

6. Stabilitáselmélet

6.1. Autonóm nemlineáris rendszerek

Legyen $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ekkor az általános elsőrendű explicit nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer alakja

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

A t független változó az alkalmazások nagy részénél az időt jelöli, ezért a differenciálegyenletek elméletében is szokás a t változóról, mint idő változóról beszélni. Ha a fenti egyenlet jobb oldala, azaz az \mathbf{f} függvény nem függ a t változótól, akkor az egyenletet *időfüggetlen* vagy *autonóm* egyenletnek hívjuk. Egy autonóm rendszer általános alakja tehát

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (6.1)$$

ahol $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vagy általánosabban $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $\mathbf{y}(t)$ megoldása a (6.1) egyenletnek, akkor $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t + \tau)$ is megoldása a (6.1) egyenletnek bármely τ -ra. Azaz a megoldások időeltoltjai is megoldások. Ezért az általánosítás megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a $t_0 = 0$ kezdeti időpontban adjuk meg a kezdeti feltételt:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}. \quad (6.2)$$

A (6.1) egyenlet (6.2) kezdeti értékhez tartozó megoldását $\mathbf{x}(t; \mathbf{z})$ -vel jelöljük.

A (6.1) egyenlet egy $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}$ konstans megoldását a (6.1) egyenlet *egyensúlyi helyzetének* vagy *kritikus pontjának* hívjuk. Egy konstans megoldás deriváltja az azonosan 0 függvény, így az egyensúlyi helyzetek pontosan \mathbf{f} az függvény gyökei lesznek.

6.1. Tétel. *Egy \mathbf{u} konstans vektor akkor és csak akkor egyensúlyi helyzete a (6.1) egyenletnek, ha $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.*

Egy $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $t \in I$ megoldás *integrálgörbéjének* nevezzük a

$$\{(t, \mathbf{x}(t)) : t \in I\}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ térbeli görbét, azaz a megoldás függvény grafikonját. Természetesen a koordinátánkénti $\{(t, x_i(t)) : t \in I\}$ ($i = 1, \dots, n$) integrálgörbét tudjuk geometriailag is ábrázolni, $n > 2$ esetében az integrálgörbét nem tudjuk felrajzolni. Azt az \mathbb{R}^n -beli görbét, amelynek paraméterezése az \mathbf{x} megoldás képlete, azaz az

$$\{\mathbf{x}(t) : t \in I\}$$

\mathbb{R}^n -beli görbét, a megoldás *fázisgörbéjének* vagy *trajektóriájának* hívjuk, az \mathbb{R}^n teret pedig *fázissíknak* is szokás hívni. Két- illetve háromdimenziós esetben tudjuk a fázisgörbéket ténylegesen felrajzolni.

6.2. Példa. Tekintsük a

$$v'' + v = 0$$

másodrendű homogén lineáris skaláris differenciálegyenletet. Tudjuk, hogy ennek általános megoldása $v(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. A skaláris egyenletet rendszer alakra hozhatjuk az $x = v$, $y = v'$ és $\mathbf{x} = (x, y)^T$ változók bevezetésével:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Az egyenlet az

$$\mathbf{x}(0) = (0.5, 0)^T, \quad \mathbf{x}(0) = (1, 0)^T, \quad \mathbf{x}(0) = (0, 1.5)^T, \quad \mathbf{x}(0) = (0, 2)^T$$

kezdeti feltételből indítva oldottuk meg. A megoldások komponensenkénti integrálgörbéi a 6.12. és 6.13. Ábrán láthatók. Például az $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$ kezdeti feltételhez tartozó megoldás $\mathbf{x}(t) = (\cos t, -\sin t)^T$. Ennek a fázisgörbéjének a paraméteres egyenlete tehát

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t,$$

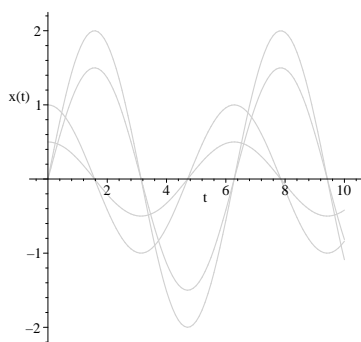
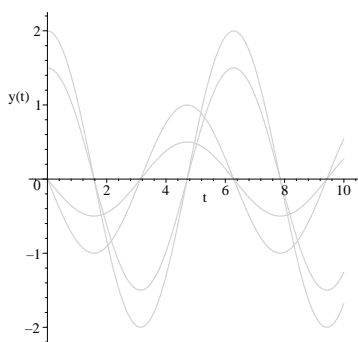
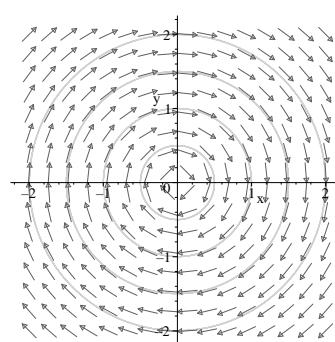
amely egy egységsugarú kör, hiszen

$$x^2 + y^2 = 1$$

teljesül a görbe mentén. Most számítsuk ki az $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ és $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$ általános megoldás esetében is az $x^2 + y^2$ értékét:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (c_1 \cos t + c_2 \sin t)^2 + (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)^2 \\ &= c_1^2 \cos^2 t + c_2^2 \sin^2 t + 2c_1 c_2 \cos t \sin t + c_1^2 \sin^2 t + c_2^2 \cos^2 t - 2c_1 c_2 \cos t \sin t \\ &= c_1^2 + c_2^2. \end{aligned}$$

Azaz ebben az esetben is a trajektória egy origó középpontú, $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ sugarú kör. Lásd a 6.14. Ábrát, ahol a négy fázisgörbével (origó középpontú körök) együtt az egyenlet iránymezőjét is ábrázoltuk. Látható, hogy a fázisgörbék símulnak az iránymezőhöz. □

6.12. Ábra. $x(t)$ 6.13. Ábra. $y(t)$ 

6.14. Ábra. fázissík

Autonóm egyenletek néhány fontos geometriai tulajdonságait foglaltuk össze az alábbi tételekben:

6.3. Tétel. *Egy autonóm rendszer különböző trajektóriái nem metszik egymást.*

6.4. Tétel. *Egy autonóm rendszer bármely trajektóriája vagy*

- (a) *önmagát át nem metsző görbe (azaz egyszerű görbe) vagy*
- (b) *egyszerű zárt görbe vagy*
- (c) *egy pont.*

Egy trajektória pontosan akkor egy pont, ha az egy egyensúlyi helyzet trajektóriája, és egyszerű zárt görbe trajektóriája pontosan a periodikus megoldásoknak van.

6.5. Tétel. *Ha (6.1) egy \mathbf{x} megoldására a*

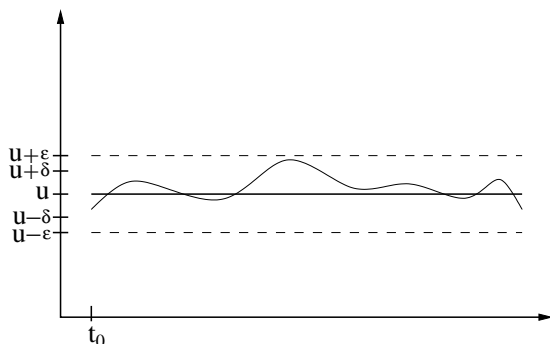
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{u} \quad (\text{vagy} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{u})$$

véges határérték létezik, akkor \mathbf{u} egyensúlyi helyzete a (6.1) egyenletnek.

