4. A komplex függvénytan elemei

4.1. Komplex függvények határértéke, folytonossága, differenciálhatósága, Cauchy–Riemann-egyenletek

Legyen $\mathbb{C}$ a komplex számok halmaza, $z_0 \in \mathbb{C}$ és $\rho > 0$ adott állandó. A z_0 szám ρ sugarú *környezetén* a $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < \rho\}$ halmazt, azaz a z_0 középpontú ρ sugarú nyílt körlapot értjük. Halmaz belső pontja, nyílt halmaz, zárt halmaz, határpont ismert fogalmak az előző analízis tanulmányok alapján.

Legyen $T \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, és tekintsünk egy

$$f \colon T \to \mathbb{C}$$

függvényt. Ekkor tehát az f változója és értéke is komplex szám, ezért f-et *komplex függvénynek* nevezzük.

A komplex z szám valós és képzetes részét jelöljük x ill. y-nal, azaz a szokásos jelölés szerint legyen

$$z = x + iy$$

a komplex z szám normál alakja. Jelölje u ill. v az f függvény valós ill. képzetes részét. Ekkor u és v is komplex változós, de valós értékű függvények, viszont a komplex függvénytanban szokásos jelölés szerint tekinthetjük a függvényeket úgy is, hogy azok az x és y valós változóktól függnek, azaz a következő jelölést használjuk:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{4.1}$$

ahol u és v kétváltozós valós függvények, amelyekre $\mathrm{Dom}(u) = \mathrm{Dom}(v) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + iy \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

A valós függvényeknél látott definíciókat értelemszerűen kiterjesztve definiálhatjuk a komplex függvények határétékét, folytonosságát ill. differenciálhatóságát. Könnyen látható most is, hogy az így kiterjesztett fogalmakra ugyanazok az algebrai tulajdonságok, számolási szabályok teljesülnek, mint a valós esetben.

Legyen $z_0 \in T$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a z_0-ban létezik a *határértéke*, ha bármely olyan $z_n \in T$ sorozatra, amelyre $z_n \neq z_0$ (minden $n = 1, 2, \ldots$-re) és $z_n \to z_0$ (ha $n \to +\infty$) következik, hogy a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)$ határérték létezik, és értéke független a (z_n) sorozat választásától. A határérték jelölése: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Az f függvényt *folytonosnak* nevezzük a $z_0 \in T$ pontban, ha $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Ha az f függvény folytonos minden $z_0 \in T$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos a T halmazon.

Az f függvényt a $z_0 \in T$ pontban *differenciálhatónak* nevezzük, ha a

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(komplex) határérték létezik. Ezt a határértéket az f függvény z_0 helyen vett *deriváltjának* (*differenciálhányadosának*) nevezzük. Jele: $f'(z_0)$. Ha f differenciálható a T halmaz minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható a T halmazon.

Tegyük fel, hogy f differenciálható z_0-ban. A (4.1) valamint a $z = x + iy$ és $z_0 = x_0 + iy_0$ jelöléseket használva az 1.1. Tétel szerint

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}, \tag{4.2}$$

azaz a komplex határértéket kétváltozós (komplex értékű) határértékre vezettük vissza. A valós függvényeknél ismert, hogy a kétváltozós határérték létezéséhez az szükséges, hogy bármely irányból is tart (x, y) az (x_0, y_0) pontba, a függvényértékek sorozatának létezzen a határértéke, és ezek a határértékek megeggyezzenek. Vegyük most azt az esetet, amikor (x, y) az x-tengellyel párhuzamosan tart (x_0, y_0)-ba, azaz feltesszük, hogy $y = y_0$. Ezt behelyettesítve a (4.2) relációba kapjuk, hogy ebben a speciális esetben

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Hasonló módon, feltesszük, hogy $x = x_0$. Ebben az esetben (4.2)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{4.4}$$

A (4.3) és (4.4) egyenleteket összehasonlítva kapjuk, hogy ha f differenciálható $z_0 = x_0 + iy_0$-ban, akkor

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{4.5}$$

Ezzel beláttuk a következő állítást:

4.1. Állítás. *Ha f differenciálható $z_0 = x_0 + iy_0$-ban, akkor u és v parciálisan differenciálható (x_0, y_0)-ban, továbbá*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{4.6}$$

A (4.6) egyenleteket *Cauchy–Riemann-egyenleteknek* nevezzük. A következő példa azt mutatja, hogy a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesüléséből még általában nem következik, hogy az f függvény differentiálható az $x_0 + iy_0$ pontban.

