7. Fixpont tételek

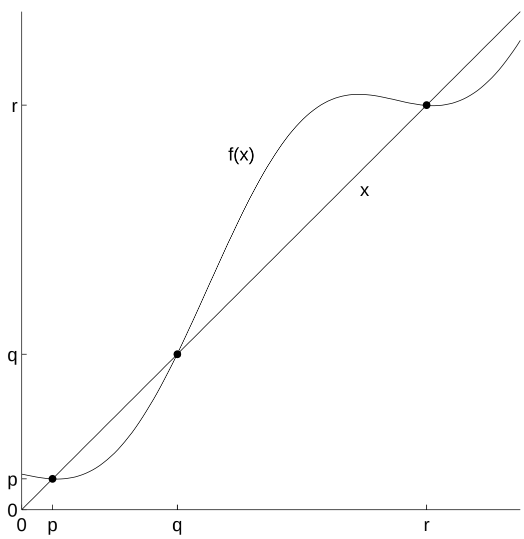
Az

$$x = f(x) \tag{7.1}$$

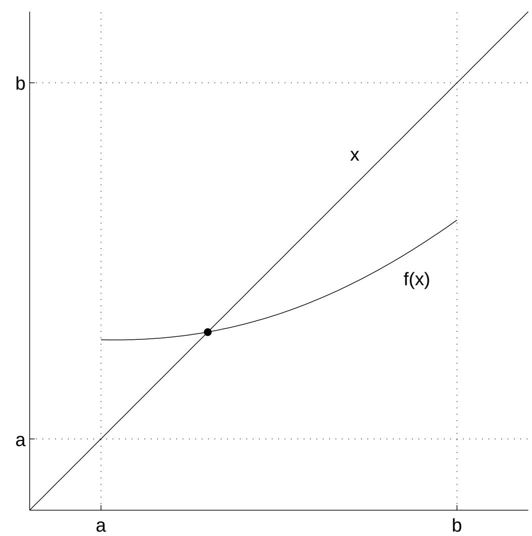
egyenletet *fixpont egyenletnek* nevezzük, annak egy p megoldását pedig az f függvény *fixpontjának* hívjuk. A fixpont egyenlettel az általános esetben, azaz amikor az f függvény metrikus vagy normált terek között értelmezett leképezés, a 7.2. szakaszban foglalkozunk. Általános feltételeket fogunk megadni, amelyek garantálják a fixpont létezését és egyértelműségét, sőt numerikus módszert is kapunk a fixpont közelítésére. A 7.3. szakaszban példákon illusztráljuk, hogy számos matematikai feladat megoldása létezését és egyértelműségét igazolhatjuk úgy, hogy a feladatot átfogalmazzuk fixpont egyenletté, és arra alkalmazunk egy fixpont létezésére vonatkozó általános tételt, ú.n. *fixpont tételt*. Számos fixpont tételt fogalmaztak meg a matematika különböző területein. Mi a 7.2, szakaszban az egyik legfontosabb esettel, a Banach-féle fixpont tétellel foglalkozunk részletesen, de a 7.4. szakaszban felsorolunk – a teljesség igénye nélkül – néhány egyéb gyakran használt fixpont tételt is.

7.1. Fixpont feladat valós függvényekre

Ebben a szakaszban a (7.1) fixpont egyenlet legegyszerűbb esetével foglalkozunk, amikor $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ valós függvény. Ebben az esetben geometriai jelentést tudunk hozzárendelni a fixpontokhoz: az f függvény fixpontjai a függvény grafikonja és az identikus függvény grafikonja metszéspontjainak x- illetve y-koordinátái lesznek. (Lásd a 7.1. ábrát, ahol p, q és r fixpontjai f-nek.) A geometriai háttér miatt rögtön kapjuk a következő állítást a fixpont létezésére vonatkozóan.



7.1. ábra.



7.2. ábra.

7.1. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos függvény. Ekkor f-nek létezik fixpontja $[a, b]$-ben. Ha továbbá f differenciálható (a, b)-n, és létezik olyan $0 \le c < 1$ konstans, hogy $|f'(x)| \le c$ minden $x \in (0, 1)$-re, akkor f-nek pontosan egy fixpontja létezik $[a, b]$-ben.*

Bizonyítás: A fixpont létezése, azaz az a tény, hogy az f függvény grafikonja metszi az $y = x$ egyenest, triviálisan adódik a feltételekből (lásd a 7.2. ábrát).