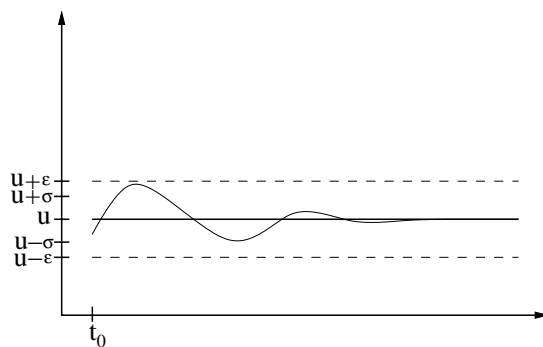
6.2. Stabilitási fogalmak

Jelölje egy $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ vektor normáját $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Legyen \mathbf{u} egy rögzített egyensúlyi helyzete a (6.1) egyenletnek. Az \mathbf{u} egyensúlyi helyzetet *stabilnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|\mathbf{z} - \mathbf{u}\| < \delta$, akkor $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{z}) - \mathbf{u}\| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq 0$ -ra. Az \mathbf{u} egyensúlyi helyzetet *instabilnak* nevezzük, ha nem stabil.

Az \mathbf{u} egyensúlyi helyzetet *aszimptotikusan stabilnak* nevezzük, ha stabil, továbbá létezik olyan $\sigma > 0$, hogy ha $\|\mathbf{z} - \mathbf{u}\| < \sigma$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{z}) = \mathbf{u}$ teljesül.



6.15. Ábra. stabil egyensúlyi helyzet



6.16. Ábra. aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet

Egy stabil egyensúlyi helyzet tehát olyan, hogy az egyenlet megoldásai tetszőlegesen közel maradnak az egyensúlyi helyzethez, feltéve, hogy az egyensúlyi helyzethez elegendően közel indítottuk a rendszert (lásd a 6.15. Ábrát). Az aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet közeléből indított megoldások ezen kívül még az egyensúlyi helyzethez is tartanak (lásd a 6.16. Ábrát).

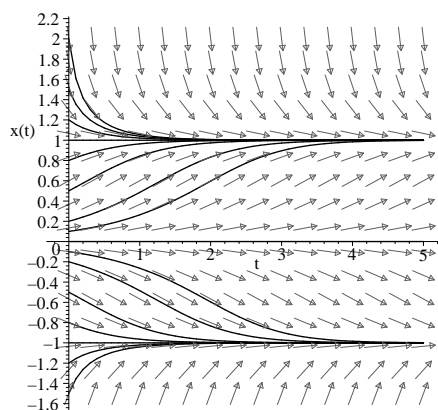
6.6. Példa. Tekintsük az

$$x' = x - x^3$$

elsőrendű homogén lineáris skaláris differenciálegyenletet. Ennek három egyensúlyi helyzete van: $u = 0, 1$ és -1 , az $u - u^3 = 0$ egyenlet gyökei. A 6.17. Ábrában kirajzoltuk az egyenlet néhány kezdeti értékhez tartozó megoldásának integrálgörbéit, valamint az egyenlet egy iránymezőjét is. (A vízszintes tengely a t -tengely, a függőleges pedig az x -tengely.) Látható, hogy a $0, 1$ és -1 kezdeti értékekhez konstans megoldások tartoznak. Minden az $x = 0$ és $x = 1$ egyenesek közötti ponton átmenő megoldás érintőjének meredeksége pozitív, azaz ebben a sávban a megoldások mind monoton nőnek. (Megmutatható az is, ahogy azt az ábrából látjuk is, hogy minden megoldás ebben a sávban 1 -hez tart. Az $x = 1$ egyenes feletti sávban pedig minden megoldás monoton csökkenve tart 1 -hez. Az $x = 0$ és $x = -1$ egyenes közötti sávban a megoldások -1 -hez tartanak, $x = -1$ alatt pedig minden megoldás -1 -hez tart. Ebből következik, hogy az origó instabil, hiszen bármely közel is indítjuk a megoldást 0 -hoz, a megoldás vagy 1 -hez vagy -1 -hez fog tartani, azaz nem marad az origó kis környezetén belül. Az 1 és a -1 egyensúlyi helyzetek pedig aszimptotikusan stabilak.

□

6.7. Példa. Tekintsük újra a 6.2. Példában vizsgált 2×2 -es rendszert, amelynek trajektóriái a 6.14. Ábrán láthatók. A rendszernek egy egyensúlyi helyzete van, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Ez stabil, hiszen a 6.14. Ábrából látható, hogy bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetét vesszük az origónak, akkor a $\delta = \varepsilon$ sugarú környezetén belül indított trajektóriák ugyanezen környezeten belül maradnak, mivel minden trajektória kör. Az egyensúlyi helyzet viszont nem aszimptotikusan stabil, hiszen a trajektóriák nem tartanak az origóhoz. A stabilitás a 6.12. és a 6.13. Ábrából is látható, hiszen a megoldás $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ és $y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$, amelynek amplitúdója $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$,

6.17. Ábra. $x(t)$

ami pedig pont $\|\mathbf{x}(0)\| = \|(x(0), y(0))\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. \square

Az ebben a szakaszban definiált stabilitási fogalmakat Ljapunov-féle stabilitásnak is szokták nevezni, hogy megkülönböztessék őket az irodalomban használt több tucat egyéb stabilitási fogalomtól.

Ki lehet terjeszteni a Ljapunov-féle stabilitás, instabilitás és aszimptotikus stabilitás definícióját nemautonóm egyenletekre is, de ezzel itt nem foglalkozunk.

6.3. Kétdimenziós autonóm homogén lineáris rendszerek egyensúlyi helyzetei

Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6.3)$$

autonóm homogén lineáris rendszert, ahol \mathbf{A} egy 2×2 -es invertálható mátrix. Ekkor a rendszernek az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ az egyetlen egyensúlyi helyzete. Lineáris algebrából ismert, hogy \mathbf{A} pontosan akkor invertálható, ha 0 nem sajátértéke \mathbf{A} -nak.

Legyen λ_1 és λ_2 az \mathbf{A} két sajátértéke. Hat esetet különböztetünk meg.

1. eset: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ azonos előjelű valós sajátértékei \mathbf{A} -nak.

Ekkor az előző fejezet alapján az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \quad (6.4)$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok.

Ha vesszük a $c_2 = 0, c_1 \neq 0$ speciális esetet, akkor a hozzá tartozó megoldás $\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}$, azaz koordinátáinként kiírva

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1^{(1)} \\ x_2 &= c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_2^{(1)}. \end{aligned}$$

A két egyenletet egymással elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\xi_2^{(1)}}{\xi_1^{(1)}},$$

azaz

$$x_2 = \frac{\xi_2^{(1)}}{\xi_1^{(1)}} x_1.$$

Ennek grafikonja egy origón átmenő egyenes, amelynek meredeksége $\xi_2^{(1)}/\xi_1^{(1)}$. Így ez az egyenes pontosan a $\xi^{(1)}$ vektor által meghatározott irányba mutat. Ugyanígy látható, hogy ha a $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ paraméter választást használjuk, akkor a megoldás trajektóriája az origón átmenő, $\xi^{(2)}$ irányú egyenes lesz.

