5. Lineáris rendszerek

5.1. Lineáris algebrai előismeretek

Tekintsük az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{5.1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{5.2}$$

lineáris egyenletrendszert. Az egyenletben szereplő együtthatókat egy 2×2-es mátrixban, az x_1, x_2 ismeretleneket, illetve az egyenlet jobb oldalát pedig 2-dimenziós vektorokban tárolhatjuk, azaz legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Egy 2×2-es mátrix és egy kétdimenziós vektor szorzatát az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

képlettel definiáljuk. Ezért az (5.1)-(5.2) egyenletrendszert vektoriálisan az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{5.3}$$

alakban írhatjuk fel.

Az első egyenletet a_{22}-szereséből kivonva a második egyenlet a_{12}-szereséét, kapjuk, hogy

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12},$$

azaz, ha $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, akkor

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Hasonlóan kiszámítható, hogy

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

A fenti képletek nevezőiben található

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

kifejezést az **A** mátrix *determinánsának* hívjuk. Itt a mátrix főátlójában levő elemek szorzatából vonjuk le a mellékátlóban levő elemek szorzatát. A determináns jelölésére szokás még a

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

jelölést is használni.

Hasonlóan, egy 3×3-as

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mátrix és egy 3-dimenziós

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

vektor szorzatát a

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

képlettel definiáljuk. Ebben az esetben az (5.3) egyenlet az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert jelöli, ahol

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát a

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

formulával definiáljuk. Ezt a képletet úgy jegyezhetjük meg például, hogy leírjuk az $\mathbf{A}$ mátrix első két oszlopát a mátrix mellé:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

és az így kapott kibővített mátrix főátlóiban levő elemek szorzatainak összegéből levonjuk a mellékátlókban levő elemek összegét.

A mátrixok szorzását az általános esetben az alábbiak szerint értelemezzük: Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times m$ dimenziós mátrix, $\mathbf{B}$ pedig egy $m \times k$ dimenziós mátrix. Ekkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok szorzata egy olyan $n \times k$ dimenziós mátrix, amelynek ij-edik elemét a

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell} b_{\ell j}$$

képlettel definiáljuk. Egy négyzetes, $n \times n$ dimenziós mátrix determinánsának fogalmát a 3×3-as esethez hasonlóan definiálhatjuk.

Azt az $n \times n$-es mátrixot, amelynek főátlójában csupa 1-es, az összes többi elemében pedig csupa 0 áll, n-dimenziós *egységmátrixnak* hívjuk és $\mathbf{I}$-vel jelöljük.

Egy $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrixot *invertálható mátrixnak* nevezünk, ha létezik egy $\mathbf{A}^{-1}$ $n \times n$-es mátrix, amelyre

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

teljesül. Ekkor az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixot az $\mathbf{A}$ mátrix *inverzének* hívjuk.

5.1. Tétel. *Tetszőleges $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható.*
2. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
3. *Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek minden $\mathbf{b}$-re létezik egyértelmű megoldása.*

Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek létezik megoldása, akkor a megoldás az $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ alakban felírható.

5.2. Tétel. *Az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik nem-triviális* ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) *megoldása, ha* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Az alábbi tételben összefoglaljuk a determináns néhány fontos tulajdonságát.

5.3. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ $n \times n$*-es mátrixok. Ekkor*

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$*, ha* $\mathbf{A}$ *egy sora (vagy oszlopa) azonosan nulla;*
2. $\det(\mathbf{A}) = 0$*, ha* $\mathbf{A}$ *két sora (oszlopa) azonos;*
3. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$*;*
4. $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$*;*
5. *Ha* $\mathbf{B}$*-t úgy kapjuk az* $\mathbf{A}$ *mártixból, hogy annak valamely sorát (oszlopát) megszorozzuk egy* c *konstanssal, akkor* $\det(\mathbf{B}) = c\det(\mathbf{A})$*.*
6. *Ha* $\mathbf{B}$*-t úgy kapjuk az* $\mathbf{A}$ *mártixból, hogy annak két sorát (oszlopát) felcseréljük, akkor* $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$*.*
7. *Ha* $\mathbf{B}$*-t úgy kapjuk az* $\mathbf{A}$ *mártixból, hogy annak egyik sorához (oszlopához) egy másik sor (oszlop)* c*-szeresét* ($c \in \mathbb{R}$ *tetszőleges) hozzáadjuk, akkor* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$*.*
8. *Jelölje* $\mathbf{A}_{ij}$ *azt az* $(n-1) \times (n-1)$*-es mátrixot, amelyet az* $\mathbf{A}$ *mátrixból annak* i*-edik sora és* j*-edik oszlopa elhagyásával kapunk. Ekkor a determináns* i*-edik sora szerinti sorfejtése*
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}),$$
a j*-edik oszlop szerinti sorfejtése pedig*
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}).$$

Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{C}^n$ halmaz altér $\mathbb{C}^n$-ben, ha zárt a lineáris kombináció képzésre, azaz, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, akkor $c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y} \in H$.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{C}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha valamely $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$-re $c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{0}$, akkor $c_1 = \cdots = c_m = 0$.

Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{C}^n$ altér m*-dimenziós*, ha létezik $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)} \in H$ lineárisan független vektorok, amelyre $H = \{c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_m\mathbf{x}^{(m)} \colon c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}\}$, azaz a $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ vektorok lineáris kombinációi előállítják H bármely elemét.

Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix, $\mathbf{I}$ az $n \times n$-es egységmátrix. A
$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$
n-edfokú polinomot az $\mathbf{A}$ *karakterisztikus polinomjának* nevezzük, p gyökeit az $\mathbf{A}$ mátrix *saját-értékeinek*, az
$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$$
illetve az ezzel ekvivalens
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$
egyenlet egy $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ megoldását az $\mathbf{A}$ mátrix λ-hoz tartozó *sajátvektorának* nevezzük. Ha λ k-szoros gyöke p-nek, akkor azt mondjuk, hogy λ *algebrai multiplicitása* k.

A sajátértékek és sajátvektorok lineáris algebrából ismert néhány fontos tulajdonságát a következő tételben foglaltuk össze.

5.4. Tétel. *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $n \times n$*-es valós mátrix.*

(i) Az $\mathbf{A}$ *mátrix* λ *sajátértékhez tartozó sajátvektorai lineáris alteret alkotnak* $\mathbb{C}^n$*-ben.*

(ii) Ha λ *valós, akkor a hozzá tartozó* $\boldsymbol{\xi}$ *sajátvektor választható valós vektornak.*

(iii) Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ *páronként különböző sajátértékei* $\mathbf{A}$*-nak, akkor a hozzá tartozó* $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(s)}$ *sajátvektorok lineárisan függetlenek.*

(iv) Ha $\mathbf{A}$ *szimmetrikus mátrix, akkor sajátértékei valós számok, és megadható sajátvektorokból álló bázis* $\mathbb{C}^n$*-en.*

(v) Ha $\mathbf{A}$*-nak létezik* $\lambda = \alpha + i\beta$ *komplex sajátértéke a* $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ *sajátvektorral* $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n)$*, akkor* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *lineárisan független.*

(vi) Ha $\mathbf{A}$*-nak* $\lambda = \alpha + i\beta$ *komplex sajátértéke a* $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ *sajátvektorral, akkor* $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ *is sajátértéke a* $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ *sajátvektorral.*

Az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorok lineáris alterét más szóval a λ sajátérték *sajátalterének* nevezzük. A λ sajátérték sajátalterének dimenzióját, azaz a λ-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok maximális számát a λ sajátérték *geometriai multiplicitásának nevezzük*. Ismert, hogy egy sajátérték algebrai multiplicitása mindig nagyobb egyenlő, mint a geometriai multiplicitása. Az előző tétel (iv) pontja szerint szimmetrikus mátrixok sajátértékének geometriai multiplicitása mindig megegyezik az algebrai multiplicitásával. Amint azt az alábbi példák mutatják, nem szimmetrikus mátrixok esetében a geometriai multiplicitás lehet egyenlő, de lehet kisebb is, mint az algebrai multiplicitás.

