)$ Banach-tereket és köztük egy L lineáris operátort.

Legyen

$$N \models \text{„}\varphi_1(B_1^N) \;\&\; \varphi_2(B_2^N) \;\&\; \psi(L^N)\text{"}$$

valamilyen B_1^N, B_2^N, $L^N \in N$-re (N az előző tételben szereplő modell). Akkor

$$N \models \text{„}L^N\colon B_1^N \to B_2^N \text{ folytonos"}.$$

BIZONYÍTÁS:

Végig az N modellben dolgozunk, azaz, minden objektumot, definíciót és következtetést N-ben értünk. Az

$$F\colon z \mapsto \|L^N(z)\|_2^N$$

leképezés egy racionális konvex funkcionál B_1^N-en és persze formulával definiálható, így a 2.1. Tétel alapján N-ben folytonos. Akkor pedig L konvexitása értelmében

$$x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\|_1^N \to 0 \Rightarrow F(x_n - x) \to 0 \Leftrightarrow \|L^N(x_n - x)\|_2^N. \qquad \square$$

Tekintsünk egy olyan φ formulát, amelyre (c tetszőleges paraméter):

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\exists!x, y)\varphi(x, y, c) \;\&\; (\forall x, y)[\varphi(x, y, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \text{ metrikus topologikus vektortér az } y \text{ metrikával]"}.$$

Legyenek $M \subseteq N$ tetszőleges ZFC-modellek és teljesüljön

$$M \models \varphi(x^M, \varrho^M, c) \quad \text{és} \quad N \models \varphi(x^N, \varrho^N, c)$$

valamilyen x^M, $\varrho^M \in M$, x^N, $\varrho^N \in N$ objektumokra. Vizsgáljuk meg x^M és x^N viszonyát. Mindkettő részhalmaza N-nek, de általában nem áll fenn $x^M \subset x^N$, sőt még az együtthatótestre sem igaz* $\mathbf{R}^M \subset \mathbf{R}^N$. Ugyanakkor, mint látni fogjuk a 3. részben, megadható $\mathbf{R}^M$ egy „természetes" $\eta\colon \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^N$, $\eta \in N$ injekciója $\mathbf{R}^N$-be, ami izometrikus. Az x^M tér tekinthető $\eta(\mathbf{R}^M)$ feletti vektortérnek N-ben is. N-ben azonban a ϱ^M metrika már nem feltétlenül lesz teljes, hiszen N-ben lehetnek olyan Cauchy-sorozatok, amik M-ben nincsenek benne. Vegyük az x^M tér N-beli Cauchy-sorozatait és tekintsünk kettőt ekvivalensnek, ha az elemek ϱ^M szerinti távolsága tart 0-hoz.

---

* $\mathbf{R}^M$ a valós számok halmaza M-ben, míg $\mathbf{R}^N$ N-ben.

Az ekvivalenciaosztályok $(x^M)_c$-vel jelölt halmazán kézenfekvő módon bevezethetők a vektorműveletek és a metrika: világos, hogy $(x^M)_c$ teljes metrikával topologizálható vektortér lesz $\mathbf{R}^N$ felett. A konstans sorozatok ekvivalenciaosztályaiként beágyazható x^M az $(x^M)_c$-be és a beágyazott elemek új távolsága megegyezik az eredeti elemek ϱ^M-távolságával. Mármost az x^M és x^N terek közötti kapcsolatot keresve, józan ésszel az várható, hogy x^N „legalább akkora", mint $(x^M)_c$, pontosabban, hogy létezik egy, valamilyen értelemben természetes N-beli beágyazása $(x^M)_c$-nek x^N-be. Az alábbi állítás azt mutatja, hogy ehelyett elég az x^M „természetes" beágyazhatóságát bizonyítani.

2.3. Észrevétel:

Legyen φ egy formula és tegyük fel, hogy

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\exists ! B)(\varphi(B) \ \& \ (\forall B)[\varphi(B) \Rightarrow B = \langle x, \varrho \rangle \ \&$$

$$\& \ B \textit{ teljesen metrizálható topologikus vektortér}]\text{"}.$$

Legyenek $M \subseteqq N$ rögzített ZFC-modellek és tegyük fel, hogy $M \models \varphi(B^M)$ és $N \models \varphi(B^N)$. Ha van olyan $\bar{\eta} \in N$ leképezés, hogy

$$N \models \text{„}\bar{\eta}: B^M \to B^N \textit{ lineáris izometrikus beágyazás"},$$

akkor van olyan $\eta \in N$, hogy

$$N \models \text{„}\eta: (B^M)_c \to B^N \textit{ lineáris izometrikus beágyazás"}.$$

Sőt, η az $\bar{\eta}$-ból mint paraméterből elsőrendű formulával definiálható. □

2.3. lényegében azt mondja, hogy ha egy teljes metrikus tér egy sűrű alterét izometrikusan be lehet ágyazni egy másik teljes metrikus térbe, akkor az egész tér is izometrikusan beágyazható és e beágyazás is konstruktív. Erre könnyen adható formalizált bizonyítás, amit helykímélés céljából elhagyunk.

2.4. Segédtétel (Ajtai Miklós [1]):

Legyen $\varphi(x, y)$ olyan ZFC-formula, hogy

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\exists ! x, y)\varphi(x, y) \ \& \ (\forall x, y)[\varphi(x, y) \Rightarrow$$

$$x \textit{ Banach-tér, } y \textit{ egy félnorma } x\textit{-en}]\text{"}.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan egyparaméteres $\Phi(z, c)$ ZFC-formula, hogy

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\forall c)[(\exists z)\Phi(z, c) \Rightarrow \exists ! z\Phi(z, c)]$$

Tegyük fel továbbá, hogy M, N tranzitív ZFC-modellek esetén, ha $M \subseteqq N$ és

$$M \models \varphi(X, f) \quad \text{és} \quad N \models \varphi(X', f') \ \& \ \Phi(\eta, X_c^M),$$

akkor $\eta: X_c \to X'$ lineáris izometrikus beágyazás úgy, hogy tetszőleges $x \in X$ esetén

$$f(x) = f'(\eta(x)).$$

Ekkor

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\forall x, y)[\varphi(x, y) \Rightarrow y \textit{ folytonos } x\textit{-en}]\text{"}. \quad □$$

2.5. Megjegyzés:

Mint 2.6-ban látni fogjuk, 2.4-ben nem szükséges feltenni az η beágyazás konstruktíve adott voltát, elég a létezését feltételezni.

2.6. Segédtétel:

Legyenek φ_1, φ_2, ψ formulák, amelyekre $i=1, 2$ esetén

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\exists !B)\varphi_i(B) \;\&\; (\forall B)[\varphi_i(B) \Rightarrow B = \langle x, \varrho\rangle \;\; \textit{Banach-tér}]\text{"}$$

és

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\exists ! z)\psi(z) \;\&\; (\forall B_1, B_2, z)[\varphi_1(B_1) \;\&\; \varphi_2(B_2) \;\&\; \psi(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\colon B_1 \to B_2 \;\; \textit{konvex racinális operátor}]\text{"}.$$

Tegyük fel továbbá, hogy minden tranzitív $M \subseteqq N$ ZFC-modellpárra teljesül a következő implikáció:

Ha

$$M \models \varphi_1(B_1) \;\&\; \varphi_2(B_2) \;\&\; \psi(L),$$

$$N \models \varphi_1(B_1') \;\&\; \varphi_2(B_2') \;\&\; \psi(L'),$$

akkor van olyan $\eta_1, \eta_2 \in N$, hogy $N \models$ „$\eta_i\colon (B_i)_c \to B_i'$ lineáris izometrikus beágyazás $i=1, 2$-re" és

$$\eta_2(L(x)) = L'(\eta_1(x)) \quad (\forall x \in X_1).$$

Ha a fentiek teljesülnek, akkor

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}(\forall B_1, B_2, L)[\varphi_1(B_1) \;\&\; \varphi_2(B_2) \;\&\; \psi(L) \Rightarrow L\colon B_1 \to B_2 \;\textit{folytonos}]\text{"}.$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen M egy tranzitív ZFC-modell és N a 2.1-ben megadott tulajdonságú tranzitív ZFC-modell, $M \subseteqq N$.

Legyen

$$M \models \varphi_1(B_1) \;\&\; \varphi_2(B_2) \;\&\; \psi(L),$$

$$N \models \varphi_1(B_1') \;\&\; \varphi_2(B_2') \;\&\; \psi(L'),$$

akkor a 2.2. szerint

$$N \models \text{„}L'\colon B_1' \to B_2' \text{ folytonos"}.$$

Legyen $\langle x_n\colon n \in \omega\rangle \in M$ egy X_1-beli elemekből M-ben alkotott konvergens sorozat, azaz

$$M \models \text{„}(\forall n)(x_n \in X_1) \;\&\; (\exists y \in X_1)(\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)(\forall n \in \omega)$$

$$\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_1(x_n, y) < \frac{1}{k}\right]\text{"}.$$

Az L' folytonosságát felhasználva kapjuk:

$$N \models \text{„}(\forall n)[\eta_1(x_n) \in X_1'] \;\&\; [\eta_1(y) \in X_1'] \;\&\; (\forall k \in \omega)(\exists n \in \omega)(\forall n \in \omega)$$

$$\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_1'(\eta_1(x_n), \eta_1(y)) < \frac{1}{k}\right]\text{"}$$

és

$$N \models „[L'(\eta_1(y))\in X_1'] \ \& \ (\forall k\in\omega)(\exists n_0\in\omega)(\forall n\in\omega)$$

$$\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_2'(L'(\eta_1(x_n)), L'(\eta_1(y))) < \frac{1}{k}\right]".$$

Az $\eta_2 \circ L = L' \circ \eta_1$ egyenlőség felhasználásával adódik, hogy

$$N \models „(\forall k\in\omega)(\exists n_0\in\omega)(\forall n\in\omega)\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_2'(\eta_2(L(x_n)), \eta_2(L(y))) < \frac{1}{k}\right]".$$

Mivel η_2 izometrikus, ezért

$$N \models „(\forall k\in\omega)(\exists n_0\in\omega)\left[n > n_0 \Rightarrow \varrho_2(L(x_n), L(y)) < \frac{1}{k}\right]".$$

Itt csak M-beli objektumok szerepelnek és az $\langle x_n\colon n\in\omega\rangle\in M$ sorozat tetszőleges X_1-beli sorozat volt, ezért

$$M \models „L \text{ folytonos}".$$

Látjuk tehát, hogy a bizonyítandó ZFC-tétel igaz minden tranzitív (és megszámlálható) ZFC-modellben. Mostowski tétele és a leszálló Löwenheim—Skolem-tétel értelmében (l. 1. rész) ugyanez igaz bármely ZFC-modellben, tehát valóban tétel ZFC-ben. □

3. Alkalmazások

Ebben a részben néhány közismert Banach-térről megmutatjuk, hogy teljesítik a 2.3. Észrevétel feltételeit, majd ezek felhasználásával egy analízis-tételt bizonyítunk. Ezekhez hasonlóan még számos tétel bizonyítható (l. még [1], [2]).

Az a tény, hogy az $\mathbf{R}$, a $C[0, 1]$ és az L^p terek elsőrendű formulákkal definiálhatók, eléggé közismert. Azonban szükségünk van e formulák által különböző modellekben definiált halmazok, struktúrák közötti kapcsolatokra. Először vizsgáljuk $C[0, 1]$-et.

3.0. Lépés: A természetes számok halmaza, ω elsőrendű formulával definiálható. Legyen ugyanis

$$\Phi_0(z) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} „(\exists y)[(\forall x)(x\notin y) \ \& \ y\in z] \ \& \ (\forall x)[(x\in z) \Rightarrow x\cup\{x\}\in z] \ \&$$

$$\& \ (\forall t)\big[\exists y\forall x[(x\notin y) \ \& \ y\in t] \ \& \ (\forall x)[(x\in t) \Rightarrow x\cup\{x\}\in t] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall y)[(y\in z) \Rightarrow y\in t]\big]".$$

Könnyen belátható:

$$\text{ZFC} \vdash „(\exists ! z)\,\Phi_0(z)". \qquad \square$$

Itt, mint eddig, ZFC a halmazelmélet Zermelo—Fraenkel-axiómarendszerét jelöli a kiválasztási axióma (Axiom of Choice) hozzávételével.