4.2. Példa. Legyen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sqrt{|xy|}$, ahol $z = x + iy$. Ekkor f valós értékű függvény, így

$$u(x, y) = \sqrt{|xy|} \qquad \text{és} \qquad v(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az origóban

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0,$$

így a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülnek ebben a pontban. Viszont az f függvény nem differenciálható a $z = 0$ pontban, ugyanis $z = x + iy \neq 0$ esetén

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}.$$

Tekintsük a határétéknek azt a speciális esetét, amikor z a valós tengely mentén tart az origóba, azaz $z = x$. Ekkor

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{0}{x} = 0.$$

Másrészt, ha $z = x + ix$, $x > 0$ (azaz egy félegyenes mentén tartunk az origóba), akkor

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{x}{x + ix} = \frac{1}{1 + i},$$

ezért a különbségi hányadosnak nem létezik a határértéke az origóban, tehát az f függvény nem differenciálható 0-ban. □

Megmutatjuk, hogy ha u és v parciális differenciálhatósága helyett totális differenciálhatóságot teszünk fel (x_0, y_0)-ban, akkor a (4.6) Cauchy–Riemann-egyenletek teljesüléséből következik az f függvény differenciálhatósága is.

4.3. Tétel. *Legyen f (4.1) alakú. Ekkor az f függvény akkor és csak akkor differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban (mint komplex változós függvény), ha az u valós rész és a v képzetes rész függvények totálisan differenciálhatók az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban, továbbá az u és v parciális deriváltjaira teljesülnek a (4.6) Cauchy–Riemann-féle egyenletek.*

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban. Ekkor a 4.1. Állítás szerint az u és v függvények parciálisan differenciálhatók (x_0, y_0)-ban, és teljesülnek a (4.5) és (4.6) egyenletek. Ezért

$$\begin{aligned}
&f'(z_0)(z - z_0)\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\Big(x - x_0 + i(y - y_0)\Big)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)\right)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Definiáljuk az

$$\eta_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, y) - u(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{4.8}$$

és

$$\eta_2(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} v(x, y) - v(x_0, y_0) - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{4.9}$$

függvényeket. Ennek segítségével kapjuk, hogy

$$0 = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{|\eta_1(x, y) + i\eta_2(x, y)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \tag{4.10}$$

tehát

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{\eta_1(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{\eta_2(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0, \tag{4.11}$$

mivel $|\eta_i(x, y)| \le |\eta_1(x, y) + i\eta_2(x, y)|$ $(i = 1, 2)$. Ez azt jelenti, hogy az u ill. v függvények totálisan differenciálhatók (x_0, y_0)-ban.

2. Most megmutatjuk, hogy a fenti levezetés megfordítható. Tegyük fel, hogy az u és v függvények totálisan differenciálhatók (x_0, y_0)-ban, azaz a (4.8) és (4.9) képletekkel definiált η_1 és η_2 függvények teljesítik a (4.11) határértékeket. A (4.7) és (4.10) összefüggéseknél látott számolást megismételve és a Cauchy–Riemann-egyenleteket felhasználva kapjuk, hogy az

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

komplex számra teljesül

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|\eta_1(x, y) + i\eta_2(x, y)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $f'(z_0)$ létezik és $f'(z_0) = A$. □

Ismert eredmény a valós analízisből, hogy egy nyílt halmazon folytonosan parciálisan differenciálható többváltozós függvény totálisan differenciálható. Ebből kapjuk az előző tétel alábbi következményét, amely könnyebben ellenőrizhető feltételt ad a komplex függvény differenciálhatóságára.