Tegyük fel, hogy van két különböző fixpontja f-nek, p és q (lásd a 7.3. ábrát). Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel szerint van olyan ξ pont p és q között, ahol $f'(\xi) = 1$, ami ellentmond a feltételeknek. $\square$

Egy megadott x_0 kezdeti értékből indított, és az

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

rekurzív képlettel definiált sorozatot *fixpont iterációs sorozatnak* hívjuk.

7.2. Tétel. *Legyen f folytonos. Ekkor ha egy x_0 kezdeti értékből indított $x_{k+1} = f(x_k)$ fixpont iterációs sorozat konvergens, akkor a határéréke fixpontja f-nek.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $x_k \to p$. Ekkor $x_{k+1} \to p$ és a folytonosság miatt $f(x_k) \to f(p)$, de a határérték egyértelműsége miatt ekkor $p = f(p)$. □

Ezek szerint a fixpont iterációs sorozatot használhatjuk a fixpont közelítésére: ha k „elegendően nagy", akkor x_k „közel lesz" p-hez (feltéve, hogy a sorozat konvergál). A fixpont iterációs sorozatokat valós függvények esetén ú.n. *lépcsős diagrammal* lehet szemléltetni, lásd a 7.4. ábrát.

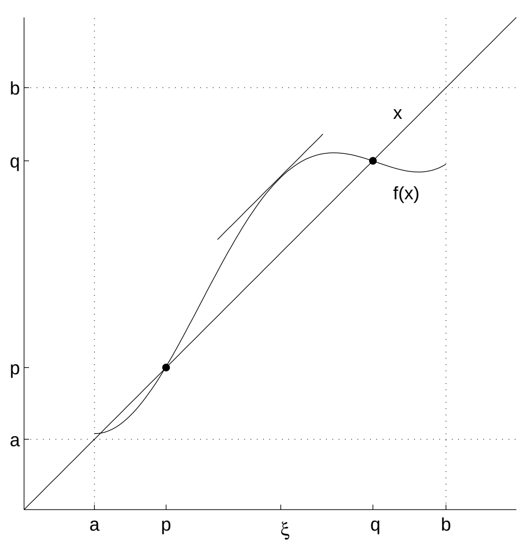
Az alábbi tétel szerint a 7.1. tétel feltételei elegendőek arra, hogy garantálják a fixpont iterációs sorozatok konvergenciáját.

7.3. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos és (a, b)-n differenciálható függvény, és tegyük fel, hogy létezik olyan $0 \le c < 1$ konstans, hogy $|f'(x)| \le c$ minden $x \in (0, 1)$-re. Ekkor minden $x_0 \in [a, b]$-re az $x_{k+1} = f(x_k)$ fixpont iterációs sorozat konvergál az f függvény egyértelmű fixpontjához.*

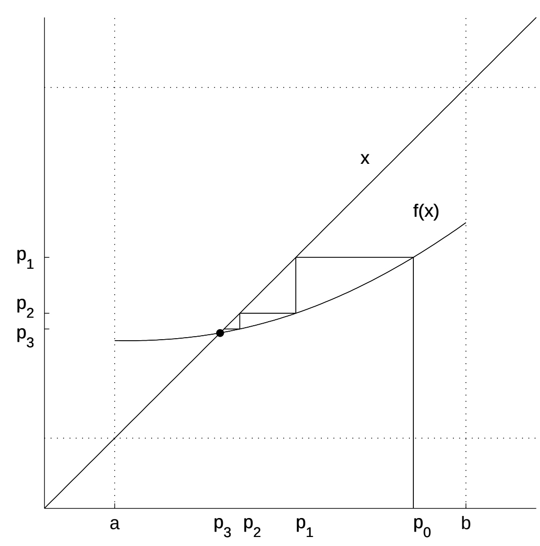
Bizonyítás: A p fixpont létezése és egyértelműsége következik a 7.1. tételből. A sorozat konvergenciája az alábbi egyenlőtlenségből adódik, amelyet a Lagrange-féle középérték-tételt, c definícióját és teljes indukciót alkalmazva kapunk:

$$|x_k - p| = |f(x_{k-1}) - f(p)| = |f'(\xi_{k-1})||x_{k-1} - p| \le c|x_{k-1} - p| \le c^k |x_0 - p|.$$

□



7.3. ábra.