5.5. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ennek karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -5 & 7-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 20,$$

ezért $\mathbf{A}$ sajátértékei $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 10$. Ekkor természetesen mindkét sajátérték egyszeres algebrai multiplicitású és egyben a geometriai multiplicitásuk is 1.

Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -5 & 7-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sajátvektor egyenletet. Először nézzük a $\lambda_1 = 2$ sajátértéket. Ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe kapjuk

$$\begin{aligned} 3\xi_1 - 3\xi_2 &= 0 \\ -5\xi_1 + 5\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

A két egyenlet összefüggő, ezért az egyik egyenlet elhagyható. Marad például az első egyenlet: $3\xi_1 - 3\xi_2 = 0$. Ennek természetesen végtelen sok megoldása van: $\xi_1 = \xi_2$. Egy lehetséges megoldás például

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Most vegyük a $\lambda_2 = 10$ sajátértéket. Ebben az esetben a sajátvektor egyenlet

$$\begin{aligned} -5\xi_1 - 3\xi_2 &= 0 \\ -5\xi_1 - 3\xi_2 &= 0, \end{aligned}$$

amelynek egy lehetséges megoldása

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

□

5.6. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ennek karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \\ &= \lambda^2(\lambda - 1) - \lambda(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Így $\mathbf{A}$ sajátértékei $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 1$, ahol λ_1 egyszeres, λ_2 pedig kétszeres gyök, azaz λ_1 algebrai multiplicitása 1, λ_2 algebrai multiplicitása pedig 2.

A sajátvektor egyenlet most

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Először vegyük a $\lambda_1 = -1$ sajátértéket. Erre a fenti egyenletből kapjuk

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_3 &= 0 \\ -5\xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ \xi_1 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az első és az utolsó egyenlet azonos, így az egyiket elhagyhatjuk:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_3 &= 0 \\ -5\xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ez a két egyenlet már független (az egyik nem konstansszorosa a másiknak). Így a három ismeretlen közül, ha az egyiknek az értékét rögzítjük, akkor a másik változó már egyértelműen meghatározott lesz. Legyen például $\xi_3 = 1$, ekkor

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1 \\ -5\xi_1 + 2\xi_2 &= -5. \end{aligned}$$

amelyből $\xi_1 = -1$ és $\xi_2 = -5$, azaz a $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozó egy lehetséges sajátvektor

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Most tekintsük a $\lambda_2 = 1$ sajátértéket. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_3 &= 0 \\ -5\xi_1 + 5\xi_3 &= 0 \\ \xi_1 - \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet is az első többszöröse, így mindkettő elhagyható:

$$-\xi_1 + \xi_3 = 0.$$

Ekkor $\xi_1 = \xi_3$ és ξ_2 pedig tetszőleges. Így például a

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektor a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátvektora **A**-nak, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek is (az egyik nem konstansszorosa a másiknak). Ezért a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátaltér 2 dimenziós, azaz λ_2 algebrai multiplicitása és a geometriai multiplicitása is 2. □

5.7. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -14 & 5 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ennek karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 & 5 \\ -14 & 5-\lambda & 10 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 \\ &= \lambda(\lambda^2 - 9) - 3(\lambda^2 - 9) \\ &= (\lambda^2 - 9)(\lambda - 3) \\ &= (\lambda - 3)^2(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Ezért **A** sajátértékei $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_2 = 3$, ahol λ_1 egyszeres, λ_2 pedig kétszeres gyök, azaz λ_1 algebrai multiplicitása 1, λ_2 algebrai multiplicitása pedig 2.

A sajátvektorok számításához tekintsük a

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 & 5 \\ -14 & 5-\lambda & 10 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sajátvektor egyenletet. Először nézzük a $\lambda_1 = -3$ sajátértéket. Erre a fenti egyenletből kapjuk

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ -14\xi_1 + 8\xi_2 + 10\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az első és az utolsó egyenlet azonos, így elhagyhatjuk az utolsót:

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ -7\xi_1 + 4\xi_2 + 5\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Két egyenlet maradt, így a sajátaltér egydimenziós. Legyen például $\xi_3 = 1$, ekkor

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 &= -5 \\ -7\xi_1 + 4\xi_2 &= -5, \end{aligned}$$

amelyből $\xi_1 = -5$ és $\xi_2 = -10$, azaz a $\lambda_1 = -3$ sajátértékhez tartozó egy lehetséges sajátvektor

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Most vegyük a $\lambda_2 = 3$ sajátértéket. Erre kapjuk

$$\begin{aligned} -7\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ -14\xi_1 + 2\xi_2 + 10\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet az első kétszerese, így elhagyható:

$$\begin{aligned} -7\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

A maradék két egyenlet már független, Így megint, ha $\xi_3 = c$, akkor a

$$\begin{aligned} -7\xi_1 + \xi_2 &= -5c \\ -\xi_1 + \xi_2 &= c \end{aligned}$$

egyenlet egyértelműen megoldható: $\xi_1 = c$ és $\xi_2 = 2c$. Így a $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó tetszőleges sajátvektor felírható a

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alakban, azaz a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátaltér csak 1 dimenziós, tehát λ_2 algebrai multiplicitása ugyan 2, de geometriai multiplicitása csak 1. □

5.2. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, $t_0 \in I$, $a_{ij}, f_j : I \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ függvények, és tekintsük az

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{aligned}$$

n-dimenziós elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert a hozzá tartozó

$$x_1(t_0) = z_1, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = z_n$$

kezdeti feltételekkel együtt. Ekkor a fenti feladatot röviden az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad t \in I, \tag{5.4}$$

és az

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z} \tag{5.5}$$

vektoriális alakban írhatjuk fel, ahol $\mathbf{A}\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{f}\colon I \to \mathbb{R}^n$, és

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}, \quad \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T, \quad \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T.$$

Az egész szakaszban feltesszük, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{f}$ folytonos függvények.

Tekintsük az (5.4) egyenlet homogén megfelelőjét:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \qquad t \in I. \tag{5.6}$$

A 3.26. Tételt erre a lineáris esetre alkalmazva kapjuk az alábbi eredményt.

5.8. Tétel. *Ha* $\mathbf{A}\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *és* $\mathbf{f}\colon I \to \mathbb{R}^n$ *folytonos függvények, akkor az (5.4)-(5.5) kezdeti érték feladatnak minden* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra létezik egyértelmű megoldása az* I *intervallumon.*

Most is könnyen látható, hogy a homogén egyenlet megoldásainak lineáris kombinációja szintén megoldása a homogén egyenletnek.