3.1. Lépés: ω-n a rendezés, összeadás, szorzás definíciója:
Legyen

$$\Phi_1(x, y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} „(\exists z)[\Phi_0(z) \ \& \ (x\in z) \ \& \ (y\in z)] \ \& \ (\forall t)[t\in x \Rightarrow t\in y] \ \& \ \neg(x = y)",$$

akkor $\Phi_1(x, y)$ az $x \prec y$ relációt adja meg.

$$\Phi_1'(x, y, t) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} „(\exists z)[\Phi_0(z) \ \& \ (x \in z) \ \& \ (y \in z) \ \& \ (t \in z)] \ \& \\ \& \ (\exists f)[f \text{ függvény} \ \& \ \mathrm{Dom}(f) = x \times \{0\} \cup y \times \{1\} \ \& \\ \& \ f \text{ bijektív} \ \& \ \mathrm{Ran}(f) = t]",$$

ez az „$x+y=t$" formulája. A $\Phi_1''(x, y, t)$ formulát, ami „$x \cdot y = t$" formulája, hasonlóan adhatjuk meg. Egyszerűen adódik, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash „(\exists ! R)[R \subset \omega \times \omega \ \& \ (\forall x, y \in \omega) \ R(x, y) \Leftrightarrow \Phi_1(x, y)]",$$

továbbá az alábbi képletben i helyébe '-t vagy "-t írva megkaphatjuk az $+$ és a $\cdot$ műveletét:

$$\mathrm{ZFC} \vdash „(\exists ! f)\big[f \text{ függvény} \ \& \ \mathrm{Dom}(f) = \omega \times \omega \ \& \ \mathrm{Ran}(f) = \omega \ \& \\ \& \ (\forall x, y \in \omega) \Phi_1^i(x, y, f(x, y))\big]". \qquad \square$$

A formulákban nagyon sok rövidítést használtunk: „f függvény", „$\mathrm{Dom}(f)$", $\omega \times \omega$, „f bijektív" stb., ezek mind könnyen definiálhatók elsőrendű formulákkal.

3.2. Lépés: $\mathbf{Q}$ definíciója, rendezett számhármasok ekvivalencia osztályaiként:

$$\Phi_2(z) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\big[x \in z \Leftrightarrow \neg(x = \emptyset) \ \& \ (\forall y)(y \in x \Leftrightarrow (\exists y_1, y_2 \in \omega) \\ (\exists y_0 \in \{0, 1\})(\neg y_2 = 0) \ \& \ \langle y_0, y_1, y_2 \rangle \in y \\ \& \ (y_1 = 0 \Rightarrow y_0 = 1) \\ \& \ (\forall u_0, u_1 u_2, t_0, t_1, t_2 \in \omega)(\forall y \in x) \\ [(\langle u_0, u_1, u_2 \rangle \in y \ \& \ \langle t_0, t_1, t_2 \rangle \in y) \Leftrightarrow (u_1 t_2 = t_1 u_2 \ \& \ u_0 = t_0)])\big]".$$

Megint egyszerűen belátható, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash „(\exists ! z)\Phi_2(z)". \qquad \square$$

3.2'. Lépés: Olyan Φ_3, Φ_3', Φ_3'', Φ_3''' formulák megadása, melyek rendre az abszolútérték, a rendezés, az összeadás és a szorzás definícióját adják meg $\mathbf{Q}$-n. Ezek megadása rutinszerű, ezért elhagyjuk. $\square$

3.3. Állítás: *ω és $\mathbf{Q}$, illetve a fentiekben rajtuk definiált relációk és műveletek abszolútak.*

BIZONYÍTÁS:

Tudjuk, hogy az üres halmaz egyértelmű, azaz

$$\mathrm{ZFC} \vdash „(\exists ! t)(\forall y)(\neg(y \in t))".$$

Legyen M és N két tranzitív ZFC-modell. Akkor

(1) $\qquad M \models „x \in y"$ ekvivalens „$x \in y$"-nal,

és ugyanez áll N-re is. Ezért,

$$\emptyset^M = \emptyset^N = \emptyset,$$

tehát az üres halmaz interpretáltja mindkét halmazban saját maga. Ugyancsak (1) miatt $x \in M$ esetén van olyan $y \in M$, amelyre $M \models$ „$y = (x \cup \{x\})$" és ez utóbbi pontosan azt jelenti, hogy $y = x \cup \{x\}$ (vagyis az „$y = x \cup \{x\}$" reláció is abszolút). Ezért indukcióval látható, hogy ω elemei mind abszolútak, azaz

$$1^M = 1^N = 1, \quad 2^M = 2^N = 2, \quad \text{stb.},$$

így adódik ω abszolútsága. A $\mathbf{Q}$ abszolút volta ezekután abból adódik, hogy (1) miatt tetszőleges $x, y, z \in \omega^M$ esetén $xyz \in M$ és minden $t \in M$ esetén $M \models$ „$t = xyz$" pontosan akkor igaz, ha $t = xyz$ és ugyanúgy $M \models$ „$(x, y, z \in \omega) \,\&\, z = x \cdot y$" ekvivalens $x, y, z \in \omega$ & $z = x \cdot y$-nal. Mármost Φ_2 alapján $\mathbf{Q}$ abszolútsága következik. A műveletek és relációk abszolút volta ugyanúgy látható be. □

3.4. Lépés: $\mathbf{R}$ definíciója:

Ezt a racionális számokból álló Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályozásával oldjuk meg. Legyen a Cauchy-sorozatok definíciója

$$\Phi_4^-(y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}y \text{ függvény } \& \ \mathrm{Dom}(y) = \omega \ \& \ \mathrm{Ran}(y) \subseteqq \mathbf{Q} \ \&$$
$$\& \ (\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)(\forall m_1, m_2 \in \omega)$$
$$\left[(m_1 > n_0 \ \& \ m_2 > n_0) \Rightarrow |y(m_1) - y(m_2)| < \frac{1}{k}\right]\text{"},$$

és az ekvivalenciaosztályok definíciója

$$\Phi_4(z) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\forall x)\left[x \in z \Rightarrow \forall y\big(y \in x \Rightarrow \Phi_4^-(y)\big)\right] \ \&$$
$$\& \ (\forall y)[\Phi_4^-(y) \Rightarrow (\exists x \in z)(y \in x)] \ \& \ (\forall y_1, y_2)$$
$$\left[(\exists x \in z)\left[(y_1 \in x) \ \& \ (y_2 \in x) \Leftrightarrow \big(\Phi_4^-(y_1) \ \& \ \Phi_4^-(y_2)\big) \ \&\right.\right.$$
$$\& \ (\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)(\forall n \in \omega)$$
$$\left.\left.\left(n > n_0 \Rightarrow |y_1(n) - y_2(n)| < \frac{1}{k}\right)\right]\right]\text{"}.$$

Akkor ZFC $\vdash$ „$(\exists ! z)\Phi_4(z)$", mint könnyen belátható. □

3.5. Lépés:

(a) $\mathbf{R}$-en a rendezés, az „$y_1 \leqq y_2$" reláció:

$$\Phi_5(y_1, y_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)[\Phi_4(z) \ \& \ y_1, y_2 \in z] \ \&$$
$$\& \ (\forall t_1 \in y_1)(\forall t_2 \in y_2)(\forall k \in \omega)(\exists n_0 \in \omega)$$
$$\left[n > n_0 \Rightarrow t_1(n) < t_2(n) + \frac{1}{k}\right]\text{"}.$$

(b) $\mathbf{Q}$ beágyazása $\mathbf{R}$-be konstans sorozatok ekvivalenciaosztályaiként:

$$\Phi_5'(y, r) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)(\exists q)[\Phi_4(z) \ \& \ \Phi_2(q) \ \& \ y \in z \ \& \ r \in q] \ \&$$
$$\& \ (\exists t \in y)(\forall n \in \omega)[t(n) = r]\text{"}.$$

(c) A $[0, 1]$ szakasz definíciója:

$$\Phi_5''(Y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)\big[\Phi_4(z) \ \& \ Y \subseteq z \ \& \ (\forall t\in z)\big[t\in Y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists r, y_0, y_1)\{\Phi_2(r) \ \& \ y_0, y_1\in r \ \&$$

$$\& \ \langle 0, 0, 1\rangle\in y_0 \ \& \ \langle 0, 1, 1\rangle\in y_1 \ \& \ (\exists \hat{y}_0, \hat{y}_1)(\Phi_5(y_0, \hat{y}_0) \ \& \ \Phi_5(y_1, \hat{y}_1) \ \&$$

$$\& \ \Phi_5(\hat{y}_0, t) \ \& \ \Phi_5(t, \hat{y}_1))\}\big]\big]\text{"}.$$

Itt tehát Y felel meg a $[0, 1]$ halmaznak.

(d) Az abszolút érték és a műveletek definíciója **R**-en: ezt elhagyjuk. □

MEGJEGYZÉS:

A „sorozatnak lenni" kijelentés abszolút, azaz tetszőleges $\langle M, \in\rangle$ és $\langle N, \in\rangle$ $\in$-tranzitív ZFC-modellekre, amelyekre $M\subseteq N$, $r, s\in M$,

$$M \models \text{„}r \text{ függvény}, \ \ \mathrm{Dom}(r) = \omega, \ \ \mathrm{Ran}(r) \subseteq s\text{"}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$N \models \text{„}r \text{ függvény}, \ \ \mathrm{Dom}(r) = \omega, \ \ \mathrm{Ran}(r) \subseteq s\text{"}.$$

Hasonlóan, egy $\langle r_n \colon n\in\omega\rangle\in M$ racionális számsorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat M-ben, ha N-ben az. Általában érvényes ugyanis a következő állítás:

Állítás: *Ha φ formula és kvantorai csak ω elemeire vonatkozhatnak, akkor φ abszolút az $\in$-modellekre nézve.* □

Másfelől **R** maga nem abszolút. Ennek az az oka, hogy N-ben lehet olyan racionális számsorozat, ami M-nek nem eleme, jóllehet a sorozat elemei elemei M-nek is. A leszálló Löwenheim—Skolem-tétel szerint ha ZFC-nek van modellje, akkor megszámlálható modellje is van, egy ilyen modellben biztosan nincs benne minden racionális Cauchy-sorozat, hiszen abból, mint tudjuk, kontinuumnyi sok van. Sőt, ha $M\subseteq N$ ZFC-modellek és $\mathbf{R}^M\in M$, $\mathbf{R}^N\in N$ olyan objektumok, hogy $M\models\Phi_4(\mathbf{R}^M)$, $N\models\Phi_4(\mathbf{R}^N)$ akkor még $\mathbf{R}^M\subseteq\mathbf{R}^N$ sem igaz, hiszen mások az ekvivalenciaosztályok a két modellben. Mégis igaz a következő állítás:

3.6. Állítás: *Legyenek $\langle M, \in\rangle$ és $\langle N, \in\rangle$ ZFC-modellek, $M\subseteq N$, és legyen $M\models\Phi_4(\mathbf{R}^M)$, $N\models\Phi_4(\mathbf{R}^N)$. Akkor N-ben definiálható $\mathbf{R}^M$-nek egy $\mathbf{R}^N$-be való lineáris izometrikus beágyazása (és a definícióban $\mathbf{R}^M$ mint paraméter szerepel).*

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$$\Phi_6(f, r) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„ függvény} \ \& \ \mathrm{Dom}(f) = r \ \&$$

$$\& \ (\exists z)[\Phi_4(z) \ \& \ \mathrm{Ran}(f) \subseteq z] \ \& \ (\forall x\in r)(x\subseteq f(x))\text{"}.$$

Akkor

$$N \models \text{„}(\exists ! f)\,\Phi_6(f, \mathbf{R}^M) \ \& \ (\eta\colon \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^N \text{ izometrikus})\text{"}.$$

Ennek belátása rutinszerű, így azt elhagyjuk. □

3.7. Lépés: Az „f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény folytonos" állítást leíró formula:

$$\Phi_7(f) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}f \text{ függvény } \& \ (\exists z)[\Phi_4(z) \ \& \ \mathrm{Dom}(f) \subseteqq z \ \& \ \mathrm{Ran}(f) \in z] \ \&$$

$$\& \ (\forall k \in \omega)\big(\forall x \in \mathrm{Dom}(f)\big)(\exists m \in \omega)\big(\forall x' \in \mathrm{Dom}(f)\big)$$

$$\left[|x - x'| < \frac{1}{m} \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{1}{k}\right]\text{"}.$$

3.8. Lépés: A $C[0, 1]$-t definiáló formula:

$$\Phi_8(c) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\forall f)\big[f \in c \Leftrightarrow \Phi_7(f) \ \& \ \Phi_5''(\mathrm{Dom}(f))\big]\text{"}. \qquad \square$$

3.9. Lépés: $C[0, 1]$-en a maximumnorma definíciója:

$$\Phi_9(F) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}F \text{ függvény } \& \ \Phi_8(\mathrm{Dom}(F)) \ \& \ (\exists z)\big(\Phi_4(z) \ \& \ \mathrm{Ran}(F) \subset z\big) \ \&$$

$$\& \ \big(\forall h \in \mathrm{Dom}(F)\big)\Big[(\forall x)\Big\{\big(\exists y \, \Phi_5''(y) \ \& \ (x \in y)\big) \Rightarrow |h(x)| \leqq F(h) \ \&$$

$$\& \ (\forall t)\big(\Phi_5(t, F(h)) \ \& \ \neg\,(t = F(h)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x \, \exists y)\big(\Phi_4(y) \ \& \ x \in y \ \& \ \Phi_5(t, h(x)) \ \& \ t \neq h(x)\big)\Big\}\Big]\text{"}. \qquad \square$$

Nyilván

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\exists ! F)[\Phi_9(F) \ \& \ (\forall c, F)\big(\Phi_8(c) \ \& \ \Phi_9(F) \Rightarrow \langle c, F\rangle \text{ Banach-tér})\big]\text{"}.$$

(F megszokottabb jelölése $\|.\|_\infty$.) $\square$

Most $C[0, 1]^M$ beágyazása $C[0, 1]^N$-be a következő módon történhet. Mivel $\mathbf{Q}$ abszolútsága miatt az $\mathbf{R}^M$ 3.6. szerinti beágyazottja sűrű $\mathbf{R}^N$-ben, ezért $f \in C[0, 1]^N$-et áttranszformálhatjuk $[0, 1]^N$ egy sűrű részhalmazán értelmezett függvénnyé, ami, ha egyáltalán kiterjeszthető folytonosan az egész $[0, 1]^N$-re, akkor ez a kiterjesztés egyértelmű.