7.4. ábra.

7.2. Banach-féle kontrakciós elv

Legyen (X, d) metrikus tér és $F\colon X \to X$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy F-nek p *fixpontja*, ha

$$p = F(p).$$

Az $x = F(x)$ egyenletet *fixpont egyenletnek* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy F *kontrakció* vagy más szóval *kontraktív leképezés* X-en, ha létezik olyan $c \in [0, 1)$ valós szám, hogy

$$d(F(x), F(y)) \leq cd(x, y), \qquad x, y \in X.$$

Megjegyezzük, hogy a definícióból rögtön következik, hogy minden kontrakció folytonos is.

A 7.3. tétel bizonyításából látható, hogy ha $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és differenciálható valós függvényre $|F'(x)| \leq c < 1$, $x \in (a, b)$, akkor F kontrakció $[a, b]$-n. A kontrakciós tulajdonsághoz viszont nem szükséges, hogy F differenciálható legyen, pl. $F(x) = \frac{1}{2}|x|$ kontrakció $\mathbb{R}$-en.

A 7.3. tétel általánosítása metrikus terekre az alábbi alapvető eredmény, amelyet *Banach-féle fixpont tételnek* vagy *kontrakciós elvnek* is hívunk. A tételt alkalmazását egy egyenlet megoldásának meghatározására vagy a megoldás közelítésére *szukcesszív approximáció módszerének* is szokták hívni.

7.4. Tétel (Banach-féle fixpont tétel). *Legyen (X, d) egy teljes metrikus tér, $F : X \to X$ egy kontrakció. Ekkor F-nek pontosan egy p fixpontja létezik X-en, és tetszőleges $x_0 \in X$-re az*

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

fixpont iterációs sorozat konvergál p-hez.

Bizonyítás: Legyen $x_0 \in [a, b]$ tetszőleges, és $x_{k+1} = F(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots,$ Megmutatjuk, hogy (x_k) konvergens. Ehhez elegendő belátni, hogy Cauchy-sorozat. Legyen tehát $k > m$, és tekintsük $d(x_k, x_m)$-t. A háromszög-egyenlőtlenséget, a sorozat definícióját és a kontrakciós tulajdonságot használva kapjuk

$$\begin{aligned}
d(x_k, x_m) &\leq d(x_k, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_{k-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&= d(F(x_{k-1}), F(x_{k-2})) + d(F(x_{k-2}), F(x_{k-3})) + \cdots + d(F(x_m), F(x_{m-1})) \\
&\leq cd(x_{k-1}, x_{k-2}) + cd(x_{k-2}, x_{k-3}) + \cdots + cd(x_m, x_{m-1}).
\end{aligned}$$

Az egyes tagokban ismételten (tagonként különböző sokszor) alkalmazva a sorozat definícióját és a kontrakciós tulajdonságot következik, hogy

$$d(x_k, x_m) \quad \leq \quad (c^{k-1} + c^{k-2} + \cdots + c^m) d(x_1, x_0),$$

és ezért

$$d(x_k, x_m) \leq \left(\sum_{j=m}^{\infty} c^j \right) d(x_1, x_0) = \frac{c^m}{1-c} d(x_1, x_0) \to 0, \qquad \text{ha } m, k \to \infty.$$

Tehát (x_k) Cauchy-sorozat, és így konvergens. Legyen $x_k \to p$, ha $k \to \infty$. Megmutatjuk, hogy p fixpontja F-nek. Mivel $x_{k+1} = F(x_k)$, így mindkét oldal határértékét véve, és használva F folytonosságát, kapjuk, hogy $p = F(p)$, azaz p fixpontja F-nek.