5.9. Tétel. *Az (5.6) homogén lineáris egyenlet megoldásainak halmaza lineáris tér.*

Az $\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}\}$ halmazt az (5.6) homogén egyenlet *fundamentális megoldáshalmazának* vagy a *megoldások alaprendszerének* nevezzük, ha $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ megoldásai az (5.6) egyenletnek és lineárisan független függvények I-n.

Helyezzük el az $\mathbf{x}^{(1)}$ vektor értékű függvény képletét egy mátrix első oszlopában, az $\mathbf{x}^{(2)}$ függvényt a második oszlopában, és így tovább, az $\mathbf{x}^{(n)}$ függvényt az n-edik oszlopában. A kapott mátrixot $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t))$ jelöli. Ennek a mátrixnak a determinánsát az $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ megoldások *Wronski-determinánsának* nevezzük:

$$W(t) = \det(\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)).$$

Megmutathatók az alábbi állítások.

5.10. Tétel. *Az* $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ *függvények lineárisan függetlenek az* I *intervallumon, akkor és csak akkor, ha a Wronski-determinánsuk nem azonosan nulla* I*-n.*

5.11. Tétel. *Legyen* $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ *olyan megoldásai az (5.6) egyenletnek, amelyek az*

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{z}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{z}^{(n)} \tag{5.7}$$

kezdeti értékekhez tartoznak. Ekkor az $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ *függvények akkor és csak akkor lineárisan függetlenek az* I *intervallumon, ha a*

$$\mathbf{z}^{(1)}, \ldots, \mathbf{z}^{(n)}$$

vektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$W(t_0) \neq 0.$$

5.12. Tétel. *Az (5.6) egyenlet megoldásainak halmaza* n*-dimenziós lineáris tér.*

5.3. Konstans együtthatós homogén lineáris rendszerek

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.8}$$

konstans együtthatós homogén lineáris rendszert.

Keressük az (5.8) egyenlet megoldását az

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$$

alakban, ahol $\boldsymbol{\xi}$ valós vagy komplex vektor. Ekkor

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi},$$

ezért visszahelyettesítve az (5.8) egyenletbe kapjuk, hogy

$$\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi},$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0},$$

azaz λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, $\boldsymbol{\xi}$ pedig a λ-hoz tartozó sajátvektora $\mathbf{A}$-nak.

Az 5.12. Tétel szerint tehát elegendő n darab lineárisan független megoldást találni, mert ekkor ezek lineáris kombinációjaként az összes megoldás felírható. Különböző eseteket különböztetünk meg.

1. eset: páronként különböző sajátértékek

Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ páronként különböző sajátértékei, $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ pedig a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorai $\mathbf{A}$-nak. Lineáris algebrából ismert (lásd az 5.4. Tételt), hogy ekkor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ lineárisan független vektorok. Kaptuk ekkor, hogy

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t) = e^{\lambda_n t}\boldsymbol{\xi}^{(n)}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.9}$$

megoldásai az (5.8) egyenletnek. Másrészt

$$W(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})(0) = \det(\mathbf{x}^{(1)}(0), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(0)) = \det(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}) \neq 0,$$

hiszen $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ lineárisan függetlenek. Ezért $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ lineárisan függetlenek, azaz (5.9) egy alaprendszere az (5.8) homogén egyenletnek. Ebben az esetben az (5.8) egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\boldsymbol{\xi}^{(n)}.$$

Ha minden sajátérték valós, akkor az (5.9) alaprendszer valós függvényekből áll, de ha van komplex sajátértéke az együtthatómátrixnak, akkor az (5.9) függvények között komplex függvények is vannak. A következő esetben azt mutatjuk majd meg, hogy ezeket a kompex megoldásokat mindig helyettesíteni lehet valós megoldásokkal.

5.13. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{5.10}$$

egyenletet az

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kezdeti értéket használva! Az együtthatómátrix sajátértéke $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 10$, a megfelelő sajátvektorok $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (1,1)^T$ és $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (3,-5)^T$. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{10t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

azaz komponensenként kiírva a megoldást

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{10t} \\ x_2(t) &= c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{10t}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételt alkalmazva

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 1 \\ c_1 - 5c_2 &= 0, \end{aligned}$$

amelynek megoldása $c_1 = 5/8$ és $c_2 = 1/8$. Ezért a kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = \frac{5}{8}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}e^{10t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

azaz

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{5}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{10t} \\ x_2(t) &= \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{5}{8}e^{10t}. \end{aligned}$$

□

2. eset: komplex sajátértékek

Tegyük fel, hogy $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex sajátértéke $\mathbf{A}$-nak,

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

pedig a λ-hoz tartozó (komplex) sajátvektor. (Itt $\mathbf{u}$ a $\boldsymbol{\xi}$ vektor koordinátái valós részét, $\mathbf{v}$ pedig a képzetes részeit tartalmazó vektor.) Ekkor tudjuk, hogy $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ is sajátértéke $\mathbf{A}$-nak és a hozzá tartozó sajátvektor pedig

$$\bar{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}.$$

Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} \\ &= e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ &= e^{\alpha t}\Big(\cos\beta t\,\mathbf{u} - \sin\beta t\,\mathbf{v} + i(\cos\beta t\,\mathbf{v} + \sin\beta t\,\mathbf{u})\Big) \end{aligned}$$

komplex értékű megoldása az (5.8) egyenletnek. Most is, mint a skaláris lineáris egyenleteknél, könnyen látható, hogy a komplex megoldás valós ill. képzetes része megoldása az (5.8) egyenletnek. Azaz

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t\,\mathbf{u} - \sin\beta t\,\mathbf{v}) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t\,\mathbf{v} + \sin\beta t\,\mathbf{u})$$

megoldások, és az is igazolható, hogy $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ és $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ mindig lineárisan függetlenek. Így az általános megoldás képletében a $e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$ és $e^{\bar{\lambda} t}\bar{\boldsymbol{\xi}}$ komplex megoldások helyettesíthetők az $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ megoldásokkal.

5.14. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

feladatot! Az együtthatómátrix sajátértéke $\lambda_1 = 6+3i$ és $\lambda_2 = 6-3i$, a megfelelő sajátvektorok $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (5, 1+3i)^T$ és $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (5, 1-3i)^T$. Az egyenlet egy komplex megoldása tehát

$$\begin{aligned} e^{(6+3i)t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} &= e^{6t}(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} \\ &= e^{6t}\begin{pmatrix} 5\cos 3t + 5i\sin 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t + i(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ 3\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}.$$

A kezdeti feltételt alkalmazva

$$\begin{aligned} 5c_1 \phantom{{}+3c_2} &= 2 \\ c_1 + 3c_2 &= 1, \end{aligned}$$

amelynek megoldása $c_1 = 2/5$ és $c_2 = 1/5$. Ezért a kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{6t}\begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \frac{2}{5}\cos 3t - \frac{6}{5}\sin 3t \end{pmatrix} + e^{6t}\begin{pmatrix} \sin 3t \\ \frac{3}{5}\cos 3t + \frac{1}{5}\sin 3t \end{pmatrix} = e^{6t}\begin{pmatrix} 2\cos 3t + \sin 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix}.$$