Az általános, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ esetben a megoldások trajektóriái síkbeli görbék, amelyek paraméteres egyenletrendszere

$$x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_1^{(2)} \quad (6.5)$$

$$x_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_2^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2^{(2)}. \quad (6.6)$$

Ha λ_1 és λ_2 mindkettő negatív, akkor az előbbi egyenletekből látható, hogy $x_1(t) \rightarrow 0$ és $x_2(t) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$, azaz a görbék az origóba tartanak, ha $t \rightarrow \infty$. Stabilitási szempontból tehát ebben az esetben az origó aszimptotikusan stabil lesz, és minden trajektória az irányítása mentén az origóba tart. Másrészt, ha $t \rightarrow -\infty$, akkor $x_1(t) \rightarrow \infty$ és $x_2(t) \rightarrow \infty$, azaz a trajektóriák az irányításukkal ellentétes irányban a végtelenbe tartanak.

Tegyük fel például, hogy $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Ekkor a (6.4) képletet átalakítva kapjuk, hogy

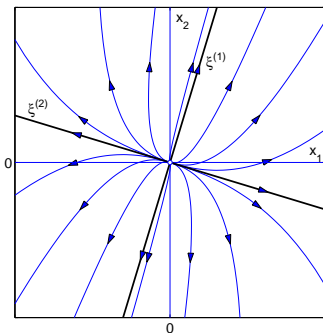
$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_2 t} \left(c_1 e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} \right). \quad (6.7)$$

Mivel ebben az esetben $e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$, ezért nagy t -re

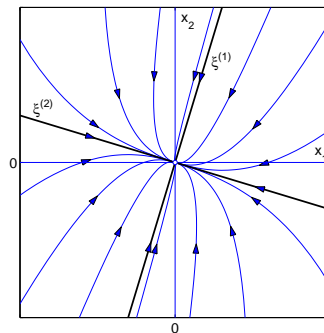
$$\mathbf{x}(t) \approx c_2 e^{\lambda_2 t} \xi^{(2)}, \quad (6.8)$$

azaz a megoldás grafikonja közel van a $\xi^{(2)}$ által meghatározott egyeneshez. Megmutatható, hogy ezek a görbék érintik az egyenest. A trajektóriák tipikus alakja a 6.19. ábrán látható. Az egyensúlyi helyzetet ebben az esetben *aszimptotikusan stabil csomópontnak* nevezzük.

Fordítva, ha $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, akkor a különbség az, hogy most $t \rightarrow \infty$ esetén mindkét a megoldás koordinátája a végtelenbe tart, azaz a görbe az irányítása mentén a végtelenbe tart. Ha pedig $t \rightarrow -\infty$, akkor a görbe az origóba tart. Most is indokolható, hogy ha t nagy abszolút értékű negatív szám, akkor a (6.7) összefüggésből (6.8) következik, azaz a görbék a $\xi^{(2)}$ vektor irányú egyeneshez símulnak $t \rightarrow -\infty$ esetén. Egy tipikus eset trajektóriái a 6.18. ábrán láthatók. Ebben az esetben az origót *instabil csomópontnak* hívjuk.



6.18. Ábra. instabil csomópont



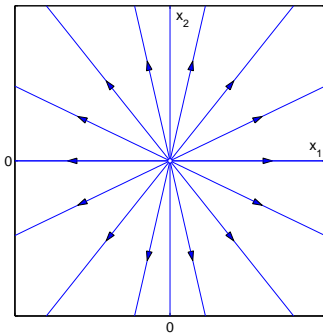
6.19. Ábra. aszimptotikusan stabil csomópont

2. eset: $\lambda_1 = \lambda_2$ azonos előjelű valós sajátértékei A -nak, amelynek geometriai multiplicitása 2.

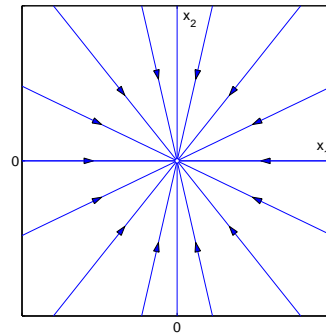
A (6.3) egyenlet megoldásának képlete ebben az esetben is (6.4), de most ez a paraméterezés nem csak a $c_1 = 0$ vagy $c_2 = 0$ esetben definiál egyenest, hanem a $c_1 \neq 0$ és $c_2 \neq 0$ esetben is, hiszen a (6.5)-(6.6) egyenletrendszer alakja most

$$\begin{aligned}x_1 &= e^{\lambda_1 t} (c_1 \xi_1^{(1)} + c_2 \xi_1^{(2)}) \\x_2 &= e^{\lambda_1 t} (\xi_2^{(1)} + c_2 \xi_2^{(2)}),\end{aligned}$$

amiből $x_2 = mx_1$ következik, ahol $m = (\xi_2^{(1)} + c_2 \xi_2^{(2)}) / (c_1 \xi_1^{(1)} + c_2 \xi_1^{(2)})$. Tehát jelen esetben minden trajektória az origóból induló félegyenes. Ha $\lambda_1 < 0$, akkor minden trajektória az irányítása mentén az origóba tart, ha pedig $\lambda_1 > 0$, akkor a trajektória az irányítása mentén a végtelenbe tart (lásd a 6.20. és 6.21. Ábrákat). Ebben az esetben is *csomópontnak* nevezzük az egyensúlyi helyzetet, amely instabil, ha $\lambda_1 > 0$, ill. aszimptotikusan stabil, ha $\lambda_1 < 0$. Ebben az esetben a sajátvektoroknak nincs kitüntetett szerepük az ábrában (minden vektor egyébként sajátvektor).



6.20. Ábra. instabil csomópont



6.21. Ábra. aszimptotikusan stabil csomópont

3. eset: $\lambda_1 = \lambda_2$ valós sajátértékei A -nak, amelynek geometriai multiplicitása 1.

Ekkor a (6.3) egyenlet megoldása

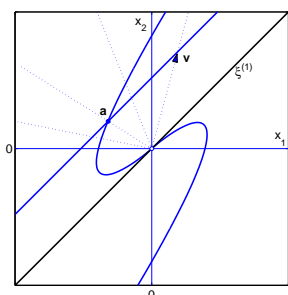
$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2 e^{\lambda_1 t} (t \boldsymbol{\xi}^{(1)} + \boldsymbol{\eta}),$$

ahol $\boldsymbol{\eta}$ a λ_1 -hez tartozó általánosított sajátvektor. Ez $c_2 = 0$ -ra és $c_1 \neq 0$ -ra a $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ irányú egyenes (pontosabban két félegyenes) trajektóriát eredményez. Egyébként \mathbf{x} a

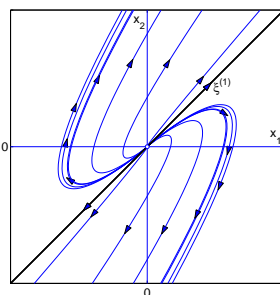
$$\mathbf{v}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2 \boldsymbol{\eta} + t c_2 \boldsymbol{\xi}^{(1)}$$

vektor $e^{\lambda_1 t}$ -szorososa. A $\mathbf{v}(t)$ vektor grafikonja egy a $\boldsymbol{\xi}$ vektorral párhuzamos egyenes. (A 6.22. Ábrán az $\mathbf{a} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2 \boldsymbol{\eta}$ ponton átmenő, $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ irányú egyenes.) Ezért minden origóból induló félegyenes egy pontban metszi a trajektóriát. Ellenőrizhető, hogy az \mathbf{x} megoldás trajektóriája a 6.22. Ábrán látható görbe lesz, amely érinti az $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ irányú egyenest az origóban.

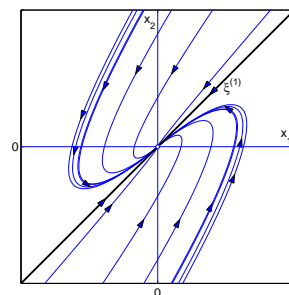
Az egyensúlyi helyzetet ebben az esetben *elfajult csomópontnak* hívjuk. Ez lehet instabil, ha $\lambda_1 > 0$, illetve aszimptotikusan stabil, ha $\lambda_1 < 0$.