Tegyük fel, hogy F-nek p és q fixpontja. Ekkor F kontrakciós tulajdonságát felhasználva

$$d(p, q) = d(F(p), F(q)) \leq cd(p, q),$$

ami csak úgy lehet, hogy $d(p, q) = 0$, azaz $p = q$. □

Mivel egy normált tér egyben metrikus tér is, sőt, egy normált tér tetszőleges részhalmaza is metrikus tér a norma által generált metrikában, a 7.4. tétel következményeként kapjuk a Banach-féle fixpont tétel normált terekre vonatkozó alakját.

7.5. Tétel (Banach fixpont tétele normált terekre). *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $E \subset X$ zárt halmaz, és $F\colon E \to E$ egy kontrakció E-n, azaz létezik olyan $0 \le c < 1$ konstans, hogy*

$$\|F(x) - F(y)\| \le c\|x - y\|, \qquad x, y \in E.$$

Ekkor F-nek pontosan egy fixpontja létezik E-en, amely tetszőleges E-beli kezdőpontból indított fixpont iteráció határértékeként megkapható.

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér. Egy $T: X \to X$ leképezést *affin leképezésnek* hívjuk, ha $Tx = Ax + b$ alakú, ahol $A\colon X \to X$ egy lineáris leképezés, $b \in X$. Affin leképezés estén a kontrakciós tulajdonság azzal ekvivalens, hogy az A lineáris leképezés normája 1-nél kisebb. Kapjuk ezért a következő speciális alakját a 7.4. tételnek:

7.6. Tétel (Banach fixpont tétele lineáris leképezésekre). *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy Banach-tér, és $T\colon X \to X$, $Tx = Ax + b$ egy affin leképezés, amelyre $\|A\| < 1$. Ekkor T-nek pontosan egy fixpontja létezik X-en, amely tetszőleges kezdőpontból indított fixpont iteráció határértékeként megkapható.*

7.3. Banach-féle fixpont tétel alkalmazásai

7.3.1. Newton-módszer

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ adott. Közelítsük $f(x)$-et x_0-körüli lineáris Taylor-polinommal, és tekintsük az

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

egyenletet. Ha $f'(x_0) \ne 0$, akkor ennek megoldása

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Az x_1 pontban ismételjük a fenti eljárást, így kapjuk az

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{7.2}$$

iterációs sorozatot. Megmutatjuk, hogy ha x_0 elegendően közel van az f függvény p gyökéhez, akkor a (7.2) sorozat konvergál p-hez. A (7.2) képlettel definiált numerikus módszert f gyökének keresésére *Newton-módszernek* hívjuk.

7.7. Tétel. *Ha f kétszer folytonosan differenciálható, $f(p) = 0$, $f'(p) \ne 0$, akkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ esetén a (7.2) Newton-sorozat konvergál p-hez.*

Bizonyítás: Tekinstük az

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

függvényt. Nyilván $F(p) = p$ akkor és csak akkor, ha $f(p) = 0$. Mivel

$$F'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

ezért $F'(p) = 0$. A feltétel szerint F' folytonos, ezért egy tetszőlegesen rögzített $0 < c < 1$-hez létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|F'(x)| < c$ ha $x \in [p-\delta, p+\delta]$.

Az F függvény a $[p-\delta, p+\delta]$ intervallumon kontrakció a c konstanssal, ugyanis a Lagrange-féle középérték-tételt alkalmazva

$$|F(x) - F(y)| = |F'(\xi)||x - y| \le c|x - y|$$

teljesül minden $x, y \in [p-\delta, p+\delta]$-ra. A kontrakciós tulajdonságból következik, hogy F a $[p-\delta, p+\delta]$ intervallumot önmagába képezi le, ugyanis egy tetszőleges $x \in [p-\delta, p+\delta]$-re

$$|F(x) - p| = |F(x) - F(p)| \le c|x - p| < |x - p| < \delta.$$

Ebből következik, hogy az $F\colon [p-\delta, p+\delta] \to [p-\delta, p+\delta]$ függvényre alkalmazható a 7.5. tétel, amiből következik az állítás. □

7.3.2. Jacobi-iteráció

Tekintsük az

$$Ax = b$$

lineáris egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \text{és} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Keressük meg az egyenletrendszer megoldását a szukcesszív approximáció módszerével! Ehhez alakítsuk át az egyenletet fixpont egyenlet alakra. Tekintsük az i-edik egyenletet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad 1 \le i \le n.$$