4.4. Következmény. *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, az $f : T \to \mathbb{C}$ függvény (4.1) alakú, ahol az u és v függvények folytonosan parciálisan differenciálhatók mindkét változójuk szerint a T halmazon. Ekkor f akkor és csak akkor differenciálható a T halmazon, ha a (4.6) Cauchy–Riemann-féle egyenletek teljesülnek minden $(x_0, y_0) \in T$-re.*

Vezessük be a következő elnevezéseket:

4.5. Definíció. Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány. Ha az $f : T \to \mathbb{C}$ függvény differenciálható a $z_0 \in T$ pontban, akkor a függvényt a z_0 pontban *holomorfnak* (vagy *regulárisnak*) hívjuk. Ha f a T tartomány minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f a T tartományon *holomorf* (*reguláris*).

Ha az f függvény a z_0 pontban nem differenciálható, akkor az f függvényt a z_0 pontban *szingulárisnak* nevezzük, a z_0 pontot pedig *szinguláris pontnak* hívjuk.

A z_0 pontot *izolált szinguláris pontnak* hívjuk, ha az f függvény a z_0-ban szinguláris, de van a z_0-nak olyan környezete, amelyben a z_0 pont kivételével minden pontban holomorf.

4.6. Példa. Tekintsük az $f(z) = e^z$ függvényt. Erre

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

ezért $u(x, y) = e^x \cos y$ és $v(x, y) = e^x \sin y$. Ezért kapjuk, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

azaz u és v teljesítik a Cauchy–Riemann-egyenleteket. Másrészt u és v folytonosan parciálisan differenciálhatók, ezért a 4.4. Következmény szerint f holomorf az egész komplex számsíkon és

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

□

4.7. Példa. Legyen $T = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f\colon T \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ függvényt. Ennek nyilván a $z_0 = 0$ pont szinguláris pontja, hiszen ebben nincs is definiálva a függvény, így itt nem is lehet differenciálható. Az f valós és képzetes részét kiszámítva kapjuk

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

azaz

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \text{és} \qquad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Az u és v függvények az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ halmazon folytonosan parciálisan differenciálhatók mindkét változójuk szerint, és

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},
\end{aligned}$$

ezért a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülnek minden $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$-ra. Ezért az f függvénynek a $z = 0$ izolált szinguláris helye, és bármely $z \neq 0$-ra

$$f'(z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - i\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = -\frac{1}{z^2}.$$

□

Megmutatható, hogy a valós függvényekre levezetett összeg, szorzat, hányados, összetett függvényekre vonatkozó differenciálási szabályok és az elemi függvények deriváltjaira vonatkozó azonosságok mind teljesülnek a megfelelő komplex függvényekre is. Például

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \qquad (\cos z)' = -\sin z, \qquad (\sin z)' = \cos z.$$

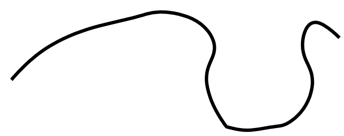
4.2. Néhány alapfogalom

Egy T nyílt halmazt *összefüggőnek* nevezünk, ha T bármely két pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amely a T halmazban halad. A T halmazt *tartománynak* hívjuk, ha összefüggő és nyílt halmaz.

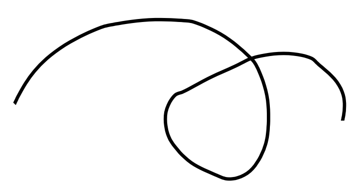
Legyen $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ folytonos függvény. A $G = \{g(t)\colon t \in [\alpha, \beta]\}$ komplex síkbeli halmazt *görbének*, a g függvényt a G görbe *paraméterezésének* nevezzük. (Természetesen egy G görbe vonalat definiálhatunk a komplex síkban a fenti paraméteres előállítás nélkül is.)

Legyen $g(t) = x(t) + iy(t)$, ahol $x(t) = \mathrm{Re}(g(t))$ és $y(t) = \mathrm{Im}(g(t))$. Ekkor a komplex görbét azonosíthatjuk a valós $\mathbb{R}^2$ síkbeli $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ paraméterezésű görbével.

A görbe vonalat *egyszerűnek* nevezzük, ha nem metszi át saját magát.

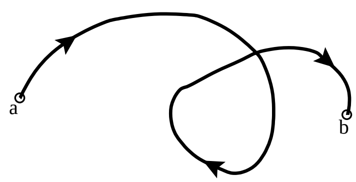


Egyszerű görbe.

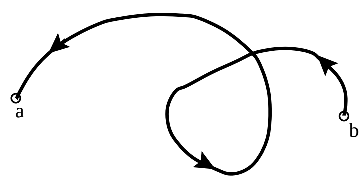


Nem egyszerű görbe.