Ennek lehetőségét mutatjuk meg a következő állításban.

3.10. Állítás: *$\langle C[0, 1], \|.\|_\infty\rangle$-re teljesülnek a 2.3. Állítás feltételei.*

BIZONYÍTÁS:

Legyenek adottak az $M \subseteqq N$ modellek és $\mathbf{R}^M, F^M, c^M \in M$, $\mathbf{R}^N, F^N, c^N$, $\eta \in N$ úgy, hogy

$$M \models \Phi_4(\mathbf{R}^M) \ \& \ \Phi_8(c^M) \ \& \ \Phi_9(F^M),$$

$$N \models \Phi_4(\mathbf{R}^N) \ \& \ \Phi_8(c^N) \ \& \ \Phi_9(F^N) \ \& \ \Phi_6(\eta, \mathbf{R}^M).$$

Legyen

$$\Phi_{10}(\vartheta, t, r, s) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}\vartheta \text{ függvény } \& \ \mathrm{Dom}(\vartheta) = t \ \&$$

$$\& \ (\exists z)[\Phi_8(z) \ \& \ \mathrm{Ran}(\vartheta) \subseteqq z] \ \& \ \big(\forall f \in \mathrm{Dom}(\vartheta)\big)(\forall x, y \in r)$$

$$[f(x) = y \Leftrightarrow (\vartheta(f))(s(x)) = s(y)]\text{"}.$$

Akkor

$$N \models „(\exists!\vartheta)\Phi_{10}(\vartheta, c^N, \mathbf{R}^N, \eta) \ \& \ (\forall\vartheta)$$

$$[\Phi_{10}(\vartheta, c^N, \mathbf{R}^N, \eta) \subseteqq \vartheta\colon c^M \to c^N \text{ izometrikus}]".$$

Ennek bizonyítása a következő. Bármely $f\in C[0,1]^M$ függvény egyenletesen folytonos, ami azt jelenti, hogy $f\upharpoonright\mathbf{Q}$ is egyenletesen folytonos: elég közeli $r_1, r_2\in\mathbf{Q}$ esetén $|f(r_1)-f(r_2)|$ is elég kicsi. Ez utóbbi állítás már abszolút, tehát az N-be átvitt $f\upharpoonright\mathbf{Q}$-ra is érvényes. Akkor pedig N-ben definiálhatjuk $f\upharpoonright\mathbf{Q}$-nak egy $\vartheta(f)$ kiterjesztését így: ha $x\in[0,1]^N$ és $(r_n\to x)^N$ egy x-hez konvergáló racionális számsorozat, akkor $f(r_n)$ Cauchy-sorozat N-ben, így van egy $\vartheta(f)(x)$-szel jelölhető határértéke. Világos, hogy így egyértelműen megadtunk egy $\vartheta(f)\colon [0,1]\to\mathbf{R}$ függvényt, ami folytonos. Másrészt, ha veszünk egy $x\in\eta([0,1]^M)$-beli pontot, és olyan racionális r_n sorozattal konvergálunk x-hez, ami M-ben is sorozat, akkor belátható hogy $f\in C[0,1]^M$ esetén az $f\circ\eta^{-1}$ beágyazott függvénynek $\vartheta(f)\in C[0,1]^N$ egy kiterjesztése lesz. Végül ϑ izometrikus volta abból következik, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash „f\in C[0,1] \text{ esetén } \|f\|_\infty = \sup\{|f(r)|\colon r\in\mathbf{Q}\}".$$

A 3.10. Állítást ezzel beláttuk. □

A következő tér, amit vizsgálunk, a mérhető függvények tere lesz a sztochasztikus konvergenciára nézve. Ennek a térnek formulákkal való felépítéséhez a következő jólismert fogalmakat kell formulával definiálni:

a) Az $A\subseteqq\mathbf{R}$ halmaz *nullmértékű,* ha minden $\varepsilon>0$ számhoz van egy A-t lefedő, $<\varepsilon$ összhosszúságú intervallumsorozat, csupa racionális végpontú nyílt szakaszból.

b) Egy $H\subseteqq\mathbf{R}$ halmaz $\mathscr{F}_\sigma$*-halmaz,* ha megszámlálható sok zárt halmaz uniója.

c) $A\subseteqq\mathbf{R}$ *Lebesgue-mérhető,* ha van olyan $Y\in\mathscr{F}_\sigma$-halmaz, hogy az

$$A\triangle Y := (A\setminus Y)\cup(Y\setminus A)$$

szimmetrikus differencia nullmértékű. Az A halmaz Lebesgue-mértéke, amit $\mu(A)$-val jelölünk, az A-t lefedő, nyílt intervallumsorozatok összhosszúságainak infimuma.

d) Ha $A\subseteqq\mathbf{R}$ egy mérhető halmaz, akkor egy $f\colon A\to\mathbf{R}$ függvény pontosan akkor *mérhető,* ha bármely $c\in\mathbf{R}$ esetén az $\{x\in A\colon f(x)>c\}$ nívóhalmazok mérhetők.

e) $L^0(0,1) :\overset{\text{def}}{=} \{f\colon [0,1]\to\mathbf{R}\colon f \text{ mérhető}\}$.

f) Ha f_n $(n\in\omega)$ és g mérhető függvények, $\mathrm{Dom}(f_n)=\mathrm{Dom}(g)$ minden $n\in\omega$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *sztochasztikusan tart* g-hez, ha minden rögzített $\varepsilon>0$ és $n\to\infty$ esetén

$$\mu\big(\{x\in\mathrm{Dom}(g)\colon |f_n(x)-g(x)| \geqq \varepsilon\}\big) \to 0.$$

g) Legyenek f, g mérhető függvények, $\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(g)$.

Az f és g *távolsága* legyen

$$\varrho(f,g) :\overset{\text{def}}{=} \inf\big\{\alpha+\mu\big(\{x\in\mathrm{Dom}(f)\colon |f(x)-g(x)| > \alpha\}\big)\colon \alpha > 0\big\}.$$ □

3.11. Állítás: *Léteznek olyan $\Phi_{13}^{(a)}, \ldots, \Phi_{13}^{(h)}$ elsőrendű formulák, hogy*

$\Phi_{13}^{a}(A) \Leftrightarrow$ „$A \subseteq \mathbf{R}$ & A *nullmértékű*",

$\Phi_{13}^{b}(F) \Leftrightarrow$ „$F \subseteq \mathbf{R}$ & $F \in F_\sigma$*-halmaz*",

$\Phi_{13}^{c}(A) \Leftrightarrow$ „$A \subset \mathbf{R}$ & A *Lebesgue—mérhető*",

$\Phi_{13}^{d}(f) \Leftrightarrow$ „Dom $(f) = A$ *mérhető*, $f\colon A \to \mathbf{R}$ *mérhető*",

$\Phi_{13}^{e}(l) \Leftrightarrow$ „$l = L(0, 1)$",

$\Phi_{13}^{f}(F, g) \Leftrightarrow$ „F *függvény* & Dom$(F) = \omega$ & $(\forall n \in \omega)\, \Phi_{13}^{d}(F(n))$ &

& $\Phi_{13}^{d}(g)$ & $(F(n) \to g$ *sztochasztikusan*$)$",

$\Phi_{13}^{g}(F, g, r) \Leftrightarrow$ „f, g *mérhetőek* & Dom$(f) =$ Dom(g) & $r \in \mathbf{R}$ & $r = \varrho(f, g)$",

$\Phi_{13}^{h}(r) \Leftrightarrow$ „$(\exists l)\,[\Phi_{13}^{e}(l)$ & r *függvény* &

& Dom$(r) = l \times l$ & $\forall (f_1, f_2) \in$ Dom(r) & $\Phi_{13}^{g}(f_1, f_2, r)]$. □

3.12. Állítás:

a) ZFC $\vdash$ „$(\exists! l, r)\,[\Phi_{13}^{e}(l)$ & $\Phi_{13}^{h}(r)]$";

b) ZFC $\vdash$ „$(\forall l, r)\,[\Phi_{13}^{e}(l)$ & $\Phi_{13}^{h}(r) \Rightarrow (l, r)$ *teljes metrikus tér*$]$. □

Most meggondoljuk, hogy a „nullmértékűnek lenni" tulajdonság lefelé abszolút:

3.13. Állítás: *Legyenek* $\langle M, \in \rangle$, $\langle N, \in \rangle$ *ZFC-modellek,* $M \subseteq N$, $M \models \Phi_4(\mathbf{R}^M)$, $N \models \Phi_4(\mathbf{R}^N)$, $N \models \Phi_6(\eta, \mathbf{R}^M)$. *Ekkor bármely*

$$A \in M \quad A \subseteq \mathbf{R}^M, \quad M \models \Phi_{13}^{a}(A)$$

esetén

$$N \models \Phi_{13}^{a}(\eta(A)).$$

A bizonyítás abból adódik, hogy ha $\left(A \subset \bigcup_{n \in \omega} I_n\right)^N$, ahol az I_n-ek racionális végpontú szakaszok, és $\left(\sum \mu(I_n) < \varepsilon\right)^M$, akkor

$$N \models \text{„}\mu(I_n) = \mu(\eta(I_n)) \ \& \ \eta(A) \subset \bigcup_{n \in \omega} \eta(I_n)\text{"}. \qquad \square$$

Mint tudjuk, van egy $\vartheta\colon C[0, 1]^M \to C[0, 1]^N$ természetes izometrikus beágyazás; mutassuk meg, hogy ϑ a ϱ metrika szerint is izometrikus:

3.14. Állítás:

$$f, g \in C[0, 1]^M \quad \textit{esetén} \quad \varrho(\vartheta(f), \vartheta(g))^N = \varrho(f, g)^M.$$

BIZONYÍTÁS:

Vezessük be a

$$H(h, \alpha) := \{x \in [0, 1] \colon |h(x)| > \alpha\}$$

jelölést. Mivel folytonos f, g függvényre $H(f-g,\alpha)$ folytonosan függ α-tól, ezért

$$\varrho(f,g)=\inf\{\alpha+\mu(H(f-g,\alpha)):\ \alpha>0,\ \alpha\in\mathbf{Q}\}.$$

Világos, hogy $H(f-g,\alpha)$ és $H(\vartheta(f)-\vartheta(g),\alpha)$ nyílt halmazok (M-ben, illetve N-ben), másrészt $\mathbf{Q}$-val vett metszetük ugyanaz a halmaz. Ebből következik, hogy $\alpha\in\mathbf{Q}$-ra

$$\mu(H(f-g,\alpha))^M=\mu(H(\vartheta(f)-\vartheta(g),\alpha))^N,$$

ami bizonyítja állításunkat. □

A valós függvénytanból ismeretes, hogy

$$\mathrm{ZFC}\vdash \text{„}(\forall f\in L^0(0,1))(\exists (f_n)\subset C[0,1])\quad \varrho(f,f_n)\to 0\quad (n\to\infty)\text{”}.$$

Ezért értelmes a következő definíció:

3.15. Definíció:

Legyen $f\in L^0(0,1)^M$, akkor a $\chi(f)$ függvényt így definiáljuk: legyen $\langle f_n\colon n\in\omega\rangle\in M$ egy $C[0,1]^M$-beli sorozat, ami a ϱ^M metrika szerint tart f-hez; akkor

$$\chi(f)\overset{\text{def}}{:=}\lim_{n\in\omega}\vartheta(f_n)$$

ahol „lim” a ϱ^N metrika szerint értendő. □

3.16. Megjegyzés:

A modellelméletben ismert halmazelméleti forszolási technikával (erről a 4. részben lesz szó) könnyen megadható olyan $M\subsetneqq N$ modellpár, ahol $\eta(\mathbf{R}^M)$ nulla mértékű $\mathbf{R}^N$-ben. (Pl. $N=M[G]$, ahol G egy véletlen valós, azaz random real, l. [15, 3.10. Lemma] vagy [18, I.4]-ben.) Mivel egy mérhető függvényt csak nullamértékű halmaztól eltekintve határoznak meg a pontban felvett értékei, ezért közvetlenül nem világos, mit kell megfeleltetni egy $L^0(0,1)^M$-beli függvényen N-ben. Ezért kellett a beágyazást a fenti bonyolult módon megadni. A definíció jogosságát vizsgálva először is látjuk, hogy (f_n) Cauchy-sorozat M-ben, így a 3.14. Állítás miatt $\vartheta(f_n)$ is az N-ben, és mivel látható, hogy

$$N\models \text{„}\varrho \text{ teljes metrika”},$$

ezért a $(\vartheta(f_n))$ sorozatnak valóban létezik limesze, és ez a $\chi(f)$ függvény. Másrészt $\chi(f)$ független az (f_n) sorozattól, mert ha (f_n') is tart f-hez, akkor (f_n-f_n') és így $(\vartheta(f_n)-\vartheta(f_n'))$ is zérussorozat. Világos, hogy χ lineáris és

$$\mu(H(\chi(f),\alpha))=\lim_{n\in\omega}\mu(H(\vartheta(f_n),\alpha))=\lim\mu(H(f_n,\alpha))=\mu(H(f,\alpha)).$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

3.17. Tétel:

$$\chi\colon L^0(0,1)^M \to L^0(0,1)^N$$

izometrikus beágyazás. □

Az is könnyen ellenőrizhető, hogy χ N-ben egyértelműen definiálható olyan elsőrendű formulával, amelyben $L^0(0,1)^M$ és $\mathbf{R}^M$ paraméterek. Speciálisan tehát

$$\chi \in N.$$

Vezessük be most a π számot.

3.18. Definíció:

$$\Phi_{18}(p) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{„}(\exists z)[\Phi_4(z) \;\&\; p\in z] \;\&\; (\exists s\in p)$$

$$\left[s(0)=4 \;\&\; (\forall n\in\omega)\left(n>0 \Rightarrow s(n)=s(n-1)+4\frac{(-1)^n}{2n-1}\right)\right]\text{''}.$$ □

Ebből következik, hogy $C[0,2\pi]$ és $L^0(0,2\pi)$ is definiálható. Az $L^p(0,2\pi)$ terek megadásához az integrálfogalmat kell kiépíteni. A Lebesgue-integrál alábbi definícióját tudjuk könnyen formalizálni:

a) Legyen $f\geqq 0$ m.m. (majdnem mindenütt), f mérhető. Akkor az

$$\int\limits_{\mathrm{Dom}(f)} f d\mu := \sup\Big\{\sum_{i\in\omega}\bar{f}_i\mu(A_i)\colon \bar{f}_i = \mathrm{ess}_{A_i}\inf f$$

$$\text{és } \langle A_i\colon i\in\omega\rangle \text{ a } \mathrm{Dom}(f) \text{ egy partíciója}\Big\}$$

számot f Lebesgue-integráljának nevezzük. (A képletben szereplő „$\mathrm{ess}_A \inf f$" f lényegi minimuma az A mérhető halmazon: nullmértékű halmaztól eltekintve számított minimumainak maximuma.)

b) Tetszőleges f mérhető függvényre legyen

$$f^+ := \max\{f,0\},\quad f^- := \min\{f,0\}$$

(f pozitív és negatív része).

Akkor $f^+, f^- > 0$ mérhető függvények, és $f=f^+-f^-$. Definíció szerint

$$\int\limits_{\mathrm{Dom}(f)} f d\mu := \int\limits_{\mathrm{Dom}(f)} f^+ d\mu - \int\limits_{\mathrm{Dom}(f)} f^- d\mu,$$

kivéve, ha a különbség mindkét tagja végtelen; ilyenkor azt mondjuk, hogy f nem Lebesgue-integrálható $\mathrm{Dom}(f)$-ben.

c) $0<p<\infty$ esetén egy $A\subseteqq\mathbf{R}$ mérhető halmazra

$$L^p(A) := \Big\{f\in L^0(A)\colon \|f\|_p \overset{\text{def}}{:=} \Big(\int\limits_A |f|^p d\mu\Big)^{1/p} < \infty\Big\}.$$ □

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek mind definiálhatók elsőrendű formulákkal. Így tehát az $L^p(0,2\pi)\subset L^0(0,2\pi)$ terek is rendelkezésünkre állnak. Mivel χ a teljes L^0 téren értelmezett, ezért $(L^p)^M$-t is valahová $(L^0)^N$-ba viszi. ($M\subset N$). Belátjuk, hogy valójában $(L^p)^N$-be ágyazza be:

3.19. Állítás: *Tetszőleges* $0<p<\infty$ *és* $f\in L^p(0,2\pi)^M$ *esetén*

$$\chi(f)\in L^p(0,2\pi)^N \quad \text{és} \quad \|\chi(f)\|_p^N=\|f\|_p^M.$$

BIZONYÍTÁS:

A következő egyenlőségeket kell ellenőrizni:

$$\Big(\int_{[0,2\pi]}|f|^p\,d\mu\Big)^M=\Big(\int_{[0,\infty]}\mu\big(H(f,\alpha)\big)\alpha^{p-1}\,d\mu(\alpha)\Big)^M=$$

$$=\Big(\int_{[0,\infty]}\mu\big(H(\chi(f),\alpha)\big)\alpha^{p-1}\,d\mu(\alpha)\Big)^N=\Big(\int_{[0,2\pi]}|\chi(f)|^p\,d\mu\Big)^N.$$

Ezek közül az első és a harmadik jól ismert azonosság az integrálnak az eloszlásfüggvényből való kiszámítására. Ami a második egyenlőtlenséget illeti,

$$\mu\big(H(f,\alpha)\big)=\mu\big(H(\chi(f),\alpha)\big)\quad(\alpha\in\mathbf{R}^M)$$

miatt elég belátni a következőt: bármely $h\in C[0,\infty)$, $h\geq 0$ esetén

$$\Big(\int_{[0,\infty]}h\,d\mu\Big)^M=\Big(\int_{[0,\infty]}\vartheta(h)\,d\mu\Big)^N.$$

De ez valóban fennáll, mert a folytonosság miatt

$$\Big(\int_{[0,\infty]}h\,d\mu\Big)^M=\Big(\lim_{n\in\omega}\int_{[0,n]}h\,d\mu\Big)^M=$$

$$=\left(\lim_{n\in\omega}\left[\lim_{k\in\omega}\frac{n}{k}\sum_{i=0}^{k-1}h\left(\frac{in}{k}\right)\right]\right)^M=\left(\lim_{n\in\omega}\left[\lim_{k\in\omega}\frac{n}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\chi(h)\left(\frac{in}{h}\right)\right]\right)^N=$$

$$=\Big(\lim_{n\in\omega}\Big(\int_{[0,n]}\vartheta(h)\,d\mu\Big)^N=\Big(\int_{[0,\infty]}\vartheta(h)\,d\mu\Big)^N.$$ □

3.20. Definíció: A $\langle c_\infty,\|\cdot\|_\infty\rangle$ tér a korlátos valós számsorozatok halmaza a sup-normával (a formulával való felírást elhagyjuk). □

A 3.6-ban definiált $\eta\colon \mathbf{R}^M\to\mathbf{R}^N$ beágyazás segítségével könnyen megadható egy

$$\delta\colon\langle c_\infty,\|\cdot\|_\infty\rangle^M\to\langle c_\infty,\|\cdot\|_\infty\rangle^N$$

izometrikus beágyazás.

Hosszú, fáradságos munkánk gyümölcseként lássunk egy alkalmazást. A következő részben még további példákat mutatunk a módszer alkalmazásaira (pl. 4.15. Tétel és következményei).

A Riemann—Lebesgue-lemma azt mondja, hogy bármely $f\in L^1(0,2\pi)$ függvény

$$c_n(f):\stackrel{\text{def}}{=}\int_{[0,2\pi]}f(x)e^{-inx}\,dx$$

Fourier-együtthatóinak sorozata tart 0-hoz, ha $n\to\infty$. Itt felmerül a kérdés: lehet-e a konvergencia sebességéről az egész L^1 függvényosztályra vonatkozóan valamit mondani. Következő tételünkben azt bizonyítjuk be, hogy a Fourier-együtthatók „tetszőlegesen lassan" tarthatnak 0-hoz, ha $f\in L^1$-et alkalmasan választjuk.

3.21. Tétel: *ZFC-ben a tétel a következő állítás. Nem létezik olyan, pozitív számokból álló $\langle a_n : n \in \mathbf{Z} \rangle$ nullsorozat (azaz $\lim_{|n|\to\infty} a_n = 0$), amely formulával egyértelműen megadható és amelyre bármely $f \in L^1(0, 2\pi)$ esetén*

$$|c_n(f)| \leq c_f a_n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

teljesül valamilyen n-től független $c_f > 0$ konstanssal.

BIZONYÍTÁS:

Tegyük fel indirekt módon, hogy van ilyen $\langle a_n : n \in \mathbf{Z} \rangle$ sorozat. Akkor az

$$F: L^1(0, 2\pi) \to c_\infty, \quad F(f) := \left\langle \frac{c_n(f)}{a_n} : n \in \mathbf{Z} \right\rangle$$

operátor is formulával definiálható és lineáris. Továbbá $f \in L^1(0, 2\pi)^M$ esetén

$$(F(\chi(f))^N = \delta(F(f)^M)$$

és ezért

$$\|F(\chi(f))\|_\infty^N = \|F(f)\|_\infty^M.$$

A 2.6. Segédtételt alkalmazva látjuk, hogy

$$\mathrm{ZFC} \vdash \text{„}F \text{ folytonos”}.$$

Más szóval $\|F(f)\|_\infty \leq K \|f\|_1$ bármely $f \in L^1$-re valamilyen f-től független $K > 0$ konstanssal. De ez nem lehet igaz. Legyen ugyanis

$$f_n(x) := \frac{e^{inx}}{2\pi} \quad (x \in [0, 2\pi]).$$

Ekkor $\|f_n\|_1 = 1$, másfelől

$$F(f_n) := \left\langle \frac{1}{a_k} \delta_{nk} : k \in \mathbf{Z} \right\rangle,$$

ami $\frac{1}{a_k} \to \infty$ miatt ellentmond F folytonosságának. □

Megjegyzés: A fenti tétel egy klasszikus funkcionálanalízisbeli eredmény, a zárt gráf tétel segítségével közvetlenül és gyorsan belátható. Mi azért adtuk mégis egy jóval hosszabb bizonyítását, mert egy módszer illusztrációjának szánjuk. A módszer jelentősége az, hogy típusbizonyítást ad meg lineáris leképezések folytonosságára és lehetőséget nyújt arra, hogy „egy csapásra" bizonyíthassuk funkcionálanalízis-tételek egész seregét és ne kelljen ad hoc bizonyításokat felkutatni minden speciális esetben. Ahhoz azonban, hogy ehhez a kérdéshez érdemben hozzáférjünk, használnunk kell a Cohen-féle forszolási technikát. Dolgozatunk következő részében egy forszoláselméleti bevezető után a fenti kérdésekkel fogunk foglalkozni.

4. Banach néhány tételének általánosítása

Ebben a részben Ajtai Miklós eredményeit nem közvetlenül alkalmazzuk, hanem bizonyos átalakított vagy általánosított alakban használjuk fel, illetve Ajtai ötleteit felhasználva újabb tételeket bizonyítunk. Ehhez szükségünk lesz a forszolás módszerének legalább felületes ismeretére. Így e paragrafus első részében a forszolás alapjait vázoljuk. Ennek felhasználásával két tételt bizonyítunk be (4.15. és 4.21. Tétel), melyek Ajtai [1] és [2]-ben megjelent egyik tételét általánosítják, ill. újabb alkalmazásokra nyújtanak lehetőséget. A dolgozat végén újabb alkalmazásokat említünk, és megfogalmazunk három megoldatlan problémát.