Tegyük fel, hogy $a_{ii} \ne 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Az i-edik egyenletből fejezzük ki az i-edik változót:

$$x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Ezt vektoriális alakba felírva kapjuk, hogy

$$x = -\widetilde{A}x + \widetilde{b},$$

ahol

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \widetilde{b} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

A 7.5. tételt alkalmazva kapjuk rögtön az alábbi eredményt. Ehhez szükségünk van a következő fogalomra. Egy A $n \times n$-es négyzetes mátrixot *diagonálisan dominánsnak* nevezzük, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \dots, n.$$

7.8. Tétel. *Ha az $Ax = b$ egyenletrendszer A együtthatómátrixa diagonálisan domináns, akkor az $Ax = b$ egyenletnek pontosan egy megoldása van, amelyet megkapunk tetszőleges $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ kezdeti értékből kiindulva az*

$$x^{(k+1)} = -\widetilde{A}x^{(k)} + \widetilde{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{7.3}$$

iterációs vektorsorozat határértékeként.

Bizonyítás: A 7.5. tétel szerint elegendő megmutatnunk, hogy az

$$F(x) = -\widetilde{A}x + \widetilde{b}$$

leképezés kontrakció a $\|\cdot\|_\infty$ vektornormában. Mivel a normák tulajdonságait használva

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty = \|\widetilde{A}(x-y)\|_\infty \le \|\widetilde{A}\|_\infty \|x-y\|_\infty,$$

ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy az $\|\widetilde{A}\|_\infty$ mátrixnorma 1-nél kisebb. Az 5.72. tétel alapján és a diagonális dominancia definiciója szerint

$$\|\widetilde{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

□

A (7.3) iterációs vektorsorozatot koordinátánként kiírva kapjuk az

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \dots, n$$

rekurzív definíciót az $(x_1^{(k)}), \dots, (x_n^{(k)})$ sorozatok számolására. Ezt az iterációs módszert lineáris egyenletrendszerek megoldásai közelítésére *Jacobi-iterációnak* nevezzük.

7.3.3. Nemlineáris differenciálegyenletek megoldása

Tekintsük az

$$x' = f(t, x), \qquad t \in (a, b) \tag{7.4}$$
$$x(t_0) = u \tag{7.5}$$

kezdeti érték feladatot, ahol $f : (a, b) \times T \to \mathbb{R}^n$, $T \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $t_0 \in (a, b)$, $u \in T$. (Megengedjük, hogy $a = -\infty$ vagy $b = \infty$ legyen.)

Azt mondjuk, hogy az $f : (a, b) \times T \to \mathbb{R}^n$ függvény *lokálisan Lipschitz-tulajdonságú a második változójában* a $\|\cdot\|$ vektornormában, ha minden $[c_0, d_0] \subset (a, b)$ intervallumhoz és

$$G := [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n] \subset T$$

zárt n-dimenziós intervallumhoz létezik olyan $L \ge 0$ konstans, amelyre

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le L\|x - y\|, \qquad t \in [c_0, d_0], \quad x, y \in G.$$

7.9. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : (a, b) \times T \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, amely lokálisan Lipschitz-tulajdonságú a második változójában a $\|\cdot\|$ vektornormában. Ekkor bármely $t_0 \in (a, b)$-hez és $u \in T$-hez létezik olyan $h > 0$ konstans, hogy a (7.4)-(7.5) kezdeti érték feladatnak létezik egyértelmű megoldása a $[t_0 - h, t_0 + h]$ intervallumon.*

Bizonyítás: Integrálva a (7.4) egyenletet t_0-tól t-ig, és használva a (7.5) kezdeti feltételt, kapjuk

$$x(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \geq t_0. \tag{7.6}$$

Legyen $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Mivel $t_0 \in (a, b)$, $u \in T$ és T nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, ezért létezik olyan $r > 0$ konstans, hogy $[t_0 - r, t_0 + r] \subset (a, b)$ és a

$$G := [u_1 - r, u_1 + r] \times \cdots \times [u_n - r, u_n + r]$$

halmaz korlátos zárt részhalmaza T-nek. f lokális Lipschitz-tulajdonsága miatt létezik L, hogy