A G görbét *irányított görbének* nevezzük, ha megadjuk a kezdőpontját és a végpontját. (Szemléletesen fogalmazva ezzel megadtuk a görbe bejárási irányát.) A görbe paraméterezése meghatároz egy irányítást és egy rendezést is a görbén. A görbe *kezdőpontján* az $a = g(\alpha)$, *végpontján* pedig a $b = g(\beta)$ pontot értjük. Azt mondjuk, hogy G *zárt görbe*, ha a kiindulási pontja egybeesik a végpontjával, azaz $a = b$. Ha a G irányított görbe irányítását megcseréljük, akkor a kapott görbét $-G$-vel jelöljük. Ha G paraméterezése $g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, akkor $-G$ egy lehetséges paraméterezése a $\tilde{g}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\tilde{g}(t) = g(\beta + t(\alpha - \beta))$ függvény.



G görbe.



$-G$ görbe.

A paraméterezés által generált *rendezést* a görbén úgy definiáljuk, hogy $g(t_1) \prec g(t_2)$, ha $t_1 < t_2$. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy a rendezést a pontok között a G görbe definiálja, akkor a relációra a $\prec_G$ jelölést használjuk.

A G görbe egy P *beosztásán* egy $P = \{a = z_0 \prec z_1 \prec \cdots \prec z_n = b\}$ monoton sorozatot értünk, azaz olyan véges sok pontot a görbén, amelyek az irányítás szerinti rendezés értelmében monoton növekvőek.

4.8. Definíció. A $\mathbb{C}$ komplex sík egy G görbéjét *rektifikálhatónak* (más szóval *mérhetőnek*) nevezzük, ha a G tetszés szerinti $P = \{a = z_0 \prec z_1 \prec \cdots \prec z_n = b\}$ beosztásának osztópontjait összekötő törött vonal (húrpoligon) hossza, azaz $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$ egy a beosztástól független korlát alatt marad. Egy rektifikálható G görbe *ívhosszán*, amelyet $\ell(G)$-vel jelölünk, a beírt húrpoligonok hosszának legkisebb felső korlátját értjük, azaz

$$\ell(G) = \sup_P \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|,$$

ahol a supremumot az összes lehetséges beosztásra vesszük.

A G görbét *simának* nevezzük, ha a G görbének van olyan $g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ paraméterezése, amely folytonosan differenciálható.

A valós esetre visszavezetve megmutatjuk, hogy egy sima görbe mindig rektifikálható, és ekkor megadjuk a görbe ívhosszának kiszámolási szabályát.

4.9. Tétel. *Legyen G egy sima (komplex) görbe, amelynek paraméterezése $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható. Ekkor G rektifikálható, és*

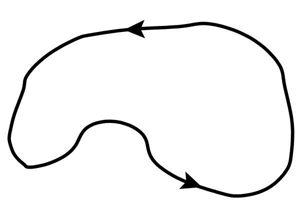
$$\ell(G) = \int_\alpha^\beta |g'(t)|\, dt.$$

Bizonyítás: Legyen $g(t) = x(t) + iy(t)$ a normál alakja g-nek, azaz $x(t) = \operatorname{Re} g(t)$, $y(t) = \operatorname{Im} g(t)$. A G komplex síkbeli görbét azonosíthatjuk azzal a $\tilde{G}$ valós síkbeli görbével, amelynek paraméterezése $\tilde{g}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{g}(t) = (x(t), y(t))$. Ekkor a valós esetre ismert eredmény szerint $\tilde{G}$ rektifikálható, továbbá

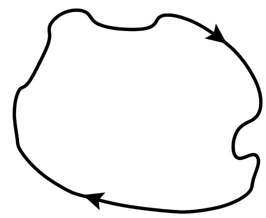
$$\ell(G) = \ell(\tilde{G}) = \int_\alpha^\beta |\tilde{g}'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_\alpha^\beta |x'(t) + iy'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |g'(t)|\, dt.$$

$\square$

Egy egyszerű zárt görbe vonalat *pozitív irányításúnak* nevezünk, ha irányításának megfelelő körbejárásakor a görbe belseje bal kezünk felé, negatív irányításúnak, ha jobb kezünk felé esik. Más szóval a pozitív irányítás az óramutató járásával ellentétes irányítás.