Az alábbiakban dióhéjban felsoroljuk a később szükséges alapvető forszolási ismereteket. Alaposabb és elég részletes bevezetést találhat az Olvasó pl. Burgess [4], Kunen [14] vagy Shoenfield [20] cikkében. Shelah [18] könyvében csak vázol egy-két tételt és definíciót, Jech [11] és [12] könyveiben más megközelítési módot használ. A módszert Paul J. Cohen fedezte fel, és használta először a kontinuum-hipotézis ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$) függetlenségének igazolásához. (Pontosabban, Gödel tétele szerint $V=L\Rightarrow$ $\Rightarrow 2^{\aleph_0}=\aleph_1$ és Cohen olyan generikus modellt adott, amelyben $2^{\aleph_0}>\aleph_1$.) Módszerét [5] könyvében írta le, azonban az nehezen olvasható, a kezdő olvasónak inkább a modernebb [4], [14] vagy [20] műveket ajánljuk.

Az elméletet egy példán keresztül világítjuk meg. Tegyük fel, hogy M egy megszámlálható tranzitív $\in$-ZFC-modell. Legyen A és B két M-beli végtelen halmaz, amelyek M-ben nem egyenlő számosságúak, azaz nincs $F\in M$ bijekció A és B között. Olyan modellt szeretnénk konstruálni, amely tartalmazza M-et részmodellként és van benne ilyen F bijekció. Bármennyire is meglepő, ilyen modell létezik, sőt megkonstruálható. Bár egy ilyen F leképezés nincs M-ben, de véges részei, pontosabban a

$$H:=\{f\colon A\to B\colon \mathrm{Dom}(f) \text{ véges, } f \text{ injektív}\}$$

halmaz M-beli (hiszen A és B elemei M-nek). Egy f függvényt azonosíthatunk az

$$\{\langle x, f(x)\rangle\colon x\in \mathrm{Dom}(f)\}$$

halmazzal; akkor $f\supseteqq g$ azt jelenti, hogy f kiterjesztése g-nek. A kérdés az, milyen

$$G\subseteqq H$$

halmazból lehet egy $F\colon A\to B$ bijekciót előállítani, abban a természetes értelemben, hogy

$$F=\bigcup G.$$

Természetesen ilyenkor

$$G\notin M.$$

Soroljuk fel G-re azokat az előírásokat, melyek teljesülése esetén $F=\bigcup G$ bijekció lesz A és B között.

a) Bármely $f_1, f_2\in G$-nek van közös kiterjesztése G-ben, azaz olyan $g\in G$, amelyre

$$g\supseteqq f_1 \quad \text{és} \quad g\supseteqq f_2.$$

Ha a) fennáll, akkor tehát tetszőleges $f_1, f_2\in G$ kompatibilis egymással, azaz ha $a\in A$-n mindkettő értelmezve van, akkor $f_1(a)=f_2(a)$. Így tehát $\bigcup G$ egy függvény lesz. ($\bigcup G$ nyilván pontosan akkor injektív, ha H minden eleme az.)

b) Bármely $a\in A$ és $b\in B$ esetén

$$G\cap D_a\neq\emptyset, \quad G\cap D^b\neq\emptyset,$$

ahol

$$D_a:=\{f\in H\colon a\in \mathrm{Dom}(f)\}, \quad D^b:=\{f\in H\colon b\in \mathrm{Ran}(f)\}.$$

Ez a feltétel azt garantálja, hogy $a\in \mathrm{Dom}(F)$ és $b\in \mathrm{Ran}(F)$ minden $a\in A$, $b\in B$ esetén, tehát hogy $F\colon A\to B$ szürjektív leképezés legyen. A D_a és D^b halmazoknak két tulajdonságát említsük meg. Először is, ha $f\in H$ eleme valamelyiknek, akkor bármely H-beli kiterjesztése is eleme. Másodszor bármely $f \in H$-nak van olyan kiterjesztése, ami D_a-nak, illetve D^b-nek eleme.

Végül technikai okokból fel szokás tenni, hogy

c) $g \in G$ esetén g minden rész-függvénye is G-beli.

Ha tehát egy fenti tulajdonságú G-t hozzáveszünk az M modellhez, akkor „törvényesítjük" az $F = \bigcup G$ bijekciót, így A és B azonos számosságú lesz. A kérdés már csak az, milyen halmazokat kell még hozzávenni M-hez, hogy újra ZFC-modellt kapjunk. (Továbbá, hogy az „összegyűjtött" halmazokból hogyan készítsünk modellt, hogyan interpretáljuk az $\in$ relációt, majd ezt Mostowski 1.19. Tétele alapján „lesuvasztva" hogyan kapunk benne M-mel izomorf részmodellt.)

A forszolás módszere erre ad választ, és arra a kérdésre, hogy milyen tételek és állítások lesznek igazak $M[G]$-ben, az új modellben.

Most vegyük sorra az általános definíciókat,

4.1. Definíció:

a) Legyen

$$\mathbf{P} := \langle P, \leqq, \mathbf{1} \rangle$$

egy parciálisan rendezett halmaz, ahol $\mathbf{1}$ a P legnagyobb eleme. Az ilyen tulajdonságú $\mathbf{P}$ struktúrát *kényszerképzet*nek *(forcing condition)* nevezünk.

b) Egy $D \subseteqq P$ halmaz *sűrű* $\mathbf{P}$*-ben,* ha bármely P-beli elem minorálható D-ben, azaz

$$(\forall p \in P)(\exists d \in D) \quad d \leqq p.$$

c) A $p, q \in P$ elemek *kompatibilisek (összehasonlíthatók),* ha van P-ben mindkettőt minoráló elem:

$$(\exists r \in P) \quad (r \leqq p \;\&\; r \leqq q).$$

d) Egy $G \subseteqq P$ részhalmaz *felszálló,* ha bármely elemének majoránsa is eleme G-nek: $(\forall q \in G)(\forall p \in P)[p \geqq q \Rightarrow p \in G]$.

e) Egy $G \subseteqq P$ részhalmaz *filter,* ha felszálló és bármely két eleme G-ben kompatibilis:

$$(\forall p, q \in G)(\exists r \in G) \quad (r \leqq p \;\&\; r \leqq q). \qquad \square$$

4.2. Példa:

A fent részletezett példában $P = H$, $\mathbf{1}$ az üres függvény $(\mathrm{Dom}\,(\mathbf{1}) = \emptyset$ és $\mathrm{Ran}\,(\mathbf{1}) = \emptyset)$ és

$$f \leqq g \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} f \supseteqq g.$$

Láttuk, hogy a D_a és D^b halmazok minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén sűrűek. $\square$

4.3. Megjegyzés:

A „sűrű" terminológia a topológiából származik. Ugyanis bármely $\mathbf{P}$ kényszerképzet P alaphalmazán természetes módon értelmezhetünk egy τ topológiát úgy, hogy a $p \in P$ elem környezetbázisa álljon az $\{r \in P\colon r \leqq q\} \cup \{p\}$ halmazokból, ahol $q \leqq p$. Könnyen belátható, hogy egy $D \subseteqq P$ halmaz pontosan akkor sűrű a τ topológiában, ha 4.1. b) értelmében az. $\square$

4.4. Megjegyzés:

A „D sűrű P-ben", „G filter P-ben", „G felszálló P-ben" tulajdonságok elsőrendű formulával leírhatók és abszolútak. Azaz pl. van olyan φ formula, amelyre

$$M \models \text{„}D \text{ sűrű } P\text{-ben"} \Leftrightarrow M \models \text{„}\varphi(D) \Leftrightarrow \varphi(D)\text{"} \Leftrightarrow \text{„}D \text{ sűrű } P\text{-ben"},$$

és hasonlóan a többi tulajdonság esetén. □

4.5. Állítás: *Ha M megszámlálható ZFC-modell, $\mathbf{P}=\langle P, \leqq, \mathbf{1}\rangle$ egy kényszerképzet és $p_0 \in P$, akkor van olyan $G \subseteqq P$ filter, hogy $p_0 \in G$ és G metszi P minden M-beli sűrű részhalmazát.*

BIZONYÍTÁS:

Mivel M megszámlálható, ezért P M-beli sűrű részhalmazai felsorolhatók egy $\{D_n\colon n \in \omega\}$ sorozatban. (E sorozat nyilván nem eleme M-nek, csak elemei, a D_n halmazok vannak M-ben.) Indukcióval definiálható egy $\{p_n\colon n \in \omega\}$ sorozat úgy, hogy $p_0 = \mathbf{1}$, és

$$p_{n+1} \leqq p_n, \quad p_{n+1} \in D_n \quad (\forall n < \omega).$$

Akkor a

$$G := \{p \in P;\ (\exists n \in \omega)\ p \geqq p_n\}$$

halmaz filter és nyilván metszi $\mathbf{P}$ összes M-beli sűrű részhalmazát. □

4.6. Definíció: A $G \subseteqq P$ filter *generikus* (pontosabban *P-generikus M felett*), ha metsz minden $D \subseteqq P$, $D \in M$ sűrű halmazt. □

4.7. Megjegyzés: A „generikus" tulajdonság nem feltétlenül abszolút, hiszen (M-ben nézve) P sűrű részhalmazainak száma lehet több, mint megszámlálható, sőt a legtöbb kényszerképzethez nincs is generikus filter M-ben! Másfelől adott M, $\mathbf{P}$ és $p_0 \in P$ esetén is több $G \subseteqq P$ M felett generikus filter is lehet, ami tartalmazza p_0-t.

A következő alaptétel azt mondja, hogy bármely M modellnek van egy legszűkebb G-t tartalmazó bővítése, $M[G]$, ami szintén ZFC-modell, ahol G egy tetszőleges generikus filter egy M-beli kényszerképzetben. (Az persze előfordulhat, hogy az M modellt $\mathbf{P}$ különböző generikus G halmazaival bővítve ugyanazt a modellt kapjuk bővítésként.)

4.8. Tétel: *Legyen M megszámlálható tranzitív $\in$-ZFC-modell, $\mathbf{P}=\langle P, \leqq, \mathbf{1}\rangle$ egy kényszerképzet és $G \subseteqq P$ generikus filter. Akkor létezik egyetlen, $M[G]$-vel jelölt megszámlálható tranzitív $\in$-ZFC-modell, amelyre egyrészt*

$$M \subseteqq M[G] \quad \text{és} \quad G \in M[G],$$

másrészt tetszőleges N *megszámlálható tranzitív ZFC-modellre*

$$M \subseteqq N, \quad G \in N \Rightarrow M[G] \subseteqq N. \qquad \square$$

A tétel bizonyítása bonyolult és hosszadalmas, mi csak egy-két lényeges részt emelünk ki belőle.

A továbbiakban rögzítsük M-et és $\mathbf{P} \in M$-et, és nézzük meg, hogyan kell felépíteni a 4.8-ban garantált $M[G]$ modellt. A következő definíció jogossága azon múlik, hogy M-ben teljesülnek a ZFC-beli axiómák, így a jólfundáltsági axióma is.

4.9. Definíció:

a) $a \in M$ ***P**-név,* ha

$$a = \{\langle b_i, p_i\rangle : i \in I\}$$

alakú valamely I indexhalmazra, $p_i \in P$ és b_i **P**-név minden $i \in I$-re.

b) $M^{\mathbf{P}} \stackrel{\text{def}}{:=} \{a \in M : a\ \mathbf{P}\text{-név}\}$. □

Az a) rész tehát így értendő: Az üres halmaz **P**-név, mert $I = \emptyset$-ként értelmezhető, ez legyen a 0-adik szint. Az első szint elemei legyenek

$$a = \{\langle \emptyset, p_i\rangle : i \in I\}$$

alakúak, és általában bármely α rendszámra az α-dik szint álljon olyan

$$a = \{\langle b_i, p_i\rangle : i \in I\}$$

alakú elemekből, ahol a b_i-k a $<\alpha$-dik szinteken lettek megkonstruálva. Az összes szinten megkonstruált elemek összessége adja $M^{\mathbf{P}}$-t. ($M^{\mathbf{P}}$ lényegében az összes lehetséges halmaz P elemeivel „felcímkézve", és ezek közül G fogja kiválasztani azokat, amelyek majd $M[G]$-t alkotják.) Jegyezzük meg, hogy van olyan φ formula, hogy

$$\varphi(a) \Leftrightarrow \text{„}a\ \mathbf{P}\text{-név"},$$

sőt φ abszolút formula.

Nézzük külön azokat a **P**-neveket, ahol az összes fellépő p_i éppen **1**.