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad t \in [t_0 - r, t_0 + r], \quad x, y \in G.$$

Legyen h olyan, hogy

$$0 < h \leq r \qquad \text{és} \qquad hL < 1.$$

Tekintsük a $(C([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-teret, ahol a normát a

$$\|g\|_\infty = \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \|g(t)\|, \qquad g \in C([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$$

képlettel értelmezzük, és definiáljuk az

$$F\colon (C([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \to (C([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$$

leképezést az

$$(F(x))(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

képlettel. Megmutatjuk, hogy F kontraktív leképezés a $c := Lh < 1$ konstanssal. Ehhez használjuk fel f Lipschitz-tulajdonságát és elemi becsléseket:

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(y)\|_\infty &= \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \|(F(x))(t) - (F(y))(t)\| \\
&= \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \Big) ds \right\| \\
&\leq \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left| \int_{t_0}^{t} \Big\| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \Big\| ds \right| \\
&\leq L \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left| \int_{t_0}^{t} \Big\| x(s) - y(s) \Big\| ds \right| \\
&\leq L\|x - y\|_\infty \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} |t - t_0| \\
&= Lh\|x - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

A 7.5. tételből következik, hogy F-nek létezik egyértelmű fixpontja a $C([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$ térben, legyen ez $\bar{x}$. Megmutatjuk, hogy $\bar{x}$ megoldása a (7.4)-(7.5) kezdeti érték feladatnak. Mivel $\bar{x}$ teljesíti a (7.6) integrálegyenletet, ezért $\bar{x}(t_0) = u$, és $\bar{x}$ differenciálható, hiszen $f(s, \bar{x}(s))$ folytonos s-ben. Ezért differenciálva a (7.6) egyenlet mindkét oldalát, kapjuk, hogy $\bar{x}$ teljesíti a (7.4) egyenletet $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$-ra. □

Egy egyszerűen ellenőrizhető feltétel ad a lokális Lipschitz-tulajdonság teljesülésére az alábbi állítás.

7.10. Állítás. *Ha az* $f\colon (a,b)\times T \to \mathbb{R}^n$,

$$f(t,x_1,\dots,x_n) = (f_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(t,x_1,\dots,x_n))$$

függvény minden f_i $(i=1,\dots,n)$ *komponensfüggvénye folytonosan parciálisan differenciálható minden* $x_1,\dots,x_n$ *változója szerint, akkor* f *lokálisan Lipschitz-tulajdonságú az* $x=(x_1,\dots,x_n)$ *változójában tetszőleges* $\|\cdot\|$ *vektornormában.*

Bizonyítás: Az 5.45. tétel szerint az állítást elegendő a $\|\cdot\|_1$ normában igazolni, a normák ekvivalenciájából könnyen következik az állítás egy tetszőleges másik normában is.

Legyen $[c_0,d_0]\subset(a,b)$ és $G := [c_1,d_1]\times\cdots\times[c_n,d_n]\subset T$ zárt intervallum rögzített. Legyen

$$M = \max_{i=1,\dots,n}\max_{j=1,\dots,n}\max\left\{\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x_1,\dots,x_n)\right| \colon\ t\in[c_0,d_0],\ (x_1,\dots,x_n)\in G\right\}.$$

Legyen $t\in[c_0,d_0]$, $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\in G$. Ekkor a valós függvényekre ismert Lagrange-féle középérték-tételt alkalmazva következik a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned}
\|f(t,x)-f(t,y)\|_1 &= \sum_{i=1}^n |f_i(t,x_1,\dots,x_n)-f_i(t,y_1,\dots,y_n)| \\
&\le \sum_{i=1}^n\Big(|f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_n)-f_i(t,y_1,x_2,\dots,x_n)| \\
&\qquad + |f_i(t,y_1,x_2,x_3\dots,x_n)-f_i(t,y_1,y_2,x_3\dots,y_n)|+\cdots \\
&\qquad + |f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_{n-1},x_n)-f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_{n-1},y_n)|\Big) \\
&\le \sum_{i=1}^n\Big(M|x_1-y_1|+\cdots+M|x_n-y_n|\Big) \\
&= nM\|x-y\|_1.
\end{aligned}$$

□

7.4. Néhány további fixpont tétel

7.4.1. Brouwer-féle fixpont tétel

Bizonyítás nélkül tekintsük az alábbi eredményt.