□

3/a eset: többszörös sajátérték

A többszörös sajátérték esetét csak a 3-dimenziós esetben vizsgáljuk. Az általánosabb eset hasonló, de jóval több eset fordul elő. Először azt tesszük fel, hogy **A**-nak λ 3-szoros sajátértéke, de a λ sajátértékhez található $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \boldsymbol{\xi}^{(3)}$ 3 db lineárisan független sajátvektor. Ekkor

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}^{(2)}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}^{(3)}$$

három lineárisan független megoldása az egyenletnek, hiszen az $\mathbf{x}^{(1)}(0) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}(0) = \boldsymbol{\xi}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}(0) = \boldsymbol{\xi}^{(3)}$ vektorok lineárisan függetlenek. Így az általános megoldás alakja

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\Big(c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)} + c_3\boldsymbol{\xi}^{(3)}\Big).$$

Egy második esetben tegyük fel, hogy **A** sajátértékei λ_1 és λ_2, ahol λ_1 kétszeres, λ_2 pedig egyszeres sajátérték, és λ_1-hez található két lineárisan független sajátvektor: $\boldsymbol{\xi}^{(11)}$ és $\boldsymbol{\xi}^{(12)}$. A λ_2-höz tartozó sajátvektort jelölje $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Ekkor is könnyen ellenőrizhető, hogy az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t}\Big(c_1\boldsymbol{\xi}^{(11)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(12)}\Big) + c_3 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{\xi}^{(2)}.$$

5.15. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

egyenletet!

Az 5.6. Példában láttuk, hogy az együtthatómátrixnak $\lambda_1 = -1$ egyszeres, $\lambda_2 = 1$ pedig kétszeres sajátértéke. A λ_1 egy sajátvektora $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (-1, -5, 1)^T$, a λ_2 geometriai multiplicitása 2, és a hozzá tartozó $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (1, 0, 1)^T$ és $\boldsymbol{\xi}^{(3)} = (1, 1, 1)^T$ sajátvektorok lineárisan függetlenek. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Kétdimenziós esetben is hasonlóan írjuk fel a megoldás képletét, ha a kétszeres sajátértékhez két kineárisan független sajátvektor található.

5.16. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

egyenletet. Az együtthatómátrix sajátértéke 2, ami kétszeres. A 2-höz tartozó sajátvektok például $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\left[c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = e^{2t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

□

3/b eset: többszörös sajátérték

Tegyük fel újra, hogy λ algebrai multiplicitása legalább 2, de geometriai multiplicitása csak 1. Legyen $\boldsymbol{\xi}$ a λ-hoz tartozó sajátvektor. Ekkor $e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$ megoldás, de szükségünk van még egy, a λ sajátértékhez kapcsolódó, az előbbitől lineárisan független megoldásra.

A skaláris egyenletekre alkalmazott próbafüggvény módszerénél tapasztaltak alapján természetes egy újabb megoldást a

$$te^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + e^{\lambda t}\boldsymbol{\eta} \tag{5.13}$$

alakban keresni. Ezt behelyettesítve az (5.8) egyenletbe

$$e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + \lambda te^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}te^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{\eta}$$

adódik. Itt pontosan akkor kapunk azonosságot, ha a $te^{\lambda t}$ és az $e^{\lambda t}$ függvények együtthatói megegyeznek az egyenlet két oldalán:

$$\begin{aligned} \lambda\boldsymbol{\xi} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi} + \lambda\boldsymbol{\eta} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}, \end{aligned}$$

azaz ekvivalens alakban

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \tag{5.14}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}. \tag{5.15}$$

Ekkor az (5.14) egyenlet szerint $\boldsymbol{\xi}$ a λ-hoz tartozó sajátvektora $\mathbf{A}$-nak. Az (5.15) egyenletet teljesítő $\boldsymbol{\eta}$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó *általánosított sajátvektorának* nevezzük. Nyilvánvalóan egy $\boldsymbol{\eta}$ általánosított sajátvektor nincs benne a λ sajátérték sajátalterében, hiszen egyébként teljesítené az (5.14) egyenletet, azaz az (5.15) egyenlet bármely $\boldsymbol{\eta}$ megoldása lineárisan független a $\boldsymbol{\xi}$ sajátvektortól. Megmutatható a következő tétel.

5.17. Tétel. *Legyen λ egy olyan sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrixnak, amelynek geometriai multiplicitása kisebb, mint az algebrai multiplicitása. Ekkor az (5.15) egyenletnek létezik legalább egy $\boldsymbol{\eta}$ megoldása, amely nem eleme az $\mathbf{A}$ mátrix összes sajátvektorai által generált lineáris altérnek.*

5.18. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

egyenletet. Ennek karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2,$$

ezért a $\lambda = 2$ sajátérték algebrai multiplicitása kétszeres.

Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sajátvektor egyenletet. A $\lambda = 2$ sajátértéket behelyettesítve a fenti egyenletbe kapjuk

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 &= 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek egy lehetséges megoldása például

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

és látható, hogy minden másik sajátvektor ennek konstansszorosa, azaz a $\lambda = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1.

A megoldás képletéhez ezért szükségünk van az általánosított sajátvektor felírására. Tekintsük a

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

általánosított sajátvektor egyenletet. Behelyettesítve λ és $\boldsymbol{\xi}$ értékétm kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -\eta_1 + \eta_2 &= 1 \\ -\eta_1 + \eta_2 &= 1. \end{aligned}$$

Látható, hogy az egyik egyenlet elhagyható, így végtelen sok $\boldsymbol{\eta}$ adható meg. Egy lehetséges megoldás a

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektor. Ezért az (5.13) képlet szerint a

$$te^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + e^{\lambda t}\boldsymbol{\eta} = te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

megoldása az egyenletnek. Ez látható, hogy lineárisan független az első megoldástól, ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_1 + c_2(t+1) \end{pmatrix}$$

alakban írható fel.

□

5.19. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -14 & 5 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

egyenletet!

Az 5.7. Példában láttuk, hogy az együtthatómátrixnak $\lambda_1 = -3$ egyszeres, $\lambda_2 = 3$ pedig kétszeres sajátértéke. A λ_1 egy sajátvektora $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (-5, -10, 1)^T$, a λ_2 geometriai multiplicitása pedig csak 1, és $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (1, 2, 1)^T$ egy lehetséges sajátvektora. Szükségünk van tehát a harmadik megoldás képletéhez a $\lambda_2 = 3$-hoz tartozó $\boldsymbol{\eta}$ általánosított sajátvektorra. Az (5.15) egyenletet alkalmazzuk, ahol a jobb oldalon a $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{(2)}$ vektort használjuk:

$$\begin{aligned} -7\eta_1 + \eta_2 + 5\eta_3 &= 1 \\ -14\eta_1 + 2\eta_2 + 10\eta_3 &= 2 \\ -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 &= 1. \end{aligned}$$

A második egyenlet elhagyható, hiszen az első egyenlet kétszerese:

$$\begin{aligned} -7\eta_1 + \eta_2 + 5\eta_3 &= 1 \\ -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 &= 1. \end{aligned}$$

A kapott két egyenlet már független. Legyen például $\eta_1 = 0$, ekkor

$$\begin{aligned} \eta_2 + 5\eta_3 &= 1 \\ \eta_2 - \eta_3 &= 1, \end{aligned}$$

amelynek megoldása $\eta_2 = 1$ és $\eta_3 = 0$, azaz

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \left[t e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