4.10. Definíció:

a) $x \in M$ esetén *x neve*

$$\check{x} := \{\langle \check{y}, \mathbf{1}\rangle : y \in x\}$$

b)

$$\dot{G} := \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in P\}.$$ □

A fenti a) definícióban olyan **P**-neveket gyűjtöttünk össze, amelyek $M[G]$-ben (ill. l. a kiértékelés alábbi definícióját) M elemeit fogják kijelölni. A nevek halmazából G segítségével fogjuk $M[G]$ elemeit kiválasztani, és mivel minden G generikus halmaz tartalmazza **1**-et, ezzel biztosítjuk, hogy $M \subseteq M[G]$ legyen.

4.11. Definíció: Legyen $G \subseteq P$ tetszőleges rögzített generikus filter.

a) Tetszőleges $a \in M^{\mathbf{P}}$ **P**-név *kiértékelése*

$$a[G] \stackrel{\text{def}}{:=} \{b[G] : \langle b, p\rangle \in a \text{ valamely } p \in G\text{-re}\}.$$

b)

$$\overline{M[G]} \stackrel{\text{def}}{:=} \{a[G] : a \in M^{\mathbf{P}}\}.$$ □

Tehát durván szólva a kiértékelésnél az történik, hogy egy „a" **P**-nevet felírunk olyan alakban, amely csak kapcsos zárójeleket, $\emptyset$ jeleket és $\langle x, p_i\rangle$ szimbólumokat tartalmaz ($x \in M$). Ezek közül csak azokat hagyjuk meg, ahol $p_i \in G$, majd minden előfordulásnál eltüntetjük a $\langle ., p_i\rangle$ szimbólumokat, a maradékot összeolvasva kapjuk az $a[G]$-t.

Speciálisan

$$\check{x}[G] = x,$$

azaz M-beli elemek neveit kiértékelve az eredeti elemet kapjuk, így valóban $M \subset \overline{M[G]}$. Az $\overline{M[G]}$ egy megszámlálható jólfundált $\in$-struktúra, így 1.19. szerint izomorf egy (megszámlálható) tranzitív $\in$-modellel, amiről belátható, hogy ZFC-modell. Ez a modell pedig a keresett $M[G]$. A jelölések egyszerűsítése érdekében $M[G]$-t és $\overline{M[G]}$-t azonosítjuk.

Mivel $M[G]$ **P**-nevek kiértékeltjeiből áll, ezért

$$(\forall y \in M[G])(\exists \dot{y} \in M^{\mathbf{P}}) \quad \dot{y}[G] = y.$$

Ez az $\dot{y}$ elem általában nem egyértelmű. Másrészt

$$G = \dot{G}[G].$$

A forszolás erejét mutatja, hogy nemcsak $M[G]$ elemeit konstruáljuk $\dot{M}$-beli elemekből, hanem az $M[G]$-ben igaz formulákat is le tudjuk írni már M-ben:

4.12. Definíció: Legyen $n \in \omega$, $\dot{a}_i \in M^{\mathbf{P}}$ **P**-nevek $(i < n)$, φ tetszőleges elsőrendű formula és $p \in P$. Azt mondjuk, hogy *p forszolja* $\varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1})$-et, jelben

$$p \Vdash \varphi(\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1}) \quad \text{vagy} \quad p \Vdash \varphi(\dot{a}^{\rightarrow}),$$

ha minden $G \subseteq P$ M felett generikus filterre

$$p \in G \Rightarrow M[G] \models \varphi(\dot{a}_0[G], \ldots, \dot{a}_{n-1}[G]). \qquad \square$$

A következő két alapvető tétel bemutatja, hogyan lehet M-en belül eldönteni, hogy egy formula igaz-e $M[G]$-ben.

4.13. Tétel (Igazság lemma):

Tetszőleges φ formulára és a G P-generikus filterre, $\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_{n-1} \in M^{\mathbf{P}}$-re

$$M[G] \models \varphi(\dot{a}_0[G], \ldots, \dot{a}_{n-1}[G]) \quad \textit{pontosan akkor, ha}$$

$$(\exists p \in P) \quad p \Vdash \varphi(\dot{a}^{\rightarrow}). \qquad \square$$

4.14. Tétel (Teljességi vagy definiálhatósági lemma):

Tetszőleges φ formulára a $p \Vdash \varphi$ reláció formulával leírható. Azaz tetszőleges φ-hez van olyan Φ formula, hogy bármely $p \in P$, $\dot{a}^{\rightarrow} \subseteq M^{\mathbf{P}}$ esetén

$$p \Vdash \varphi(\dot{a}^{\rightarrow}) \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad M \models \Phi(p, \dot{a}^{\rightarrow}). \qquad \square$$

Hangsúlyozzuk azonban, hogy mindez csak étvágygerjesztésre elegendő. Sajnos magyar nyelven (tudomásunk szerint) más olvasnivaló nincs. (Csak a bevezetőben említett művek.)

Az alábbiakban Ajtai Miklós ötleteit felhasználva újabb tételeket és alkalmazásokat mutatunk.

A következőkben a Banach—Steinhaus-tétel általánosításaképpen egy következő típusú tételt látunk be: folytonos operátorsorozatból konstruktívan definiált operátor folytonos.

4.15. Tétel: *Legyen φ egy formula, amelyről ZFC-ben beláthatók a következők:*

a) „$(\forall B, C, T^0)$ *(B, C teljesen metrizálható topologikus vektorterek)* & $\varphi(B, C, T^0) \Rightarrow T^0$ *minden* $\vec{F} = \langle F_n \colon n \in \omega \rangle$ *folytonos lineáris operátorsorozathoz,* $F_n \colon B \to C$, *egy* $F = T^0(\vec{F}) \colon B \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ *konvex racionális leképezést rendel."*

Legyen

$$S := \{\vec{F} \colon \operatorname{Ran}(T^0(\vec{F})) \subseteq \mathbf{R}\}$$

és

$$T := T^0 \restriction S.$$

b) Legyenek $F_i \colon B \to C$ *folytonos lineáris operátorok és jelölje*

$$\langle F_i \colon i < n \rangle^{\to} := \langle F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}, F_{n-1}, F_{n-1}, \ldots \rangle;$$

ekkor $T(\langle F_i \colon i < n \rangle^{\to})$ *folytonos bármely* $n \in \omega$*-ra.*

c) Tetszőleges $\vec{F}$, $n \in \omega$ *és* $x \in B$ *esetén*

$$|T(\vec{F})(x)| > n \Leftrightarrow \left|T\left((\vec{F} \restriction m)^{\to}\right)\right| > n$$

elég nagy $m < \omega$*-ra.*

d) Ha $M \subseteq N$ *tranzitív ZFC-modellek,* $B_1, C_1 \in M$, $B_2, C_2 \in N$ *teljesen metrizálható vektorterek,* $B_1 \subseteq B_2$, $C_1 \subseteq C_2$ *sűrű és* B_2, *ill.* C_2 *metrikája* B_1, *ill.* C_1 *metrikájának kiterjesztése, továbbá, ha*

$$M \models \varphi(B_1, C_1, T_1^0), \quad N \models \varphi(B_2, C_2, T_2^0),$$

végül, ha tetszőleges $m < \omega$ *esetén az* $F_i^1 \colon B_1 \to C_1$, $F_i^2 \colon B_2 \to C_2$ $(i < m)$ *folytonos lineáris leképezésekre teljesül* $F_i^1 \subseteq F_i^2$, *akkor*

$$T_1^0(\langle F_i^1 \colon i < m \rangle^{\to}) \subseteq T_2^0(\langle F_i^2 \colon i < m \rangle^{\to}).$$

Ha a fenti négy tétel fennáll, akkor

$$ZFC \vdash \text{„Ha } B, C \text{ Banach-tér, } \varphi(B, C, T^0) \text{ és } \vec{F} \in \operatorname{Dom}(T), \text{ akkor } T(\vec{F}) \text{ folytonos"}.$$

A tétel első olvasásra bonyolultnak tűnik. Azonban, ha végiggondolunk néhány, operátorsorozatok folytonosságáról szóló tételt, a 2.6. Lemma és a jelen tétel bizonyítását, és alkalmazásait, akkor már érthetőbbek a feltételei.

A tétel bizonyítását egy fogalom bevezetésével készítjük elő.

4.16. Definíció (Levy hierarchia):

a) A φ és ψ formulákat *ekvivalensnek* mondjuk a *Γ formulahalmaz felett,* ha

$$\Gamma \vdash \text{„}\varphi \Leftrightarrow \psi\text{"}.$$

b) Egy φ formula *csak korlátos kvantorokat tartalmaz,* ha a benne levő kvantorok $(\exists x \in A)$, illetve $(\forall x \in A)$ alakúak (tehát halmazokon futnak).

c) A Σ_0 és a Π_0 formulaosztály olyan formulákból áll, melyek ZFC felett ekvivalensek egy csak korlátos kvantorokat tartalmazó formulával.

d) A φ formula *Σ_{n+1}-formula* (ill. *Π_{n+1}-formula*), ha ZFC felett ekvivalens egy

$$(\exists \vec{x})\psi(\vec{x}), \quad \text{illetve egy} \quad (\forall \vec{x})\psi(\vec{x})$$

alakú formulával, ahol ψ egy Π_n (ill. Σ_n)-formula.

e) A φ formula *Δ_n-formula,* ha ZFC felett ekvivalens egy ψ Σ_n- és egy ϑ Π_n-formulával. □

Speciálisan, a Δ_0 formulaosztály egybeesik a Σ_0 és Π_0 formulaosztállyal. Könnyen belátható, hogy a Δ_0 formulák abszolútak.

4.17. Definíció: Egy X halmazon értelmezett $\leqq$ parciális rendezést *parciális jólrendezésnek* nevezzük, ha nincsen olyan $\langle x_i\colon i<\omega\rangle$ sorozat X-beli elemekből, hogy

$$x_{i+1} \lneqq x_i \quad (\forall i\in\omega). \qquad \square$$

A következő állítás önmagában is érdekes, gyakran alkalmazhatjuk a modellelméletben.

4.18. Állítás ([3], [14]):

a) A $\varphi(X, y)=$ „$y\subseteq X\times X$ *és* y *parciális jólrendezés* X*-en" formula* Δ_1*-formula.*
b) A Δ_1*-formulák abszolútak a tranzitív* $\in$*-ZFC-modellekre nézve.*

BIZONYÍTÁS:

a) A

$$\psi(X,\leqq):= \text{„}(\forall f)[f\colon \omega\to X \text{ függvény} \Rightarrow (\exists n\in\omega) f(n+1) \not\lneqq f(n)]\text{"}$$

formula Π_1,

$$\begin{aligned}\vartheta(X,\leqq):= \text{„}(\exists f)[&f \text{ függvény } \& \operatorname{Dom}(f)=X \ \& \\ &\& \ (\forall x\in X)(f(x) \text{ rendszám}) \ \& \\ &\& \ (\forall x,y)(x\leqq y\in X \Rightarrow f(x)\leqq f(y))]\text{"}\end{aligned}$$

pedig egy Σ_1-formula, mivel

$$\text{„}x \text{ rendszám"} = (\forall z\in x)(\forall t\in z)(\forall t\in x) \ \&(\forall z\in x)(\forall t\in x)[z=t \vee z\in t \vee t\in z]$$

nyilván Δ_0 formula.
Belátható, hogy

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}\varphi \Leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \vartheta\text{"},$$

ahonnan az a) pont következik.
b) Legyenek $M\subseteq N$ $\in$-modellek és $\bar{x}\in M$, legyen φ egy Σ_1- és ϑ egy Π_1-formula, amire

$$\text{ZFC} \vdash \text{„}\psi \Leftrightarrow \vartheta\text{"}.$$

Akkor $M\models\psi(\bar{x})$-ból $N\models\psi(\bar{x})$ és $N\models\vartheta(\bar{x})$-ból $M\models\vartheta(\bar{x})$ következik; ennek igazolását az Olvasóra bízzuk. $\square$

A 4.15. Tétel bizonyítása:

Legyen M egy tranzitív ZFC-modell és tegyük fel, hogy

$$M \models \text{„}B, C \text{ teljesen metrizálható vektorterek } \& \ \varphi(B, C, T^0) \ \& \ \bar{F}\in\operatorname{Dom}(T)\text{"}.$$

Be kell látnunk, hogy $M\models$„$T(F)$ folytonos".