7.11. Tétel (Brouwer-féle fixpont tétel). *Legyen* $G\subset\mathbb{R}^n$ *korlátos, zárt és konvex halmaz,* $f\colon G\to G$ *folytonos. Ekkor* f*-nek létezik legalább egy fixpontja* G*-ben.*

A tétel alkalmazásaként megemlítjük az alábbi eredményt.

7.12. Tétel (Perron tétele). *Legyen az* A $n\times n$*-es mátrix minden* a_{ij} *komponenese pozitív. Ekkor* A*-nak van legalább egy pozitív sajátértéke, amelyhez megadható egy csupa nemnegatív komponensekből álló sajátvektor.*

Bizonyítás: Legyen

$$G := \left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n\colon\ x_1\ge 0,\ i=1,\dots,n \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy G korlátos, zárt és konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Legyen továbbá

$$f\colon G \to G, \qquad f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_1}.$$

Ekkor nyilván f folytonos, hiszen minden vektornorma folytonos függvény és $x \mapsto Ax$ is folytonos leképezés. Ezért a Brouwer-féle fixpont tétel szerint létezik legalább egy fixpontja f-nek G-ben, legyen ez $v \in G$. Ekkor v-re

$$\frac{Av}{\|Av\|_1} = v,$$

azaz $Av = \|Av\|_1 v$ teljesül. De ekkor $\lambda = \|Av\|_1$ sajátértéke A-nak a v sajátvektorral. □

7.4.2. Schauder-féle fixpont tétel

Azt mondjuk, hogy egy X normált tér U részhalmaza *prekompakt*, ha lezártja kompakt X-ben. A 3.42. tétel szerint az $\mathbb{R}^n$ tér minden korlátos részhalmaza prekompakt.

Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett függvényeknek egy V halmazát *egyenletesen korlátosnak* nevezzük, ha létezik olyan K konstans, hogy $|f(x)| \le K$ minden $f \in V$-re. A V függvénycsaládot *egyenlő mértékben egyenletesen folytonosnak* hívjuk, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden olyan $x, \tilde{x} \in [a, b]$-re, amelyre $|x - \tilde{x}| < \delta$, és minden $f \in V$-re $|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$ teljesül.

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad a folytonos függvények terében arra, hogy egy részhalmaz prekompakt-e.

7.13. Tétel (Arzelà-Ascoli). *Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvényeknek egy V halmazrendszere akkor és csak akkor prekompakt a $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben, ha V egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos függvényhalmaz.*

Tekintsük a következő fixpont tételt.

7.14. Tétel (Schauder-féle fixpont tétel). *Legyen E zárt, konvex és nem-üres részhalmaza az X Banach-térnek. Legyen*

$$F\colon E \to E$$

folytonos operátor úgy, hogy $F(E)$ prekompakt X-ben. Ekkor az F operátornak van legalább egy fixpontja E-ben.

A fenti két tétel segítségével megmutathatjuk a differenciálegyenletek megoldásai létezését garantáló alábbi egzisztencia tételt.

Tekintsük az

$$x' = f(t, x) \tag{7.7}$$
$$x(t_0) = u \tag{7.8}$$

kezdeti érték feladatot, ahol $f\colon [t_0 - a, t_0 + a] \times [u - b, u + b] \to \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. A Schauder-féle fixpont tételt alkalmazva kapjuk:

7.15. Tétel (Peano tétele). *Legyen $f\colon [t_0 - a, t_0 + a] \times [u - b, u + b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény amely maximumát M jelöli, azaz $M = \max\{|f(t, x)| : |t - t_0| \le a, |x - u| \le b\}$. Legyen $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Ekkor a (7.7)-(7.8) kezdeti érték feladatnak létezik legalább egy megoldása az $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ intervallumon.*