□

5.20. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

egyenletet. Az együtthatómátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 \\ &= -(\lambda - 4)^3. \end{aligned}$$

Így $\mathbf{A}$-nak $\lambda = 4$ háromszoros algebrai multiplicitású sajátértéke. A sajátvektor egyenlet

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Most elhagyható két egyenlet is. Marad

$$\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0.$$

Két szabadsági fokunk van, tehát találhatunk két lineárisan független megoldását az egyenletnek. Ilyen például

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Szükségünk van tehát általánosított sajátvektorra is a harmadik megoldás képletéhez. Ennek egyenlete

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= \xi_1 \\ \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= \xi_2 \\ -\eta_1 - \eta_2 - 2\eta_3 &= \xi_3, \end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ egy sajátvektora az együtthatómátrixnak. Látható, hogy az egyenlet jobb oldalára sem a $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, sem a $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ vektor nem írható, hiszen ezekre nem oldható meg az egyenletrendszer. Keressük tehát a jobb oldalt $\boldsymbol{\xi} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ alakban. Ekkor az

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= -c_1 - 2c_2 \\ \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= c_1 \\ -\eta_1 - \eta_2 - 2\eta_3 &= c_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$-c_1 - 2c_2 = c_1 \qquad \text{és} \qquad -c_1 - 2c_2 = -c_2,$$

azaz $c_1 = -c_2$, például $c_1 = 1$ és $c_2 = -1$. Ekkor

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

így az általánosított sajátvektor egyenlete

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= 1 \\ \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= 1 \\ -\eta_1 - \eta_2 - 2\eta_3 &= -1. \end{aligned}$$

Most is csak egy egyenlet marad

$$\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 = 1,$$

amelynek egy lehetséges megoldása például

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{4t} \left[c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

□

3/c eset: többszörös sajátérték

Tegyük fel újra, hogy a 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékének algebrai multiplictása 3, geontban leírtak szerint tekintsük az (5.15) általánosított sajátérték egyenletnek létezik egy $\boldsymbol{\eta}$ megoldása, de tegyük fel, hogy az az (5.15) egyenletnek nincs másik, az elsőtől lineárisan független megoldása. Ekkor szükségünk van még egy, a λ-hoz tartozó megoldásra. Keressük ezt az

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda t} \boldsymbol{\xi} + t e^{\lambda t} \boldsymbol{\eta} + e^{\lambda t} \boldsymbol{\omega}$$

alakban. Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti $\mathbf{x}(t)$ függvény pontosan akkor megoldása az (5.8) egyenletnek, ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{\xi} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\xi}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\eta}. \end{aligned}$$

A fenti $\boldsymbol{\omega}$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó *másodrendű általánosított sajátvektorának* nevezzük.

5.21. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

egyenletet! Számítsuk ki az együtthatómátrix sajátértékeit:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -1 & -1 \\ 8 & 4-\lambda & 4 \\ -1 & 1 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 108\lambda + 216 \\ &= -(\lambda - 6)^3, \end{aligned}$$

így $\lambda = 6$ háromszoros sajátértéke az együtthatómátrixnak. A sajátvektoregyenlet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

amiből

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 &= 0 \\ 8\xi_1 - 2\xi_2 + 4\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Legyen például $\xi_3 = 1$, ekkor

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 &= -1 \\ 8\xi_1 - 2\xi_2 &= -4, \end{aligned}$$

amelynek megoldása $\xi_1 = -1$ és $\xi_2 = -2$. A megfelelő sajátvektor tehát

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a sajátérték geometriai multiplicitása tehát csak 1. Szükségünk van általánosított sajátvektorra, amelynek egyenlete:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 &= -1 \\ 8\eta_1 - 2\eta_2 + 4\eta_3 &= -2 \\ -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 1. \end{aligned}$$

Most is elhagyható a harmadik egyenlet, de az első két egyenlet már független:

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 &= -1 \\ 8\eta_1 - 2\eta_2 + 4\eta_3 &= -2. \end{aligned}$$

Ennek egy lehetséges megoldása $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$ és $\eta_3 = 0$, azaz

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de ettől lineárisan független második megoldása már nincs az egyenletnek. Ezért keresünk másodrendű általánosított sajátvektort is:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszernek létezik megoldása, hiszen a harmadik egyenlet elhagyható:

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 &= 0 \\ 8\omega_1 - 2\omega_2 + 4\omega_3 &= 1. \end{aligned}$$

Egy megoldás például

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát

$$\mathbf{x}(t) = e^{6t}\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_3 \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

□

5.4. Fundamentális mátrix és Cauchy-mátrix

Tegyük fel, hogy az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \qquad t \in I, \tag{5.16}$$

homogén lineáris egyenletnek ismerjük egy

$$\mathbf{x}^{(1)}(t), \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t), \qquad t \in I$$

fundamentális rendszerét. A

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = (\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)), \qquad t \in I$$

mátrix értékű függvényt az (5.16) rendszer *fundamentális mátrixának* vagy más szóval *alapmátrixának* hívjuk. Ekkor $W(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = \det(\boldsymbol{\Psi}(t))$ a megoldások Wronski-determinánsa. A Wronski-determináns tulajdonságaiból következik, hogy $\boldsymbol{\Psi}(t)$ invertálható minden $t \in I$-re. Jelölje $\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)$ a $\boldsymbol{\Psi}(t)$ mátrix inverzét.

Az (5.16) egyenlet általános megoldása felírható az

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$$

alakban. Ezt a $\boldsymbol{\Psi}(t)$ fundamentális mátrix segítségével röviden az

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c} \tag{5.17}$$

alakban írhatjuk fel, ahol $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ egy tetszőleges konstans vektor. Ha az (5.16) egyenlethez tekintjük az

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z} \tag{5.18}$$

kezdeti feltételt, akkor az (5.16)-(5.18) kezdeti érték feladat megoldását az (5.17) formulában azon $\mathbf{c}$ vektor adja, amelyre

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Psi}(t_0)\mathbf{c},$$

azaz

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{z}.$$

Ezt visszahelyettesítve az (5.17) képletbe kapjuk, hogy az (5.16)-(5.18) kezdeti érték feladat megoldásának képlete

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{z}, \qquad t \in I. \tag{5.19}$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}'(t) &= (\mathbf{x}^{(1)'}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)'}(t)) \\ &= (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(n)}(t)) \\ &= \mathbf{A}(t)(\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)) \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t).\end{aligned}$$

A fundamentális mátrix fenti tulajdonságait összefoglalhatjuk a következő tételben:

5.22. Tétel. *Legyen* $\mathbf{\Psi}(t), \quad t \in I$ *egy fundamentális mátrixa az (5.16) rendszernek. Ekkor*

(i) $\mathbf{\Psi}(t)$ *invertálható minden* $t \in I$*-re;*

(ii) az (5.16) egyenlet általános megoldásának képlete $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}, \quad t \in I,\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$*;*

(iii) az (5.16)-(5.18) kezdeti érték feladat megoldásának képlete $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{z}, \quad t \in I$*;*

(iv) a fundamentális mátrix teljesíti a $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)$ *mátrix differenciálegyenletet.*