6.22. Ábra.



6.23. Ábra. instabil elfajult csomópont



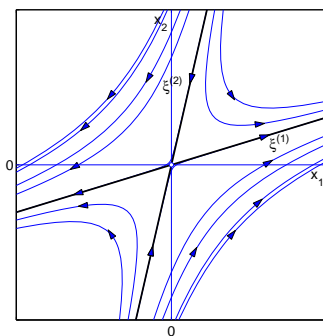
6.24. Ábra. aszimptotikusan stabil elfajult csomópont

4. eset: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ellentétes előjelű valós sajátértékei \mathbf{A} -nak.

Tegyük fel például, hogy $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. A (6.3) egyenlet megoldásának képlete ebben az esetben is (6.4), így most is van két egyenes, pontosabban négy félegyenes a trajektóriák között (a $c_1 = 0$ vagy $c_2 = 0$ esetén). Nagy t -re $e^{\lambda_2 t} \approx 0$, így

$$\mathbf{x}(t) \approx c_1 e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\xi}^{(1)}$$

teljesül, azaz a trajektóriák a $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ vektor által meghatározott egyeneshez tartanak az irányítás mentén. Fordítva, ha $t \rightarrow -\infty$, akkor pedig $e^{\lambda_1 t} \approx 0$, amiből indokolható az előbbi gondolatmenet mintájára, hogy a trajektóriák a $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ vektor által meghatározott egyeneshez tartanak a fordított irányítás mentén. Ezért a trajektóriák alakja „hiperbolaszzerű”, ahogy az a 6.25. Ábrán látható. A pozitív sajátértékhez tartozó egyenes irányítása az origóból kifelé, a negatív sajátértékhez tartozó egyenesen pedig az origó felé mutat, a többi trajektória pedig illeszkedik ezekhez az irányokhoz. A pozitív sajátértékhez tartozó egyenest, azaz a sajátérték sajátalterét *instabil altérnek*, a negatív sajátérték sajátalterét pedig *stabil altérnek* nevezzük. Látható, hogy minden görbe trajektória az idő növekedésével az instabil altérhez, illetve $t \rightarrow -\infty$ esetén a stabil altérhez konvergál. Ebben az esetben az egyensúlyi helyzetet *nyeregpontnak* hívjuk. Egy nyeregpont mindig instabil egyensúlyi helyzet, hiszen az origó bármely környezetéből vett pontból induló megoldások – a stabil altéren elhelyezkedő pontok és az origó kivételével – tetszőleges távol kerülnek az origótól.



6.25. Ábra. nyeregpont, instabil

5. eset: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\alpha \neq 0$) komplex sajátértékei \mathbf{A} -nak.

Legyen $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ az \mathbf{A} mátrix $\lambda = \alpha + i\beta$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Ekkor az

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi} = (\alpha + i\beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} + i(\beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v})$$

egyenlet valós és képzetes részét véve kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.$$

Jelölje \mathbf{T} azt a 2×2 -es mátrixot, amelynek első oszlopa \mathbf{u} , a második oszlopa pedig \mathbf{v} , azaz $\mathbf{T} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Ekkor

$$\mathbf{AT} = (\mathbf{Au}, \mathbf{Av}) = (\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}, \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, azaz $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$. Ekkor

$$\mathbf{y}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\mathbf{y},$$

azaz az $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ új változó teljesíti az

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2' &= -\beta y_1 + \alpha y_2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

egyenleteket. Az (y_1, y_2) pontnak tekintsük a polár koordinátáit, (r, θ) -t. Ekkor

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y_2}{y_1}.$$

Az első egyenlet mindkét oldalát differenciálva és a (6.9) összefüggéseket felhasználva kapjuk

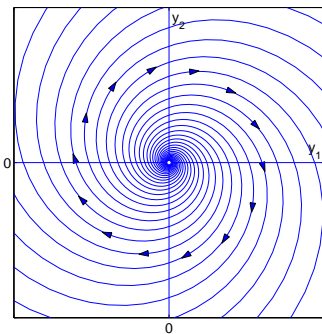
$$2rr' = 2y_1y_1' + 2y_2y_2' = 2y_1(\alpha y_1 + \beta y_2) + 2y_2(-\beta y_1 + \alpha y_2) = 2\alpha(y_1^2 + y_2^2) = 2\alpha r^2,$$

azaz a mozgás során $r' = \alpha r$ teljesül, ezért $r = c_1 e^{\alpha t}$. A pont távolsága az origótól a mozgás során exponenciálisan növekszik, ha $\alpha > 0$, és exponenciálisan csökkenve 0-hoz tart, ha $\alpha < 0$.

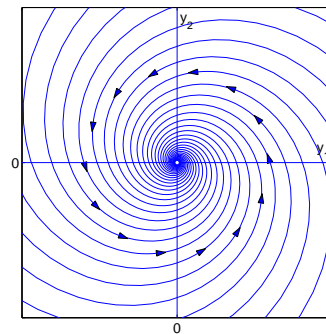
A θ -ra vonatkozó egyenletet differenciálva hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \theta' = \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{(-\beta y_1 + \alpha y_2)y_1 - (\alpha y_1 + \beta y_2)y_2}{y_1^2} = -\beta \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1^2} = -\beta \frac{r^2}{y_1^2},$$

amiből $\theta' = -\beta$, és ezért $\theta = -\beta t + \theta_0$. A mozgás során ezért a pont a trajektórián egyenes sebességgel forog az origó körül. Ebből következik, hogy az \mathbf{y} változó trajektóriái alakja spirál görbe, lásd a 6.26. és 6.27. Ábrát.



6.26. Ábra. $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$



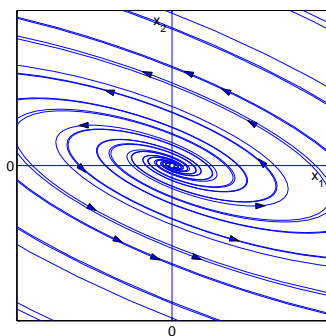
6.27. Ábra. $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$

A \mathbf{T} lineáris transzformációt alkalmazva a görbékre a 6.28. és 6.29. Ábrán látható görbéket kapjuk. Az egyensúlyi helyet neve ebben az esetben *fókusz*, amely lehet instabil, ha $\alpha > 0$, illetve aszimptotikusan stabil, ha $\alpha < 0$.

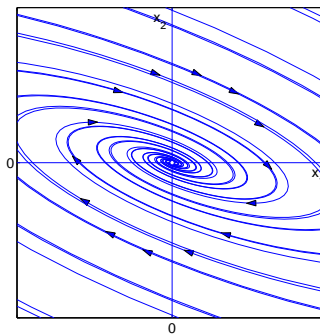
6. eset: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ komplex sajátértékei \mathbf{A} -nak.

Az előző pontban vett r és θ képletének levezetése az $\alpha = 0$ esetre ugyanúgy érvényes, így kapjuk, hogy az $r' = 0$ egyenlet teljesül, azaz r konstans a megoldás mentén. A (6.9) egyenlet trajektóriái tehát origó középpontú körök (6.30. Ábra).