Bizonyítás: Tekintsük az I-n definiált folytonos függvények $C(I,\mathbb{R})$ Banach-terét a $\|g\|_\infty = \max_{t\in I}|g(t)|$ normával. Legyen

$$E = \{g \in C(I,\mathbb{R})\colon\ |g(t)-u| \le b,\ t\in I\}.$$

Definiáljuk az F nemlineáris operátort az

$$(F(x))(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds, \qquad t\in I, \quad x\in E$$

képlettel. Mivel $x\in E$, ezért $f(s,x(s))$, és így $F(x)$ is jól definiált. Továbbá

$$|(F(x))(t)-u| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds\right| \le M|t-t_0| \le Mh \le b, \qquad t\in I,$$

azaz $F(x)\in E$. Nyilván E nem üres, konvex részhalmaza $C(I,\mathbb{R})$-nek. Megmutatjuk, hogy $F(E)$ prekompakt $C(I,\mathbb{R})$-ben. Az Arzelà-Ascoli tétel szerint ehhez elegendő megmutatnunk, hogy $F(E)$ egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos. Mivel

$$\|F(x)\|_\infty = \max_{t\in I}\left|u + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds\right| \le |u| + Mh, \qquad x\in E,$$

ezért $F(E)$ egyenletesen korlátos. Másrészt minden $t,\tilde{t}\in I$-re

$$|(F(x))(t)-(F(x))(\tilde{t})| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds - \int_{t_0}^{\tilde{t}} f(s,x(s))\,ds\right| = \left|\int_{\tilde{t}}^{t} f(s,x(s))\,ds\right| \le M|t-\tilde{t}|,$$

amiből következik az $F(E)$ függvényrendszer egyenlő mértékű egyenletes folytonossága. Teljesül tehát a Schauder-tétel minden feltétele, ezért az F függvénynek létezik legalább egy $\bar{x}$ fixpontja. Könnyen látható, hogy $\bar{x}$ teljesíti a (7.7) differenciálegyenletet I-n és a (7.8) kezdeti feltételt is. □

7.4.3. Knaster-Tarski fixpont tétel

Egy X valós Banach-tér K nemüres részhalmazát *kúpnak* nevezzük, ha:

1. $\alpha\in[0,\infty)$ és $x\in K$ esetén $\alpha x\in K$
2. $x,y\in K$ esetén $x+y\in K$
3. $x\in K\setminus\{0\}$ esetén $-x\notin K$.

Legyen K egy nemüres belsejű K kúp az X Banach-térben. Ekkor definiálunk egy „$\le$”-vel jelölt relációt X-en: $x\le y$, ha $y-x\in K$. Megmutatható, hogy $\le$ egy parciális rendezés X-en, azaz $(X,\le)$ egy parciálisan rendezett halmaz lesz.

Legyen M egy tetszőleges részhalmaza az $(X,\le)$ parciálisan rendezett Banach-térnek. Azt mondjuk, hogy egy $y\in X$ elem *felső korlátja* M-nek, ha

$$x\le y, \qquad \text{minden } x\in M\text{-re.}$$

Azt mondjuk, hogy a $\sup M\in X$ elem az M halmaz *szuprémuma*, ha

1. $\sup M$ felső korlátja M-nek, és

2. ha $y \in X$ felső korlátja M-nek, akkor $\sup M \le y$,

azaz $\sup M$ a legkisebb felső korlátja M-nek. Hasonlóan definiálható $\inf M$ is.

7.16. Tétel. *(Knaster-Tarski fixpont tétele). Legyen $(X, \le)$ egy parciálisan rendezett Banach-tér, M az X olyan részhalmaza, amelyre teljesülnek a következők:*

1. $\inf M \in M$*,*

2. Minden $N \subset M$ nemüres részhalmazra $\sup N \in M$*.*

Legyen $F\colon M \to M$ egy monoton növekvő leképezés, azaz

$$F(x) \le F(y), \qquad \text{ha } x, y \in M \quad \text{és} \quad x \le y.$$

Ekkor F-nek van fixpontja az M-ben, továbbá az F leképezés fixpontjai között létezik legkisebb. Ha F fixpontja egyértelmű és $x_0 \in M$ olyan, hogy vagy $x_0 \le F(x_0)$ vagy $x_0 \ge F(x_0)$, akkor az $x_{k+1} = F(x_k)$ fixpont iterációs sorozat konvergál az F leképezés fixpontjához.