Legyen

$$P_0 := \{p\colon p \text{ függvény } \& \operatorname{Dom}(p) \subseteqq \omega \;\&\; \operatorname{Ran}(p) \subseteqq \{0, 1\},\ |p| < \omega\}$$

és legyen

$$p_0, p_1 \in P_0 \text{ esetén } p_1 \leqq_0 p_0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p_0 \subseteqq p_1.$$

Akkor a

$$\mathbf{P}_0 := \langle P_0, \leqq_0, \emptyset\rangle$$

hármas egy kényszerképzet (egy ún. Cohen-kényszerképzet). Vegyünk $\mathbf{P}_0$-ban egy tetszőleges G generikus filtert és legyen

$$N = M[G].$$

Jelöljük szokás szerint B_c, C_c-vel a B, illetve C terek N-beli teljessé tételével kapott tereket, legyen adott $\vec{F}$ és $n<\omega$ esetén $\bar{F}_n$ az F_n folytonos kiterjesztése $B_c \to C_c$ operátorrá, végül legyen $\vec{F}^{\to} := \langle \bar{F}_n\colon n<\omega\rangle$. Most d) alapján a B_c, C_c N-beli térpárba tartozó operátor T^0 kiterjesztése lesz, így bevezetjük rá a $\bar{T}^0$ jelölést. Tudjuk, hogy $T^0(\vec{F})$ konvex racionális funkcionál. Másrészt a 2.1. Tétel (l. Ajtai [1], [2]-ben) valójában úgy szól, hogy $N = M[G]$ megfelelő modell, ha G generikus filter $\mathbf{P}_0$-ban, azaz bármely M-beli elemekből mint paraméterekből definiálható konvex funkcionál folytonos. Eszerint $\bar{T}^0(\vec{F}^{\to})$ folytonosságához elég annyit belátni, hogy $\bar{T}^0(\vec{F}^{\to})$ egy konvex racionális funkcionál; és ehhez elég tudni, hogy

$$(*) \qquad \operatorname{Ran}(\bar{T}^0(\vec{F}^{\to})) \subseteqq \mathbf{R}.$$

Ezzel a bizonyítás is készen lesz, hiszen ha $\bar{T}^0(\vec{F}^{\to})$ folytonos N-ben, akkor a $T^0(\vec{F})$ megszorítása annál inkább folytonos M-ben. Bizonyítsuk tehát $(*)$-ot. Tudjuk, hogy

$$(**) \qquad \operatorname{Ran}(T^0(\vec{F})) \subseteqq \mathbf{R}.$$

Definiáljuk a

$$\langle Q, \leqq\rangle$$

parciálisan rendezett halmazt, mint azon

$$q = \langle n, S\rangle$$

párok halmazát, ahol $n \in \omega$ és

$$M \models „\left(S \subseteqq B \text{ zárt gömb, átmérője} \leqq \frac{1}{n}\right) \;\&$$

$$\& \; (\exists m \in \omega)(\forall x \in S)\left[T^0((\vec{F}\restriction m)^{\to})(x) > n\right]”.$$

A $q = \langle n, S\rangle$ és $q' = \langle n', S'\rangle$ párok parciális rendezése legyen a következő:

$$q \leqq q' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (n' > n) \;\&\; (S' \subseteqq S).$$

A b) és c) feltételek alapján azonnal látható, hogy

$$(*') \qquad M \models „\langle Q, \leqq\rangle \text{ parciálisan jólrendezett}”$$

pontosan akkor igaz, ha $(*)$; továbbá

$$(**') \qquad N \models „\langle Q, \leqq\rangle \text{ parciálisan jólrendezett}”$$

pontosan akkor igaz, amikor $(**)$. Másrészt, mivel a parciális jólrendezettség abszolút a tranzitív $\in$-modelleken, $(*')$ és $(**')$ is ekvivalensek, akkor pedig $(*)$ következménye lesz $(**)$-nak, amivel a bizonyítást befejeztük.

□

4.19. Megjegyzés:

Az a), b), c), d) feltételek automatikusan teljesülnek a következő egyenletes korlátossági tételekben, így azok speciális esetei a fenti tételnek.

(I) Egyenletes korlátosság tétele (ún. Banach—Steinhaus-tétel):

Ha B, C Banach-terek, $F_n\colon B\to C$ folytonos, lineáris és

$$\sup_n \|F_n(x)\|_C < \infty (\forall x\in B),$$

akkor

$$\sup_n \|F_n\| < \infty.$$

Ha pedig létezik az

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

limeszoperátor, akkor F is folytonos. □

(II) Egyenletes korlátosság tétele a m.m. való konvergenciára:

Ha B egy Banach-tér, $F_n\colon B\to L^0(0,1)$ folytonos lineáris és

$$\sup_n |F_n(x)(t)| < \infty (\forall x\in B)\big(\text{m.m. } t\in(0,1)\big),$$

akkor valamilyen c valós számra

$$\delta\big(F_n(x)\big) \leqq c\|x\|_B,$$

ahol δ az L^0-on a szokásos teljes metrika. (L. a 3.11. Állítás előtti definíciókat.) Ha pedig létezik az

$$F(x)(t) := \lim_{n\to\infty} F_n(x)(t)\,(\forall x\in B)\big(\text{m.m. } t\in(0,1)\big)$$

határérték, akkor F is folytonos. □

Nem ismert, hogy a c) és d) feltételek szükségesek-e a tétel állításához. Sajnos, erről többet nem tudunk.

Dolgozatunk hátralevő részében Ajtai 2.1. Tételét írjuk át olyan topologikus vektortérre, melynek topológiája nem metrizálható. Erre egy példa a $C_0^\infty(\Omega)$ tér, ami a disztribúcióelméletben az alapfüggvények tereként közismert (l. Rudin [14]). A bizonyítás részletesebb elemzéséből kitűnik, hogy más típusú topologikus vektortérben értelmezett konstruktív funkcionálok folytonosságát is be lehet bizonyítani. Pl.: legyen a V halmaz a $\langle V_n\colon n<\omega\rangle$ halmazsorozat növő úniója (azaz $V=$

$=\bigcup\{V_n\colon n<\omega\}$ és $V_n\subseteq V_{n+1}$, ha $n\in\omega$), legyen V vektortér, melynek V_n alterei ($n\in\omega$), legyen továbbá $\langle V_n, |.|_n\rangle$ Banach-tér (esetleg $|.|_n$ racionális félnorma, esetleg pszeudonorma) és tegyük fel, hogy V a $\langle V_n, |.|_n\rangle$ topologikus terek által generált gyenge topológiával teljes topologikus vektortér.

Mint tudjuk, $C_0^\infty(\Omega)$ a következőképpen adható meg:

4.20. Definíció: Legyen $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ egy nyílt halmaz (most $\mathbf{R}^n$ jelöli az ${}^n\mathbf{R}$ Descartes-szorzatot).

a) Egy $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ folytonos függvény *tartója*

$$\operatorname{supp}(f):=\{x\in\mathbf{R}^n\colon f(x)\neq 0\}.$$

b) $C_0^\infty(\Omega):=\{f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\colon \operatorname{supp}(f)$ az Ω egy kompakt részhalmaza és f akárhányadik rendű parciális deriváltjai léteznek Ω-n$\}$.

c) $f_k,\ f\in C_0^\infty(\Omega)$ esetén $f_k\xrightarrow{*}f\ (k\to\infty)$, ha

c_1) van olyan K kompakt halmaz, hogy $\operatorname{supp}(f_k)\subseteq K\subseteq\Omega$ $(\forall k\in\omega)$,

c^2) $D^{\mathbf{i}}(f_k)\to D^{\mathbf{i}}(f)$ egyenletesen bármely $\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_n)\in{}^n\omega$ multiindexre

$$\left(\text{definíció szerint } D^{\mathbf{i}}=\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\right).\qquad\square$$

Belátjuk a következőket:

4.21. Tétel: *Legyen M tetszőleges megszámlálható, tranzitív $\in$-ZFC-modell, $\mathbf{P}_0$ a 4.15. bizonyításában definiált Cohen-kényszerképzet és legyen $G\subseteq P_0$ generikus filter M felett. Legyen φ a következő formula:*

ZFC $\vdash$ „$(\exists!d)\varphi(d)$ & $(\forall d)[\varphi(d)\Rightarrow d$ *racionális konvex funkcionál $C_0^\infty(\Omega)$-ból $\mathbf{R}$-be*]”.

Akkor

$$M[G]\models \text{„}(\forall d)[\varphi(d)\Rightarrow d\ \textit{folytonos}]\text{”}.$$

A tétel bizonyításához két segédtételre lesz szükségünk.

4.22. Segédtétel: *Legyen M megszámlálható, tranzitív ZFC-modell, $\langle P,\leq,\mathbf{1}\rangle$ egy tetszőleges kényszerképzet, $p_0\in P$, $c\in M$ és legyen $\varphi(x,y,z)$ olyan formula, mely csak a jelzett változóit tartalmazza szabadon. Ha most*

$$p_0\Vdash(\exists!x)\varphi(x,\check{c},\dot{G}),$$

akkor van olyan $\dot{a}\in M^P$ név, melyre

$$p_0\Vdash\varphi(\dot{a},\check{c},\dot{G}).\qquad\square$$

Ez az állítás eléggé közismert, bizonyítása megtalálható pl. Shelah [18] vagy Kunen [14] könyvében és Ajtai [1], [2]-ben is. A jelölésekkel kapcsolatban jegyezzük meg, hogy az $M^{\mathbf{P}}$-beli neveket általában ponttal, de az M elemeit jelölő neveket $^\vee$ jellel jelöljük.

4.23. Definíció: Legyen $i\in\omega$-ra

$$\pi_i\colon \mathbf{P}_0\to\mathbf{P}_0$$

olyan leképezés, melyre

a) $$\mathrm{Dom}(\pi_i(p)) = \mathrm{Dom}(p) \quad (\forall p \in P)$$

b) $$(\pi_i(p))(j) \begin{cases} = p(j), & \text{ha} \quad j \in \mathrm{Dom}(p), j \neq i; \\ \neq p(i), & \text{ha} \quad i = j \in \mathrm{Dom}(p). \end{cases}$$ □

Könnyen látható, hogy π_i rendezéstartó bijekció $\mathbf{P}_0$-on, sőt

$$\pi_i^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{P}_0} \quad (\forall i \in \omega).$$

Emiatt világos, hogy π_i sűrű halmazt sűrűbe, filtert filterbe és generikust generikusba visz. Tudjuk továbbá, hogy

$$M[\pi_i G] = M[G].$$

4.24. Segédtétel (Ajtai [1], [2]): *Legyen $\psi(x, y, z)$ olyan formula, melynek csak a jelzett változói szabadok, és nem tartalmazza a $\dot{G}$ nevet. Legyen továbbá $p_0 \in P$,* $\mathrm{Dom}(p_0) \subseteq j_0 \in \omega$, $h \in \omega$, $h \geqq j_0$, *továbbá $\dot{b} \in M^{\mathbf{P}}$ olyan név, amelyre*

$$p_0 \Vdash \text{„}\dot{b} \textit{ függvény } \ \& \ \mathrm{Dom}(\dot{b}) = \check{\omega} \ \& \ (\forall n \in \check{\omega})\psi(\dot{b}(n), n, \check{c})\text{''}.$$

Ekkor van olyan $\dot{a} \in M^{\mathbf{P}}$ név, melyre

(i) $$p_0 \Vdash \text{„}\dot{a} \textit{ függvény } \ \& \ \mathrm{Dom}(\dot{a}) = \check{\omega} \ \& \ (\forall n \in \check{\omega})\psi(\dot{a}(n), n, \check{c})\text{''}.$$

Továbbá bármely G' G'' M feletti P_0-generikus filterekre $p_0 \in G'$, $p_0 \in G''$, $(\bigcup G')(k) = (\bigcup G'')(k)$ $(k \geqq h)$ esetén

(ii) $$(\dot{a}[G'])(k) = (\dot{a}[G''])(k) \quad (k \geqq h).$$

BIZONYÍTÁS:

Legyen

$$I := \{v : j < v < k \ \& \ (\bigcup G)(v) = 1\},$$

és

$$\pi^{(k)} := \prod_{v \in I} \pi_v, \quad G_k := \pi^{(k)}(G).$$

Mivel $\pi^{(k)}$ automorfizmus P_0-on, ezért G_k is generikus filter (nem jelöljük a rögzített j_0-tól való függést). Tudjuk továbbá, hogy

$$M[G_k] = M[G], \quad G_k \in M[G].$$

Vannak olyan paraméter nélküli φ_0 és φ_k formulák, hogy $l = 0$ és $l = k$ esetén

ZFC $\vdash$ „$(\forall x, y, z)[\varphi_l(x, y, z) \Rightarrow (x \ \mathbf{P}_0\text{-név} \ \& \ z \subseteq P_0)]$'',

$M[G] \models$ „$(\forall x, y)[\varphi_0(x, y, G) \Rightarrow (x \in M^{\mathbf{P}} \text{ név } \ \& \ y = x[G])]$'',

$M[G_k] \models$ „$(\forall x, y)[\varphi_k(x, y, G_k) \Leftrightarrow (x \in M^{\mathbf{P}} \text{ név } \ \& \ y = x[G_k])]$''.