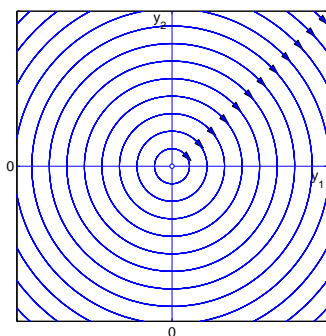
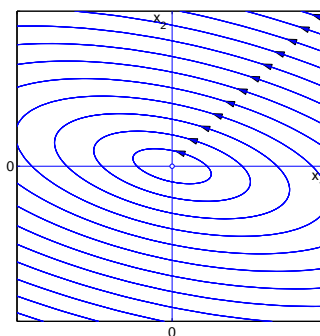
Lineáris transzformáció a köröket ellipszisbe visz át, ahogy azt a 6.31. Ábrán láthatjuk. Az egyensúlyi helyzet neve *centrum*. Egy centrum mindig stabil, de nem aszimptotikusan stabil.



6.28. Ábra. instabil fókusz



6.29. Ábra. aszimptotikusan stabil fókusz

6.30. Ábra. $\lambda = \pm i\beta$ 

6.31. Ábra. centrum, stabil

6.4. Lineáris rendszerek stabilitása

Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (6.10)$$

homogén lineáris egyenletet. Az egyenletnek $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete (azaz az azonosan $\mathbf{0}$ függvény megoldása az egyenletnek), és ha feltesszük, hogy az $\mathbf{A}(t)$ mátrix minden t -re invertálható, akkor az egyenletnek nincs is több egyensúlyi helyzete.

6.8. Tétel. *A (6.10) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete*

(a) *akkor és csak akkor stabil, ha a (6.10) egyenlet minden megoldása korlátos;*

(b) *akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha a (6.10) egyenlet minden \mathbf{x} megoldására*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Tekintsük most a (6.10) speciális esetét, tegyük fel, hogy az együttható konstans mátrix, azaz tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6.11)$$

egyenletet. Ebben az esetben az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet stabilitását az együtthatómátrix sajátértékei meghatározzák.

6.9. Tétel. *Legyen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix sajátértékei. Ekkor a (6.11) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete*

(a) akkor és csak akkor stabil, ha

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

és ha valamely sajátértékre $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, akkor λ_i geometriai multiplicitása megegyezik az algebrai multiplicitásával;

(b) akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Néhány speciális esetben az együtthatók ismeretében (a sajátértékek kiszámítása nélkül) eldönthető a rendszer aszimptotikus stabilitása.

6.10. Tétel. Legyen $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n \times n$ -es mátrix, amelyre

$$a_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ekkor ha az \mathbf{A} mátrix soronként diagonálisan domináns, azaz

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

vagy ha \mathbf{A} oszloponként diagonálisan domináns, azaz

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n,$$

akkor a (6.11) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil.

6.5. Nemlineáris rendszerek egyensúlyi helyzetének stabilitása

Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (6.12)$$

ú.n. kvázilineáris egyenletet, ahol feltesszük, hogy $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ és

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (6.13)$$

Az első feltételből következik, hogy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete a (6.12) egyenletnek. A második feltétel azt jelenti, hogy a \mathbf{g} függvény már csak lineárisnál nagyobb rendű tagokat tartalmaz.

A (6.12) egyenletben a nemlineáris tagokat, azaz a \mathbf{g} függvényt elhagyva kapjuk az egyenlet ú.n. linearizált egyenletét:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}. \quad (6.14)$$

A következő tétel szerint a (6.12) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitására illetve instabilitására következtetni tudunk az linearizált egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetének stabilitási tulajdonságából.

6.11. Tétel. Ha a (6.14) linearizált egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil, akkor a (6.12) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete is aszimptotikusan stabil.

Ha a (6.14) linearizált egyenlet \mathbf{A} együtthatójának létezik pozitív valós részű sajátértéke, akkor a (6.12) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete instabil.

Ha a (6.14) linearizált egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete stabil, akkor ebből nem tudunk következtetni a (6.12) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete stabilitási tulajdonságára: a nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete lehet aszimptotikusan stabil, instabil vagy stabil is.

Kétdimenziós esetben a linearizált egyenlet trajektóriáinak alakját fel tudjuk rajzolni. Megmutatható, hogy a nemlineáris egyenlet trajektóriái az egyensúlyi helyzet kis környezetében a lineáris egyenlet trajektóriáinak (nemlineáris) deformációjával kaphatók meg. Így az ábrák hasonlítanak a lineáris egyenlet trajektóriáira, csak pl. a csomópontok esetében a két egyenes is görbe trajektóriákba deformálódik.

6.12. Példa. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned}x' &= x + y - 2xy \\y' &= 4x + y + x^2\end{aligned}$$

egyenlet $(0, 0)$ egyensúlyi helyzetének stabilitását!

Az egyenletben szereplő nemlineáris tagok

$$\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} -2xy \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Erre teljesül a (6.13) feltétel, hiszen $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ polár koordinátákra áttérve

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(-2xy)^2 + x^4}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r^4 \cos^4 \theta}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta) = 0.\end{aligned}$$

A megfelelő linearizált egyenlet

$$\begin{aligned}x' &= x + y \\y' &= 4x + y.\end{aligned}$$

Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

együtthatómátrix sajátértékei 3 és -1 , így a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete egy nyeregpontra, amely instabil egyensúlyi helyzet. Ebből következik, hogy a nemlineáris egyenlet $(0, 0)$ egyensúlyi helyzete is instabil. \square

Tekintsük most az általános

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{6.15}$$

nemlineáris egyenletet, ahol legyen \mathbf{u} az egyenlet egy tetszőlegesen rögzített trajektóriája. Azt vizsgáljuk, hogy az egyensúlyi helyzet közeléből indított \mathbf{x} megoldásokra az $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ különbség hogyan változik a mozgás során. Vezessük be ezért az

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$$

új változót. Ekkor, használva hogy \mathbf{u} konstans vektor, \mathbf{y} teljesíti az

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{u})$$

differenciálegyenletet. Vegyük az \mathbf{f} függvény lineáris Taylor-közelítését \mathbf{u} körül, ahol a hibatagot jelölje \mathbf{g} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

Itt \mathbf{f}' az \mathbf{f} függvény Jacobi-mátrixát jelöli, azaz azt az $n \times n$ -es mátrixot, amelyben az i -edik sor j -edik eleme az \mathbf{f} i -edik komponensfüggvényének a j -edik változó szerinti parciális deriváltja.

Mivel \mathbf{u} egyensúlyi helyzet, ezért $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, így az

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

egyenletet kapjuk. Ez kvázilineáris egyenlet, ezért a 6.11. Tételt alkalmazva kapjuk a következő eredményt.

6.13. Tétel. *Legyen \mathbf{u} egy egyensúlyi helyzete a (6.15) egyenletnek. Ekkor ha az*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{y}$$

linearizált egyenlet $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis, akkor a (6.15) egyenlet \mathbf{u} egyensúlyi helyzete is az, illetve ha a linearizált egyenlet $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ együtthatójának létezik pozitív valós részű sajátértéke, akkor a nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete instabil.

6.14. Példa. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x' &= x(3 - 2x - y) \\ y' &= y(2 - x - y) \end{aligned}$$

egyenlet egyensúlyi helyzetait és azok stabilitását!

Az egyensúlyi helyzeteket az

$$\begin{aligned} x(3 - 2x - y) &= 0 \\ y(2 - x - y) &= 0 \end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszer megoldásai adják. Négy esetet különböztetünk meg:

1. $x = 0$ és $y = 0$, azaz $(0, 0)$ az egyik egyensúlyi helyzet.
2. $x = 0$ és $2 - x - y = 0$. Ennek megoldása $(0, 2)$.
3. $3 - 2x - y = 0$ és $y = 0$. Ehhez tartozó egyensúlyi helyzet $(1.5, 0)$.
4. $3 - 2x - y$ és $2 - x - y = 0$. Ennek megoldása $(1, 1)$.

