Matematika I. – 3. gyakorló feladatsor

Gazdálkodási és közgazdász szakos I. évf. hallgatók számára (2005)

Számsorozatok határértéke

1. **Feladat.** A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be az alábbi állításokat és határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-4}$-hez tartozó küszöbszámot!

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n+1}\right)^2 = 0$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4-n^2}{8+2n^2} = -\frac{1}{2}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2+3n^2} = \frac{1}{3}$

2. **Feladat.** Határozzuk meg az a_n sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n-1}$ $a_n = -\frac{3}{n^2}$ $a_n = n - n^2$

$a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$ $a_n = 2 + 4n$ $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{2n+3}$ $a_n = \frac{-n^2+5}{5n^2-2n}$ $a_n = n^3 + (-1)^{n-1} \cdot n^3$

$a_n = \sqrt[3]{\frac{2n^2+7n-1}{16n^2-8n+2}}$ $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $a_n = \sqrt{n^2-1} - n$

$a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ $a_n = \frac{2^n - 4^n}{2^n + 4^n}$ $a_n = n^2 + \frac{2}{4^n+2}$

$a_n = \frac{2n+3}{5n-1} \cdot \frac{3^n}{2^{2n}-1}$ $a_n = \frac{\sqrt[n]{3}}{1+\sqrt[2n]{5}}$ $a_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$ $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1}$ $a_n = \frac{(-3)^n}{2^n+3^n}$

$a_n = \frac{2^n+3^n}{1+4^n}$ $a_n = \frac{3^n}{(-2)^n+3^n}$ $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)^n$

$a_n = (-2)^n + 3^n$ $a_n = \left(\frac{3}{3+(-1)^n}\right)^n$ $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$

$a_n = \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$ $a_n = \sqrt[n]{1+2^n}$ $a_n = \sqrt[n]{\frac{1+n}{2+n}}$

$a_n = \sqrt[n]{n^2+4n+12}$ $a_n = \sqrt[n]{n^2+2^n}$ $a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$

$a_n = \sqrt[n]{100+2^{-n}}$ $a_n = \frac{n}{\sqrt{2+n^2}}$ $a_n = \sqrt[n]{3^n-2^n}$

$a_n = \left(4+\frac{1}{n}\right)^n$ $a_n = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$ $a_n = \left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{n+1}$

$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^3+5}$

3. **Feladat.** Mely a valós számok esetén van határértéke az a_n sorozatnak? Számítsuk ki a megfelelő határértéket!

(a) $a_n = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n$ (b) $a_n = \frac{1}{1+a^{2n}}$

(c) $a_n = \frac{a^n}{1+a^n}$ $a \neq -1$

Jó munkát!