5.23. Példa. Tekintsük újra az 5.13. Példában vizsgált (5.10) egyenletet. Ennek általános megoldását megadtuk az (5.11) képletben. Az ebben szereplő két megoldást elhelyezve egy mátrix oszlopaiban kapjuk a

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{10t} \\ e^{2t} & -5e^{10t} \end{pmatrix}$$

mátrixot, amely egy lehetséges fundamentális mátrixa az (5.10) egyenletnek. □

5.24. Példa. Könnyen ellenőrizhető, hogy az 5.14. feladatban vizsgált egyenlet egy fundamentális mátrixa

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{6t}\cos 3t & 5e^{6t}\sin 3t \\ e^{6t}(\cos 3t - 3\sin 3t) & e^{6t}(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix}.$$

□

Mivel végtelen sok fundamentális rendszer választható a megoldások teréből, ezért egy homogén lineáris rendszernek végtelen sok fundamentális mátrixa létezik. Egy speciális fundamentális mátrix az a $\mathbf{\Phi}(t)$-vel jelölt fundamentális mátrix, amelyre a $\mathbf{\Phi}(0) = I$ kezdeti feltétel teljesül, azaz amelynek oszlopvektorai azok az $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ megoldásai az (5.16) egyenletnek, amelyek az

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \mathbf{e}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(0) = \mathbf{e}^{(n)}$$

kezdeti feltételekhez tartoznak. (Itt $\mathbf{e}^{(j)}$ a j-edik standard bázisvektor $\mathbb{R}^n$-ben, azaz j-edik koordinátája 1, az összes többi pedig 0.) Erre a speciális fundamentális mátrixra az (5.19) formula az

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{z}, \qquad t \in I \tag{5.20}$$

képletre egyszerűsödik.

5.25. Példa. Tekintsük újra az 5.13. és 5.23. Példákban vizsgált (5.10) egyenletet. Írjuk fel most a rendszer $\mathbf{\Phi}(t)$ fundamentális mátrixát! Ehhez azt a két megoldását használjuk az (5.10) egyenletnek, amelyek az

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{illetve} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kezdeti feltételekhez tartoznak. $\mathbf{x}^{(1)}$-et meghatároztuk az 5.13. Példában (lásd az (5.12) képletet):

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \frac{5}{8}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}e^{10t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x}^{(2)}$ meghatározásához az (5.11) általános megoldás képletébe helyettesítjük be a kezdeti feltételt:

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & 3c_2 & = & 0 \\ c_1 & - & 5c_2 & = & 1, \end{array}$$

amelyből $c_1 = 3/8$ és $c_2 = -1/8$ adódik, azaz

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \frac{3}{8}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}e^{10t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ezért a keresett fundamentális mátrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{10t} & \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{3}{8}e^{10t} \\ \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{5}{8}e^{10t} & \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{10t} \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

□

Megmutatható a következő állítás:

5.26. Tétel. *Legyen $\mathbf{\Psi}(t)$, $\quad t \in I$ egy fundamentális mátrixa az (5.16) egyenletnek, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy invertálható konstans mátrix. Ekkor a*

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{P} \tag{5.22}$$

mátrix is fundamentális mátrixa az (5.16) egyenletnek. Fordítva, ha $\mathbf{\Psi}(t), \tilde{\mathbf{\Psi}}(t) \quad t \in I$ két fundamentális mátrixa az (5.16) egyenletnek, akkor létezik olyan $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható konstans mátrix, hogy (5.22) teljesül.

Az (5.19) képlet motiválja a következő definíciót: az

$$\mathbf{U}(t, t_0) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$$

mátrixot az (5.16) egyenlet *Cauchy-mátrixának* nevezzük. Az 5.26. tétel segítségével könnyen megmutatható, hogy különböző fundamentális mátrixokra felírt Cauchy-mátrixok azonosak, azaz az (5.16) egyenlet Cauchy-mátrixa egyértelműen definiált. Legyen ugyanis $\tilde{\mathbf{\Psi}}(t)$ egy másik fundamentális mátrix. Ekkor (5.22) teljesül, ezért

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}(t)\tilde{\mathbf{\Psi}}^{-1}(t_0) = (\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{P})(\mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0).$$

A következő tételben összefoglaltuk a Cauchy-mátrix néhány alapvető tulajdonságát:

5.27. Tétel. *Legyen $\mathbf{U}(t, t_0)$ az (5.16) rendszer Cauchy-mátrixa. Ekkor*

(i) $\mathbf{U}(t, t_0)$ *invertálható minden* $t, t_0 \in I$*-re, és* $\mathbf{U}^{-1}(t, t_0) = \mathbf{U}(t_0, t)$*;*

(ii) $\mathbf{U}(t, t_0) = \mathbf{U}(t, s)\mathbf{U}(s, t_0)$ *minden* $t, t_0, s \in I$*-re;*

(iii) az (5.16)-(5.18) kezdeti érték feladat megoldása $\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t, t_0)\mathbf{z}, \quad t \in I$*;*

(iv) $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t, t_0), \quad \mathbf{U}(t_0, t_0) = \mathbf{I}.$

Bizonyítás: (i) Az állítás következik a

$$\mathbf{U}(t,t_0)\mathbf{U}(t_0,t) = (\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0))(\mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{\Psi}^{-1}(t)) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t) = \mathbf{I}$$

számolásból.

(ii) $\mathbf{U}$ definícióját felhasználva kapjuk:

$$\mathbf{U}(t,s)\mathbf{U}(s,t_0) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{\Psi}(s)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0) = \mathbf{U}(t,t_0).$$

(iii) Az 5.22. Tétel (iii) pontjából következik.

(iv) Az 5.22. Tétel (iv) pontja szerint

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}(t,t_0) = \mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t,t_0).$$

□

5.5. Mátrix exponenciális függvény

Valós vagy komplex x-re az e^x függvény egy lehetsége definíciója az

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

hatványsorral történhet. Ennek mintájára egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra definiáljuk az $e^{\mathbf{A}}$ mátrix exponenciális kifejezést az

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \cdots$$

formális végtelen sorral. Megmutatható, hogy ez a sor konvergens. Definiálhatjuk ezért a

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \tag{5.23}$$

mátrix függvényt. Megmutatható,hogy ez a végtelen sor konvergens minden t-re, sőt differenciálható, és

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{k!} = \mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t).$$

A definíció alapján

$$\mathbf{\Phi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}.$$

Az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix exponenciális függvény tulajdonságait a következő tételben foglalhatjuk össze.