Az egyenlet jobb oldalát leíró függvény

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x - 2x^2 - xy \\ 2y - xy - y^2 \end{pmatrix},$$

és ennek Jacobi-mátrixa

$$\mathbf{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 4x - y & -x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Nézzük az egyes egyensúlyi helyzeteket.

1. $(0, 0)$. Ebben a pontban

$$\mathbf{f}'(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei a főátlóban álló számok, 3 és 2, hiszen a mátrix diagonális. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete egy instabil csomópont, és így a nemlineáris egyenlet $(0, 0)$ egyensúlyi helyzete is instabil.

2. $(0, 2)$. Ebben a pontban

$$\mathbf{f}'(0, 2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei a főátlóban álló számok, 1 és -2 , hiszen a mátrix alsó háromszög mátrix. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete egy instabil nyeregpon, és így a nemlineáris egyenlet $(0, 2)$ egyensúlyi helyzete is instabil.

3. $(1.5, 0)$. Ebben a pontban

$$\mathbf{f}'(1.5, 0) = \begin{pmatrix} -3 & -1.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

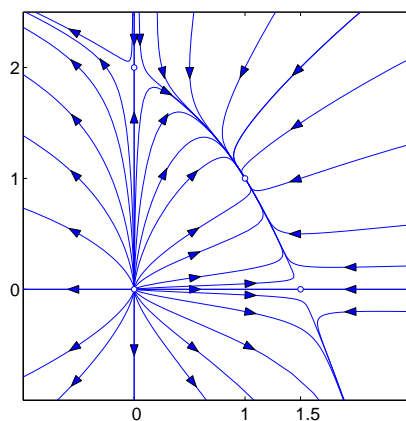
amelynek sajátértékei a főátlóban álló számok, -3 és 0.5 , hiszen a mátrix felső háromszög mátrix. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete egy instabil nyeregpon, és így a nemlineáris egyenlet $(1.5, 0)$ egyensúlyi helyzete is instabil.

4. $(1, 1)$. Ebben a pontban

$$\mathbf{f}'(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei, $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil csomópont, és így a nemlineáris egyenlet $(1, 1)$ egyensúlyi helyzete is aszimptotikusan stabil.

A 6.32. Ábrában láthatók a nemlineáris rendszer trajektóriái. Látható, hogy az egyes egyensúlyi helyzetek kis környezetében a megoldások trajektóriáinak alakjai hasonlítanak a linearizált egyenlet trajektóriáira. \square



6.32. Ábra. nemlineáris rendszer trajektóriái

6.6. Ljapunov-függvények

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, amelyre $\mathbf{0} \in U$. Egy $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *pozitív (negatív) definitnek* nevezünk, ha

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{és} \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad (V(\mathbf{x}) < 0) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in U.$$

A V függvényt *pozitív (negatív) szemidefinitnek* nevezzük, ha

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{és} \quad V(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (V(\mathbf{x}) \leq 0) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in U.$$

Nyilván V pontosan akkor negatív (szemi)definit, ha $-V$ pozitív (szemi)definit. Az alkalmazásokban sokszor V értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^n$.

6.15. Példa. Legyen

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

kétváltozós kvadratikus függvény. Feltesszük, hogy $a \neq 0$. Alakítsuk V -t teljes négyzetté:

$$V(x, y) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy\right) + cy^2 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}y^2\right) + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}y^2.$$

Ebből látható, hogy ha

$$a > 0 \quad \text{és} \quad 4ac - b^2 \geq 0,$$

akkor V pozitív szemidefinit. Ha pedig

$$a < 0 \quad \text{és} \quad 4ac - b^2 \geq 0,$$

akkor pedig V negatív szemidefinit.

V pontosan akkor lesz pozitív definit, ha

$$a > 0 \quad \text{és} \quad 4ac - b^2 > 0,$$

hiszen ha $V(x, y) = 0$, akkor ebből következik, hogy

$$a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 = 0 \quad \text{és} \quad \frac{4ac - b^2}{4a}y^2 = 0,$$

amiből következik, hogy $y = 0$ és így $x = 0$.

Hasonlóan, V pontosan akkor negatív definit, ha

$$a < 0 \quad \text{és} \quad 4ac - b^2 > 0.$$

□

Az n -dimenziós esetre a kvadratikus függvény általános alakja

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j.$$

Ezt vektoriálisan a

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

alakban írhatjuk fel, ahol

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \mathbf{A} = (a_{ij}).$$

Megmutatható a következő tétel.

6.16. Tétel (Sylvester). A $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikus függvény akkor és csak akkor pozitív definit, ha minden főminora pozitív, azaz

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Tekintsük újra az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (6.16)$$

nemlineáris egyenletet, ahol feltesszük, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, azaz legyen $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ az egyenlet egyensúlyi helyzete. Ennek stabilitási tulajdonságait fogjuk vizsgálni.

Az \mathbf{f} függvény komponensfüggvényeit jelölje $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$. Legyen $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan parciálisan differenciálható. Számítsuk ki a $V(\mathbf{x}(t))$ összetett függvény deriváltját, ahol $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ a (6.16) egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))x'_1(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t))x'_n(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))f_1(\mathbf{x}(t)) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t))f_n(\mathbf{x}(t)). \end{aligned}$$

Ez a képlet motiválja az alábbi definíciót. Az \mathbf{f} függvény (6.16) egyenletre vonatkozó deriváltját a

$$V'(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(\mathbf{x})f_n(\mathbf{x})$$

képlettel definiáljuk. Ha a $V'(\mathbf{x})$ függvényről tudjuk, hogy negatív definit, akkor bármely $\mathbf{x}(t)$ megoldásra a $V(\mathbf{x}(t))$ összetett függvényről tudjuk, hogy szigorúan monoton csökkenő lesz. Ha emellett azt is belátjuk, hogy $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$, akkor ebből $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ is következik. Ez az elve a következő tétel bizonyításának, de a részletektől eltekintünk.

6.17. Tétel (Ljapunov). *Tegyük fel, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\mathbf{0} \in U$. Legyen $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan parciálisan differenciálható.*

- Ha V pozitív definit és V' negatív szemidefinit, akkor a (6.16) egyenlet $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete stabil.*
- Ha V pozitív definit és V' negatív definit, akkor a $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.*
- Ha $\mathbf{0}$ bármely környezetében létezik olyan \mathbf{x} , hogy $V(\mathbf{x}) > 0$, és V' pozitív definit, akkor a $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet instabil.*

Egy olyan V függvényt, amely pozitív definit és amelynek a (6.16) egyenletre vonatkozó V' deriváltja negatív szemidefinit, *Ljapunov-függvénynek* nevezünk.

6.18. Példa. $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakú Ljapunov-függvény megadásával igazoljuk, hogy az

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 - 2xy \\ y' &= 2x^2 - 6y \end{aligned}$$

egyenletrendszer $(0, 0)$ megoldása aszimptotikusan stabil!

Olyan Ljapunov-függvényt keresünk, amelyre $a > 0$ és $b > 0$ (azaz V pozitív definit), és amelyre V' negatív definit. Számítsuk ki

$$V'(x, y) = 2ax(-x^3 - 2xy) + 2by(2x^2 - 6y) = -2ax^4 + (4b - 4a)x^2y - 12by^2.$$

Látható, hogy ha $a = b$, például $a = b = 1$, akkor az x^2y -os tag kiesik, és így

$$V'(x, y) = -2x^4 - 12y^2$$

negatív definit lesz. Ezért a 6.17. Tételből következik az állítás.