Így található ZFC-nek olyan φ formulája, hogy tetszőleges $G \subseteq P_0$ M felett generikus filterre $p_0 \in G$ esetén az $M[G] \models$ „$\varphi(x, \dot{b}[G], G)$'' állítás pontosan akkor igaz, ha x függvény, $\mathrm{Dom}(x) = \omega$ és minden $k \in \omega$ esetén $x(k) = (\dot{b}[G_k])(k)$. Mivel $\dot{b} \in M^{\mathbf{P}}$ rögzített és a $\langle G_k : k < \omega \rangle$ sorozat eleme $M[G]$-nak, így

$$p_0 \Vdash \text{„}(\exists! x)\varphi, \dot{b}, \dot{G})\text{''}.$$

Most 4.22. alapján van olyan $a \in M^P$ név, amelyre

$$(\dot{a}[G])(k) = (\dot{b}[G_k])(k) \quad (k \in \omega)$$

tetszőleges $G \subset P_0$ generikus filter esetén. Tudjuk, hogy

$$p_0 \Vdash \text{„}(\forall k \in \check{\omega})\psi(\dot{b}[n], n, \check{c})\text{"},$$

és $p_0 \in G_k$ minden $k \in \omega$-ra, ebből pedig következik, hogy bármely G-re $p_0 \in G$ esetén

$$M[G] \models \text{„}\psi(\dot{a}[G], n, \check{c})\text{"}.$$

Ez bizonyítja (i)-t, hiszen ψ nem tartalmazza a $\dot{G}$ szimbólumot. Végül legyen G' és G'' olyan P_0-generikus filter M felett, hogy

$$(\cup G')(k) = (\cup G'')(k) \quad (k \geqq h),$$

akkor rögzített k esetén,

$$(\dot{a}[G'])(k) = (\dot{b}[G_k'])(k) = (\dot{b}[G_k''])(k) = (\dot{a}[G'']),$$

ami bizonyítja (ii)-t. □

Most rátérünk a 4.21. Tétel bizonyítására.

Legyen M tetszőleges megszámlálható tranzitív ZFC-modell és φ olyan formula, amelyről a tétel szól. Tegyük fel indirekte, hogy van olyan $G \subseteqq P_0$ generikus filter és $d \in M[G]$, hogy

$$M[G] \models \text{„}\varphi(d) \;\&\; d \text{ nem folytonos"}.$$

Jelöljük $M[G]$-t N-nel. Ha $\mathcal{O}$ jelöli N-ben az azonosan 0 függvényt $\mathbf{R}^n$-ből $\mathbf{R}$-be, akkor van olyan $\langle f_k\colon k \in \omega\rangle \in N$ függvénysorozat, $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ és $t \in \omega$, amelyre

$$N \models \text{„}(\forall_{\mathbf{i}} \text{ multiindexre } D^{\mathbf{i}} f_k \to \mathcal{O} \text{ egyenletesen}) \;\&\; (\forall k \in \omega)\left(|d(f_k)| > \frac{1}{t}\right)\text{"}.$$

Ármost (N-ben okoskodva) kiválasztható olyan $\langle f_{k_r}\colon r \in \omega\rangle$ részsorozat, hogy minden $\mathbf{i}$ multiindexhez van olyan $r(\mathbf{i})$, amire

$$\|D^{\mathbf{i}} f_{k_r}\|_\infty \leqq \frac{1}{10^r t} \quad (\forall r > r(\mathbf{i})),$$

ahol $\|.\|_\infty$ a szokásos supremum-norma.

Ezért találhatók olyan $0 < q_r < t$ racionális számok, hogy a

$$g_r := q_r 5^r f_{k_r}$$

jelölés mellett fennáll

$$\frac{3}{4} 5^r < d(g_r) < 5^r \quad (\forall r \in \omega).$$

Továbbá, $q_r < t$ miatt minden $\mathbf{i}$ multiindexre

$$\|D^{\mathbf{i}} g_r\|_\infty \leqq \frac{1}{2^r} \quad (\forall r \geqq r(\mathbf{i})).$$

Innen következik, hogy minden $\mathbf{i}$-re

$$\sum_{k\in\omega}(\cup G)(k)\,\|D^{\mathbf{i}}g_k\|_\infty<\infty.$$

(Vegyük észre, hogy $\cup G$ egy ω-ból $\{0,1\}$-be képező függvény, $(\cup G)(k)$ pedig 0 vagy 1 minden $k<\omega$-ra.) Így létezik a

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}(\cup G)(k)\,g_k$$

összegfüggvény, nevezetesen a sor konvergens a $\xrightarrow{*}$ limeszfogalomra nézve. Így tehát $h\in C_0^\infty(\Omega)$ és így $d(h)<u$ valamely $u\in\omega$ természetes számra. A fenti állításokat leírhatjuk egy ψ formulával. Mivel ψ igaz N-ben, annak teljesülését forszolja egy $p_0\in P_0$ feltétel. Azaz

$$\begin{aligned} p_0\Vdash \text{„}(\forall_{\mathbf{i}}\ \text{multiindexre})(\forall k>r(\mathbf{i}))\,\|D^{\mathbf{i}}(g_k)\|\leqq\left(\frac{1}{2^k}\right)^{\check{}} \\ \&\ \dot{h}=\sum_{k\in\omega}(\cup\dot{G})(k)\,\dot{g}_k\ \&\ \dot{d}(\dot{h})<\check{u}\ \& \\ \&\ (\forall n\in\check{\omega})\left[\left(5^k\frac{3}{4}\right)^{\check{}}<\dot{d}(\dot{g}_k)<(5^k)^{\check{}}\right]\text{”}. \end{aligned}$$

Legyen most

$$j_0>\max\{u,\ \max(\mathrm{Dom}(p_0))\}.$$

Alkalmazzuk a 4.24-et a következő mennyiségekre.

Legyen

$$\dot{b}(k):=(\cup\dot{G})(k)\,\dot{g}_k,$$

továbbá a 4.24-beli h legyen egyenlő (k_0+1)-gyel és legyenek G', G'' generikus filterek M felett úgy, hogy

$$(\cup G')(j)=(\cup G'')(j)\Leftrightarrow j\neq j_0,$$

azonkívül $p_0\in G'$, $p_0\in G''$. Most $M[G']=M[G'']$-ben érvelve felírható a következő becsléslánc:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}5^{k_0}\leqq d(g_{k_0})=d\Big(\sum_{k\in\omega}(\cup G')(k)\,g_k-\sum_{k\in\omega}(\cup G'')(k)\,g_k\Big)\leqq \\ \leqq d\Big(\sum_{k\in\omega}(\cup G')(k)\,g_k\Big)+d\Big(\sum_{k\in\omega}(\cup G'')(k)\,g_k\Big)\leqq 2n, \end{aligned}$$

ami ellentmondás. □

Végezetül megemlítünk még egy alkalmazást Ajtai [2]-ből, mely hasonló módon is igazolható.

4.25. Tétel (Hurwitz): *Ha $\langle f_n(z)\colon n<\omega\rangle$ $T\subseteqq\mathbf{C}$-n értelmezett komplex változós reguláris függvények egy sorozata, és $f_n\to f$ egyenletesen, $f\not\equiv 0$, akkor a*

$$(\forall z\in T)(\forall n<\omega)\quad f_n(z)\neq 0$$

feltételből következik, hogy

$$(\forall z\in T)\quad f(z)\neq 0.$$ □

Várhatóan a módszernek még további alkalmazásai kerülnek napvilágra a jövőben. Végül megfogalmazunk néhány problémát.

1. Probléma: Adjunk meg olyan formulaosztályt, amelyben érvényes a következő állítás:

Ha ilyen formulával definiálunk Banach-tereket és ezek között ható lineáris leképezéseket, majd ezek realizálását az $M \subseteqq N$ tranzitív megszámlálható ZFC-modellekben, akkor megadható egy izometrikus beágyazása az M-ben realizált tereknek az N-ben realizáltakba, ami természetes abban az értelemben, hogy a formulával definiált leképezésekkel felcserélhető (l. a 2.6. Segédtételt).

2. Probléma: A 4.15. Tételből elhagyható-e, illetve egyszerűsíthető-e a c) és d) kikötés?

3. Probléma: Meddig élesíthető a 4.21. (illetve a 2.1.) Tétel?

IRODALOM

[1] AJTAI MIKLÓS: On the boundedness of definable linear operators, *Periodica Math. Hung.* **5** (1974), 343—352.
[2] AJTAI MIKLÓS: *Definiálható Banach-terek*, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1974.
[3] J. BARWISE: Introduction to First Order Logics, in: *Handbook of Mathematical Logic*, J. Barwise ed, North-Holland, Amsterdam, 1977 (orosz fordítás: *Справочная книга по математической логике*, Ред. Барвайс, Часть II, Наука, Москва, 1982).
[4] J. BURGESS: Forcing, ugyancsak a [3] monográfiában.
[5] P. J. COHEN: *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1966 (orosz fordítás: Коэн: *Теория множеств и проблема континуума*, Москва).
[6] CSÁSZÁR ÁKOS: *Bevezetés az általános topológiába*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.
[7] CSÖRGŐ ISTVÁN: A helyettesítési axióma függetlenségének egyszerű bizonyítása, *Matematikai Lapok* **32** (1981—1984), 145—151.
[8] A. A. FRANKEL, Y. BAR-HILLEL, A. LEVY: *Foundations of set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
[9] HAJNAL ANDRÁS, HAMBURGER PÉTER: *Halmazelmélet*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
[10] P. R. HALMOS, L. E. SIGLER: *Elemi halmazelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1981.
[11] J. JECH: *Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forcing*, Springer, Berlin, 1971 (orosz fordítás: Йэх: *Лекции по теории множеств и метод форсинга*, Мир, Москва, 1973).
[12] T. JECH: *Set Theory*, Acad. Press, New York, 1978.
[13] T. JECH: *Multiple Forcing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
[14] K. KUNEN: *Set Theory — An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
[15] K. KUNEN: Random and Cohen Reals, in: *Handbook of Set Theoretical Topology*, ed. K. Kunen and V. Vaughan, North-Holland, Amsterdam, 1984.
[16] NÉMETI ISTVÁN: *A matematikai logika alapjai*, egyetemi előadásanyag, ELTE TTK kézirat, 1982.
[17] W. RUDIN: *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973 (orosz fordítás: Рудин: *Функциональный анализ*, Москва).
[18] S. SHELAH: *Proper Forcing*, Springer, Berlin, 1982.
[19] J. R. SHOENFIELD: *Mathematical Logics*, Addison—Wesley, Series in Logics, 1967 (orosz fordítás: Шенфилд: *Математическая логика*, Наука, Москва, 1975).
[20] J. R. SHOENFIELD: Unramified Forcing, in: *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. **13**, Amer. Math. Soc., Providence, 1972, 357—381 (orosz fordítás: [19] függelékében).
[21] URBÁN JÁNOS: *Matematikai logika*, Középiskolai tankönyv, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
[22] RUZSA IMRE, URBÁN JÁNOS: *Matematikai logika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

(Beérkezett: 1987. augusztus 7-én)

О «ПРИНЦИПЕ БАНАХА»

М. ХОРВАТ, И. ЙО и И. САЛКАИ

M. Ajtai в [1], [2] доказал что если мы дадим Cohen-генерическое вещественное число к любой модели от ZFC, в новой модели следующая теорема сбытся: «Каждый линеарный оператор между пространствами Банаха (операторы и пространства определяются формулами первого порядка) непрерывный.» Когда эти формулы абсолютны в каким-том смысле, мы получим абсолютные теоремы (например Теоремы 2.4 и 2.6). Мы обобщаем эту и другие теоремы [1], [2] в теоремах 4.15 и 4.21.

Кроме того мы дадим применения: докажем абсолютные теоремы в анализе, используем методы математической логики (Теоремы 3.21 и 4.19). В статье мы напишем элементарное введение в теорию логики первого порядка и конструктивную теорию множеств (часть 1) и метод форсинга (часть 4).

ON „BANACH'S PRINCIPLE"

M. HORVÁTH, I. JOÓ and I. SZALKAI

M. Ajtai proved in [1] and [2] that adding a Cohen-generic real to any model of ZFC, in the generic extension every linear operator between Banach spaces (all the spaces and the operators are definable by first order formulae) is continuous.

When the formulae above satisfy certain absoluteness conditions, we can derive absolute theorems (see e.g. Theorems 2.4 and 2.6). We generalize this and Ajtai's other theorems in Theorems 4.15 and 4.21. Further, we give applications: derive absolute theorems in analysis using mathematical logical methods (Theorems 3.21 and 4.19). We also give an elementary introduction into the theory of first order logics, constructive set theory (Section 1) and Cohen's forcing method (Section 4).