Matematika I. – 4. gyakorló feladatsor

Gazdálkodási és közgazdász szakos I. évf. hallgatók számára (2005)

Sorok

1. **Feladat.** Számítsuk ki a következő sorok összegét!

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{20}{10^k}$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2k+1}}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{10^k}$ (e) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{2}{5^{k+1}}\right)$ (f) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{2}{10^{k+1}}\right)$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (h) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{3}{4-5k+k^2}$

2. **Feladat.** Konvergensek-e a következő sorok?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10^{\frac{1}{n+1}}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+121}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ (k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot 2^{1-n}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(3n+4)\cdot 5^n}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$ (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{4n+1}$ (r) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{100} \cdot 2^{-2n}$

3. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyik abszolút konvergens, melyik feltételesen konvergens és melyik divergens!

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{1-n^2}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1-9n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^n$

4. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a $t \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékeinél lesznek abszolút ill. feltételesen konvergensek az alábbi sorok!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{t}\right)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n$

5. **Feladat.** Melyek Leibniz típusúak a következő sorok közül?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2-2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{4n+1}{5n-2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$

6. **Feladat.** Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha az alábbi sorok esetén azok összegét a nyolcadik részletösszeggel közelítjük? Az alábbi sorok hányadik részletösszege közelíti meg a sor összegét 10^{-3}-nál kisebb hibával?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

7. **Feladat.** Mutassuk meg (a sorok konvergenciájának szükséges feltételét felhasználva), hogy az alábbi sorozatok 0-hoz tartanak!

(a) $a_n = \frac{n^5}{2^n}$ (b) $a_n = \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}$ (c) $a_n = \frac{3^n}{2^{n^2}}$ (d) $a_n = \frac{100^n}{\sqrt{n!}}$

Jó munkát!