Megjegyezzük, hogy erre az egyenletre a linearizáció módszere nem működik, hiszen az egyenlet linearizációja $x' = 0$ és $y' = 0$, ami csak stabil egyensúlyi helyzettel rendelkezik, így a 6.13. Tétel nem alkalmazható. \square

6.19. Példa. $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakú Ljapunov-függvény megadásával igazoljuk, hogy az

$$\begin{aligned}x' &= -x + 5y^2 \\y' &= -3xy\end{aligned}$$

egyenletrendszer $(0, 0)$ megoldása stabil!

Olyan Ljapunov-függvényt keresünk, amelyre $a > 0$ és $b > 0$, és amelyre V' negatív szemidefinit. Tekintsük

$$V'(x, y) = 2ax(-x + 5y^2) + 2by(-3xy) = -2ax^2 + (10a - 6b)xy^2.$$

Látható, hogy ha az x^2y -os tag nem esik ki, akkor ez előjelet válthat, azaz V' nem biztos, hogy szemidefinit. Úgy választjuk meg tehát a paramétereket, hogy $10a - 6b = 0$ teljesüljön. Ilyen például $a = 3$ és $b = 5$. Erre $V'(x, y) = -6x^2$, ami csak negatív szemidefinit, hiszen $V(0, y) = 0$ minden y -ra. \square

6.7. Skaláris lineáris egyenletek stabilitása

Tekintsük az

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (6.17)$$

konstans együtthatós n -edrendű skaláris lineáris homogén differenciálegyenletet és az

$$y(0) = z_1, \quad y'(0) = z_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = z_n$$

kezdeti feltételt. A (6.17) skaláris egyenlet $y = u$ konstans megoldásait az egyenlet *egyensúlyi helyzetének* nevezzük.

Ahogy ezt a 3.6. szakaszban láttuk, a (6.17) skaláris egyenlet ekvivalens egy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6.18)$$

homogén lineáris rendszerrel, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

és

$$\mathbf{x}(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))^T. \quad (6.19)$$

A stabilitás, instabilitás és aszimptotikus stabilitás fogalmát értelemszerűen megfogalmazzuk a skaláris magasabbrendű lineáris egyenletek esetére is. A (6.17) egyenlet $y = 0$ egyensúlyi helyzetének a (6.18) egyenlet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete felel meg. Azt mondjuk, hogy a (6.17) egyenlet $y = 0$ egyensúlyi helyzete stabil, ha a (6.18) egyenlet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete stabil, azaz bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|\mathbf{z}\| < \delta$, akkor $\|(y(t; \mathbf{z}), \dots, y^{(n-1)}(t; \mathbf{z}))^T\| <$

ε minden $t \geq 0$ -ra. Ha például az euklideszi normát használjuk, akkor speciálisan teljesül az is, hogy $|y(t; \mathbf{z})| < \varepsilon$ minden $t \geq 0$ -ra. Hasonlóan definiálhatjuk az aszimptotikus stabilitás és instabilitás fogalmát a (6.17) egyenletre. Természetesen nemlineáris skaláris n -edrendű egyenletekre is értelmezhetők a stabilitási fogalmak.

Legyen λ a (6.17) skaláris egyenlet karakterisztikus gyöke, azaz a

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (6.20)$$

karakterisztikus polinom gyöke. Láttuk, hogy ez azzal ekvivalens, hogy a (6.17) egyenletnek $y(t) = e^{\lambda t}$ megoldása. De ekkor a (6.19) helyettesítést használva kapjuk, hogy $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \boldsymbol{\xi}$ megoldása a (6.18) egyenletnek, ahol $\boldsymbol{\xi} = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^T$, és λ sajátértéke az \mathbf{A} mátrixnak. Fordítva, ha rögzítjük az \mathbf{A} mátrix egy λ sajátértékét, akkor legyen $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ egy a λ -hoz tartozó sajátvektor, és ekkor $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \boldsymbol{\xi}$ megoldása a (6.18) egyenletnek. De ekkor $y(t) = e^{\lambda t} \xi_1$ megoldása lesz a (6.17) egyenletnek, azaz λ gyöke a (6.17) karakterisztikus polinomnak. Megjegyezzük, hogy direkt módon is megmutatható, hogy $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = p(\lambda)$. Kapjuk tehát, hogy \mathbf{A} sajátértékei egybeesnek p gyökeivel, így a 6.9. Tételt erre az esetre megfogalmazva következik az alábbi eredmény:

6.20. Tétel. *Legyen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a (6.20) képlettel definiált p karakterisztikus polinom gyökei. Ekkor a (6.17) egyenlet $y = 0$ egyensúlyi helyzete*

- (a) *akkor és csak akkor stabil, ha $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$,*
- (b) *akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$.*

A (6.20) alakú p polinomot *stabil polinomnak* nevezzük, ha minden gyökének valós része negatív.

A következő tétel szükséges feltételt ad a stabilitásra.

6.21. Tétel. *Ha a (6.20) alakú p polinom stabil, akkor*

$$\frac{a_0}{a_n} > 0, \quad \frac{a_1}{a_n} > 0, \quad \dots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0. \quad (6.21)$$

A következő tétel szükséges és elegendő feltételt ad egy p polinom stabilitására.

6.22. Tétel (Routh–Hurwitz-kritérium). *Legyen p a (6.20) képlettel definiált, és legyen*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}_{n \times n}$$

a polinom Routh–Hurwitz-mátrixa, amelynek definíciója

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & \text{ha } 0 \leq 2i - j \leq n, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Ekkor a p polinom akkor és csak akkor stabil, ha (6.21) teljesül és a \mathbf{B} mátrix pozitív definit.

A \mathbf{B} mátrixot pozitív definitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ kvadratikus függvény pozitív definit. Megjegyezzük, hogy erre a Sylvester-tétel ad szükséges és elégséges feltételt.

6.23. Példa. Tekintsük a

$$p(\lambda) = 4\lambda^5 + 12\lambda^4 + 25\lambda^3 + 30\lambda^2 + \lambda + 1$$

polinomot. Mutassuk meg, hogy p minden gyöke negatív valós részű, azaz p stabil polinom!

Ehhez írjuk fel a Routh–Hurwitz-mátrixot:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 30 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 25 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ennek főminorai rendre

$$1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 25 & 30 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 25 & 30 & 1 \\ 4 & 12 & 25 \end{vmatrix} = 117, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 30 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 836$$

és

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 30 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 25 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3344,$$

azaz a Routh-Hurwitz-kritérium feltételei teljesülnek, ezért a polinom stabil. \square

6.8. Alkalmazások

6.24. Példa. (ingamozgás surlódó közegben) Tekintsük a 4.28. Példában levezetett ingamozgást leíró egyenletet:

$$\theta'' + \frac{\gamma}{m}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \quad (6.22)$$

Feltesszük, hogy $\gamma > 0$, azaz olyan közegben történik a mozgás, ahol surlódás hat az ingára. Az $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$ helyettesítéssel kapjuk az

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer. Ennek egyensúlyi helyzetei az

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszer megoldásai, azaz $x_1 = k\pi$ és $x_2 = 0$ lesznek. Végtelen sok egyensúlyi helyzetet kaptunk, de ezek a forgásszögektől eltekintve két pozíciót definiálnak: az inga legalsó illetve legfelső pozíciójában, amikor az inga nyugalomban van.