5.28. Tétel. *Az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix exponenciális függvényre*

(i) $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} = e^{\mathbf{A}(t+s)}$ *minden* $t, s \in \mathbb{R}$*-re;*

(ii) $e^{\mathbf{A}t}$ *invertálható, és inverze* $e^{-\mathbf{A}t}$*;*

(iv) $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$*;*

(v) $e^{\mathbf{A}t}$ *differenciálható minden* t*-re, és* $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$*;*

(vi) Az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

konstans együtthatós homogén lineáris rendszer $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ kezdeti feltételt teljesítő alapmátrixa

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

alakban adható meg, és a Cauchy-mátrixa pedig

$$\mathbf{U}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}.$$

5.29. Példa. Számítsuk ki az $e^{\mathbf{A}}$ mátrix exponenciális értéket, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Az 5.13., 5.23. és 5.25. Példában vizsgáltuk az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó homogén lineáris rendszert. Az 5.25. Példában például az (5.21) képletben megadtuk a homogén rendszer $\mathbf{\Phi}$ alapmátrixát. Mivel $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$, ezért az (5.21) képletbe $t = 1$-et behelyettesítve kapjuk

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}e^2 + \frac{3}{8}e^{10} & \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{8}e^{10} \\ \frac{5}{8}e^2 - \frac{5}{8}e^{10} & \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{8}e^{10} \end{pmatrix}.$$

□

5.6. Inhomogén lineáris rendszerek megoldása konstansok variálásának módszerével

Tekintsük újra az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad t \in I \tag{5.24}$$

inhomogén lineáris egyenletet és az

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z} \tag{5.25}$$

kezdeti feltételt. Tegyük fel, hogy a megfelelő

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \qquad t \in I \tag{5.26}$$

homogén egyenletnek adott egy $\mathbf{\Psi}(t)$ fundamentális mátrixa, azaz ismert egy alaprendszere. Ekkor az (5.26) homogén egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}_H(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

A konstansok variálásának módszerét használva keressük az (5.24) inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az

$$\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$$

alakban, ahol $\mathbf{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ egy meghatározandó paraméter. Az (5.24) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{u}$ teljesíti az

$$\mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t)$$

egyenletet, amiből

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t) \tag{5.27}$$

következik, hiszen $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)$. Ez egy lineáris egyenletrendszer $\mathbf{u}'(t)$-re, amely mindig megoldható, hiszen $\mathbf{\Psi}(t)$ invertálható. Kapjuk

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{f}(t),$$

amelynek egy konkrét megoldása

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds.$$

Ezt visszahelyettesítve $\mathbf{x}_{IP}$ képletébe és alkalmazva az $\mathbf{x}_{IH}(t) = \mathbf{x}_{H}(t) + \mathbf{x}_{IP}(t)$ összefüggést kapjuk, hogy az (5.24) inhomogén rendszer általános megoldásának alakja

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds.$$

Ebbe behelyettesítve az (5.25) kezdeti feltételt, kapjuk, hogy

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{c},$$

amiből következik, hogy az (5.24)-(5.25) kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{z} + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds, \qquad t \in I. \tag{5.28}$$

Az (5.28) formulát *konstans variációs formulának* nevezzük. A Cauchy-mátrix segítségével a képlet az

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t, t_0)\mathbf{z} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{U}(t, s)\mathbf{f}(s)\,ds, \qquad t \in I \tag{5.29}$$

ekvivalens alakban is megadható.

A mátrix exponenciális függvény tulajdonságaiból (lásd 5.28. Tételt) következik, hogy az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad t \in I$$

konstans együtthatós inhomogén rendszerre felírt (5.28) vagy (5.29) konstans variációs formulának egy másik ekvivalens alakja

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z} + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds, \qquad t \in I. \tag{5.30}$$

5.30. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 7e^{3t} \\ -14e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kezdeti érték feladatot! Az 5.13. Példában végigszámoltuk, hogy a megfelelő homogén egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}_{H}(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{10t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

és így, (ahogy azt az 5.23. Példában is láttuk), a homogén egyenlet egy alapmátrixa

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{10t} \\ e^{2t} & -5e^{10t} \end{pmatrix}.$$

A konstansok variálásának módszerét használva keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az $\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$ alakban. Ekkor $\mathbf{u}$ teljesíti az (5.27) egyenletet, amely ebben az esetben:

$$\begin{aligned} e^{2t}u_1'(t) + 3e^{10t}u_2'(t) &= 7e^{3t} \\ e^{2t}u_1'(t) - 5e^{10t}u_2'(t) &= -14e^{3t}. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$u_1'(t) = -\frac{7}{8}e^{t} \qquad \text{és} \qquad u_2'(t) = \frac{21}{8}e^{-7t}.$$

Így

$$u_1(t) = -\int \frac{7}{8}e^{t}\,dt = -\frac{7}{8}e^{t} \qquad \text{és} \qquad u_2(t) = \int \frac{21}{8}e^{-7t}\,dt = -\frac{3}{8}e^{-7t}.$$

(Ne felejtsük el, hogy egy $\mathbf{u}$ függvényt elég megadni, ezért nem kell az integráláskor az összes primitív függvényt felírni.) Ezért a partikuláris megoldás képlete

$$\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{10t} \\ e^{2t} & -5e^{10t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{8}e^{t} \\ -\frac{3}{8}e^{-7t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

és így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{10t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ebbe behelyettesítve a kezdeti feltételt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 - 2 &= -1 \\ c_1 - 5c_2 + 1 &= 2, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 1 \\ c_1 - 5c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ebből $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$ adódik, tehát a kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{2t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

□

5.31. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 15e^{6t} \\ -e^{6t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kezdeti érték feladatot! A megfelelő homogén egyenletet az 5.14. Példában oldottuk meg, az 5.24. Példában pedig kaptuk, hogy

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{6t}\cos 3t & 5e^{6t}\sin 3t \\ e^{6t}(\cos 3t - 3\sin 3t) & e^{6t}(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix}$$

a homogén egyenlet egy fundamentális mátrixa. A konstansok variálásának módszerét használva keressünk partikuláris megoldást az $\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$ alakban. Ekkor $\mathbf{u}'$-re az

$$\begin{aligned} 5e^{6t}\cos 3t\, u_1'(t) + 5e^{6t}\sin 3t\, u_2'(t) &= 15e^{6t} \\ e^{6t}(\cos 3t - 3\sin 3t)u_1'(t) + e^{6t}(3\cos 3t + \sin 3t)u_2'(t) &= -e^{6t} \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletet egyszerűsíthetjük, majd kivonhatjuk a másodikból. Ekkor

$$\begin{aligned} e^{6t}\cos 3t\, u_1'(t) + e^{6t}\sin 3t\, u_2'(t) &= 3e^{6t} \\ -3e^{6t}\sin 3t\, u_1'(t) + 3e^{6t}\cos 3t\, u_2'(t) &= -4e^{6t} \end{aligned}$$

adódik. Ha az első egyenletet $3\sin 3t$-vel, a másodikat pedig $\cos 3t$-vel megszorozzuk és összeadjuk a két egyenletet, majd a $\cos^2 3t + \sin^2 3t = 1$ azonosságot alkalmazzuk, kapjuk, hogy

$$3e^{6t}u_2'(t) = 9e^{6t}\sin 3t - 4e^{6t}\cos 3t,$$

azaz

$$u_2'(t) = 3\sin 3t - \frac{4}{3}\cos 3t,$$

amiből

$$u_2(t) = -\cos 3t - \frac{4}{9}\sin 3t.$$

Hasonlóan,

$$u_1'(t) = 3\cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t,$$

és így

$$u_1(t) = \sin 3t - \frac{4}{9}\cos 3t.$$

Ezért a partikuláris megoldás képlete

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{IP}(t) &= \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 5e^{6t}\cos 3t & 5e^{6t}\sin 3t \\ e^{6t}(\cos 3t - 3\sin 3t) & e^{6t}(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 3t - \frac{4}{9}\cos 3t \\ -\cos 3t - \frac{4}{9}\sin 3t \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{9}e^{6t}\begin{pmatrix} 20 \\ 31 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Az egyenlet általános megoldás tehát