Linearizációs módszerrel vizsgáljuk a $(k\pi, 0)$ egyensúlyi helyzetek stabilitását. Számítsuk ki ehhez az

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 \end{pmatrix}$$

függvény Jacobi-mátrixát:

$$F'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos x_1 & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}.$$

Különböztessünk meg két esetet:

1. Legyen $k = 2j$ páros (*alsó nyugalmi pozíció*). Ekkor

$$F'(2j\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a mátrix sajátértékeit:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\gamma}{m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} - \frac{4g}{L}}}{2}. \quad (6.23)$$

Három esetet különböztetünk meg:

(a) $0 < \frac{\gamma^2}{m^2} < \frac{4g}{L}$ (kis surlódás esete). Ekkor komplex sajátértéket kapunk, amelynek valós része negatív. Azaz ebben az esetben a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil fókusz. A nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is tehát szimptotikusan stabil lesz a linearizált stabilitás tétele szerint.

(b) $\frac{\gamma^2}{m^2} = \frac{4g}{L}$ (kritikus surlódás esete). Ekkor kétszeres valós, negatív sajátértéke van a Jacobi-mátrixnak, azaz a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil elfajult csomópont. A nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is tehát szimptotikusan stabil lesz.

(c) $\frac{\gamma^2}{m^2} > \frac{4g}{L}$ (nagy surlódás esete). Ekkor két valós sajátértéke van a Jacobi-mátrixnak. Ellenőrizhetjük, hogy ekkor mindkét sajátérték negatív. Ebben az esetben tehát aszimptotikusan stabil csomópont lesz a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete. A nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is tehát aszimptotikusan stabil lesz.

2. Legyen $k = 2j + 1$ páratlan (*felső nyugalmi pozíció*). Ekkor

$$F'((2j+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\gamma}{m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} + \frac{4g}{L}}}{2}.$$

Két valós sajátértéke van a Jacobi-mátrixnak, ahol az egyik pozitív, a másik pedig negatív. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete nyeregpont, azaz instabil. Ekkor a nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is instabil lesz.

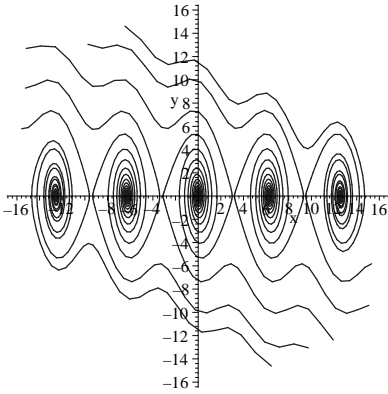
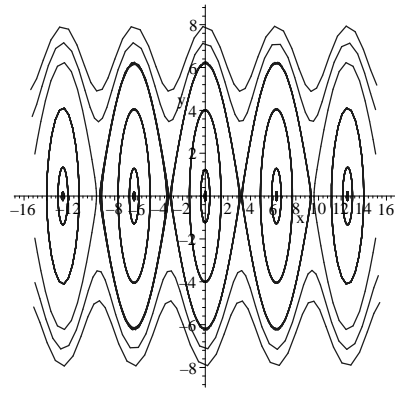
A kis surlódás esetén néhány trajektória grafikonja a 6.33. Ábrán látható. Jól látható, hogy a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzetei stabilitási tulajdonságai megőrződnek a nemlineáris esetben. Az alsó egyensúlyi helyzetekben fókuszpont, a felső egyensúlyi helyzetekben pedig nyeregpontok nemlineáris deformációi láthatók. \square

6.25. Példa. (ingamozgás surlódás nélkül) Tekintsük a (6.22) ingamozgás egyenletét abban az esetben, amikor nem hat surlódás az ingára, azaz $\gamma = 0$:

$$\theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (6.24)$$

Rendszerré átírva a skaláris egyenletet az

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{aligned}$$

6.33. Ábra. $m = 1, L = 1, \gamma = 0.1$ 6.34. Ábra. $m = 1, L = 1, \gamma = 0$

egyenletrendszert kapjuk. Most is, ahogy a 6.24. Példában, a rendszer egyensúlyi helyzetei a $(k\pi, 0)$ pontok.

A felső egyensúlyi helyzetben $\gamma = 0$ -ra is egy pozitív és egy negatív sajátértéke lesz a Jacobi-mátrixnak, azaz a lineáris és így a nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is instabil lesz.

Az alsó egyensúlyi helyzetben (páros k esete) a (6.23) képletből látható, hogy a Jacobi-mátrixnak tiszta képzetes sajátértékei vannak, azaz a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete centrum, azaz stabil az egyensúlyi helyzet. A linearizált stabilitás tétele viszont nem alkalmazható erre az esetre.

Alkalmazzuk a Ljapunov-módszert a $(0,0)$ egyensúlyi helyzet stabilitása eldöntésére. Ehhez egy Ljapunov-függvényt kell találnunk. Mechanikai alkalmazásokban konzervatív rendszerek esetén a test teljes energiája használható Ljapunov-függvényként. Az m tömegű test helyzeti energiája, azaz az a munka, amit a legalsó pozíció magasságából a $\theta = x_1$ szöghöz tartozó magasságba emeléshez szükséges $mgL(1 - \cos x_1)$. A test kinetikus energiája $\frac{1}{2}mL^2(\theta')^2 = \frac{1}{2}mL^2x_2^2$. Tekintsük tehát a

$$V(x_1, x_2) = mgL(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}mL^2x_2^2$$

függvényt. Legyen U egy olyan nyílt környezete $(0,0)$ -nak, amely nem tartalmaz másik egyensúlyi helyzetet. Nyilván ekkor $1 - \cos x_1 > 0$ teljesül $x_1 \neq 0$ -ra U -ban, és ezért V pozitív definit. Számítsuk ki a rendszerre vonatkozó deriváltját:

$$\begin{aligned} V'(x_1, x_2) &= mgL \sin x_1 \cdot x_1' + mL^2 x_2 x_2' \\ &= mgL \sin x_1 \cdot x_2 - mL^2 x_2 \frac{g}{L} \sin x_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Kaptuk tehát, hogy speciálisan V' negatív szemidefinit. A Ljapunov-féle stabilitási tételből következik, hogy az origó stabil egyensúlyi helyzet.

Tekintsünk most egy $(2j\pi, 0)$ általános alsó egyensúlyi helyzetet. Vezessük be az $y_1 = x_1 - 2j\pi$ és $y_2 = x_2$ változókat. Ekkor $y_1' = x_1' = x_2 = y_2$, $y_2' = x_2' = -\frac{g}{L} \sin x_1 = -\frac{g}{L} \sin(y_1 + 2j\pi) = -\frac{g}{L} \sin y_1$, és így az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{g}{L} \sin y_1 \end{aligned}$$

teljesül. Mivel beláttuk korábban, hogy ennek a rendszernek az origó stabil egyensúlyi helyzete, ezért az eredeti rendszer $(2j\pi, 0)$ egyensúlyi helyzete is stabil.

A 6.34. Ábrán surlódás nélküli ingamozgás esetének trajektóriái láthatók. Az alsó egyensúlyi helyzetekben centrum, a felső egyensúlyi helyzetben pedig nyeregpontra nemlineáris deformációja látható. Az ábrán megfigyelhető az is, hogy vannak olyan speciális trajektóriák, amelyek összekötik a felső egyensúlyi helyzeteket. Azaz bármely pozícióhoz (szögelforduláshoz) létezik olyan sebesség, amellyel meglökve az ingát, az a következő ill. előző felső egyensúlyi helyzethez tart $t \rightarrow \infty$ esetén. Ha ennél a speciális kezdősebességnél kisebb sebességet kap az inga, akkor periodikusan leng oda-vissza. Ha pedig ennél nagyobb sebességgel lökjük meg, akkor forogni kezd a tengelye körül megállás nélkül. \square