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ 3\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} - \frac{1}{9}e^{6t}\begin{pmatrix} 20 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

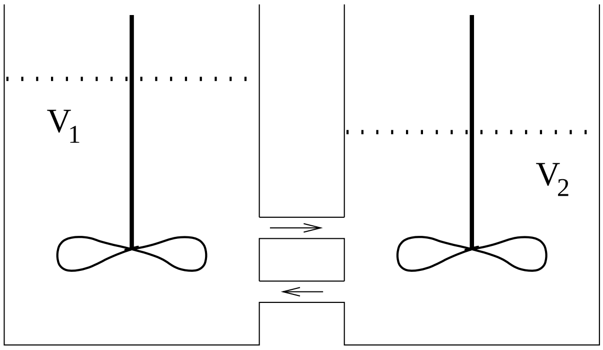
A kezdeti feltételt behelyettesítve kapjuk

$$\begin{aligned} 5c_1 - \frac{20}{9} &= 1 \\ c_1 + 3c_2 - \frac{31}{9} &= -1, \end{aligned}$$

amelyet megoldva $c_1 = \frac{29}{45}$ és $c_2 = \frac{3}{5}$, ezért a kezdeti érték feladat megoldása

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \frac{29}{45}e^{6t}\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} + \frac{3}{5}e^{6t}\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ 3\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} - \frac{1}{9}e^{6t}\begin{pmatrix} 20 \\ 31 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}e^{6t}\begin{pmatrix} 29\cos 3t + 27\sin 3t - 20 \\ 22\cos 3t - 12\sin 3t - 31 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□



5.11. ábra. kettős tank

5.7. Alkalmazások

5.32. Példa. Tegyük fel, hogy adott két tank (lásd az 5.11. Ábrát), amelyeket két csővel összekötünk. Az egyik csövön r l/perc sebességgel pumpáljuk át a folyadékot az első tartályból a másodikba, a másikon pedig r l/perc sebességgel pumpáljuk át a folyadékot a második tartályból az elsőbe. Az első tartályban V_1 l, a másodikban pedig V_2 l sóoldat van. Kezdetben az első tartályban A_1 kg, a másodikban pedig A_2 kg só van feloldva. A két csőben elhanyagolható a folyadékmennyiség, és az oldatnak a csőben való tartózkodási ideje elhanyagolható. Feltesszük továbbá azt is, hogy a két tartályban az oldatokat folyamatosan keverjük, az oldatok rögtön ideálisan összekeverednek. Számítsuk ki, hogy mennyi só oldat lesz az egyes tartályokban a t időpontban!

Vegyük észre, hogy az egyes tartályokban a folyadék mennyisége konstans marad. Jelölje $Q_1 = Q_1(t)$ az első, $Q_2 = Q_2(t)$ a második tartályban levő só tömegét a t időpontban. Ekkor az első tartály koncentrációja Q_1/V_1 kg/l, a másodiké pedig Q_2/V_2 kg/l lesz. Ezért az első tartályban a só tömege rQ_1/V_1 kg/perc sebességgel csökken, de egyben rQ_2/V_2 kg/perc sebességgel nő. Könnyen látható, hogy teljesül a

$$\begin{array}{rcll} Q_1' & = & -r\frac{Q_1}{V_1} + r\frac{Q_2}{V_2}, & \qquad Q_1(0) = A_1 \\ Q_2' & = & r\frac{Q_1}{V_1} - r\frac{Q_2}{V_2}, & \qquad Q_2(0) = A_2 \end{array} \tag{5.31}$$

lineáris egyenletrendszer.

Nézzük azt a konkrét esetet, amikor az első tartályban 50 l tiszta viz, a másodikban pedig 100 l, kezdetben 3/4 kg/l koncentációjú sóoldat van kezdetben. Tegyük fel, hogy a pumpálás sebessége 5 l/perc. Ekkor az (5.31) egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcll} Q_1' & = & -\frac{1}{10}Q_1 + \frac{1}{20}Q_2, & \qquad Q_1(0) = 0 \\ Q_2' & = & \frac{1}{10}Q_1 - \frac{1}{20}Q_2, & \qquad Q_2(0) = 75. \end{array}$$

Az együtthatómátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} - \lambda & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{10}\right)\left(\lambda + \frac{1}{20}\right) - \frac{1}{10}\frac{1}{20} = \lambda\left(\lambda + \frac{3}{20}\right).$$

Így $\lambda = 0, -\frac{3}{20}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a megfelelő sajátvektorok: $(1,2)^T$ és $(1,-1)^T$. Ezért az egyenletrendszer általános megoldása

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{3}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti feltételeket felhasználva ebből kiszámítható, hogy

$$Q_1 = 25 - 25e^{-\frac{3}{20}t}, \qquad Q_2 = 50 + 25e^{-\frac{3}{20}t}.$$

□

A következő két példában nemlineáris egyenletrendszerekre mutatunk példát. Ezek megoldásait nem tudjuk analitikusan megadni.

5.33. Példa. (ragadozó-zsákmány modell) Tegyük fel, hogy egy olyan biológiai rendszert vizsgálunk, ahol kétfajta egyed él: ragadozó és zsákmány, azaz az egyik tápláléka a másik egyed. Tipikus eset például egy olyan halastó, amelyben kétfajta hal él. Jelölje $x = x(t)$ a zsákmány, $y = y(t)$ pedig a ragadozók egyedszámát a t időpontban. Feltesszük, hogy a zsákmány egyed életfeltételei a ragadozók jelenléte nélkül ideálisak, azaz a Malthus-modell szerint szaporodnak (lásd a 3.22. Példát). Feltesszük tehát, hogy a zsákmány szaporodási sebessége ax, ahol $a > 0$. Másrészt a zsákmány egyedek száma csökken a ragadozók jelenléte miatt. Természetes feltevés, hogy a zsákmány halálozási sebessége a ragadozó és zsákmány találkozások számával arányos, ami pedig az összes zsákmány-ragadozó párok számával arányos: bxy, ahol $b > 0$. Tehát $x' = ax - bxy$. Másrészt a ragadozók a zsákmány jelenléte nélkül kihalnak az egyedszámmal arányos sebességgel: cy, $(c > 0)$, de a zsákmány-ragadozó párok számával arányos sebességgel nő a számuk: dxy, $(d > 0)$. Teljesül tehát ebben az esetben az

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(-c + dx) \end{aligned} \tag{5.32}$$

nemlineáris egyenletrendszer. □

5.34. Példa. (versengő egyedek) Egy másik két egyedet tartalmazó modell esetében azt tesszük fel, hogy a másik egyed jelenléte nélkül mindkét egyed a Verhulst-féle logisztikus modell szerint szaporodna: $x' = ax - bx^2$, $y' = dy - fy^2$. A másik egyed jelenléte hatására viszont az egyedszámuk a két egyed találkozásai számával arányos sebességgel csökken, mivel versengeni fognak a táplálékért:

$$\begin{aligned} x' &= x(a - bx - cy) \\ y' &= y(d - ex - fy), \end{aligned} \tag{5.33}$$

ahol $a, b, c, d, e, f > 0$. □