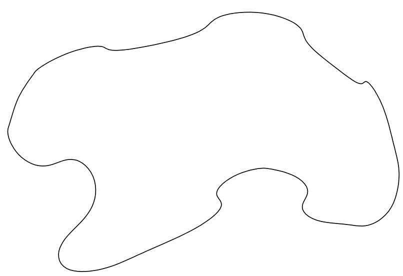
Pozitív irányítású görbe.



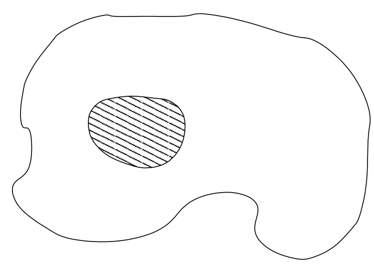
Negatív irányítású görbe.

Szemléletünk alapján egy egyszerű zárt görbe a komplex síkot egy korlátos és egy nem korlátos tartományra osztja, amelyekhez az egyszerű zárt görbe pontjait nem számítjuk hozzá. Ezeknek a tartományoknak nincsenek közös pontjai. Ennek az intuitív ténynek, amit Jordan-féle tételnek neveznek, a precíz bizonyítása nem túl egyszerű, ezért ezzel nem foglalkozunk. A korlátos tartomány pontjait a görbe vonal *belsejének*, a nem korlátos tartomány pontjait a görbe vonal *külsejének* nevezzük.

Egy tartományt *egyszeresen összefüggőnek* nevezünk, ha bármely benne haladó egyszerű zárt görbe belseje is teljesen a tartományban fekszik.



Egyszeresen összefüggő tartomány.



Nem egyszeresen összefüggő tartomány.

4.3. Komplex Taylor-sor

Legyen (c_n) komplex számok sorozata, $z_0 \in \mathbb{C}$ rögzített. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = c_0 + c_1 (z-z_0) + \cdots + c_k (z-z_0)^k + \cdots$$

sort *hatványsornak*, pontosabban z_0 körüli hatványsor nevezzük.

A valós hatványsorokra ismert állítások (kivéve a monotonitási feltételeket használó eredményeket) triviális módon kiterjeszthetők komplex hatványsorokra is, mégpedig a bizonyítást triviálisan megismételve úgy, hogy komplex abszolút értéket használunk valós abszolút érték helyett. Kiemelünk néhány fontosabb eredményt.

4.10. Tétel (Cauchy–Hadamard-féle tétel). *Legyen*

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & 0 < \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} < \infty, \\ 0, & \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \infty, \\ +\infty, & \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0. \end{cases}$$

Ha $|z - z_0| < \rho$, akkor a hatványsor abszolút konvergens, ha pedig $|z - z_0| > \rho$, akkor a hatványsor divergens. A hatványsor egyenletesen konvergens a konvergenciatartományának minden korlátos, zárt részhalmazán.

A ρ számot a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

4.11. Tétel. *Legyen $\rho > 0$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara, és legyen $|z - z_0| < \rho$. Ekkor az*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{4.12}$$

hatványsor a $|z - z_0| < \rho$ konvergencia tartományon belül akárhányszor differenciálható, és

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(z - z_0)^{k-n}, \qquad |z - z_0| < \rho.$$

4.12. Következmény. *Ha f (4.12) alakú, ahol $\rho > 0$, akkor f holomorf függvény, sőt f akárhányszor differenciálható a konvergenciatartományán belül, és a*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

összefüggések teljesülnek.

4.13. Példa. A valós esetre vonatkozó állítások komplex esetre kiterjesztésével megmutatható, hogy az

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

és a hatványsorok az egész komplex számsíkon konvergensek. $\square$

4.4. Komplex függvények görbe menti integrálja

Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, G egy rekfitikálható irányított görbe a T tartományban, amelynek kezdőpontja a, végpontja b, és legyen $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a G görbe egy paraméterezése. Legyen $f\colon T \to \mathbb{C}$ folytonos függvény T-n.

Tekintsük a G görbe egy $P = \{a = z_0 \prec z_1 \prec \cdots \prec z_n = b\}$ beosztását, azaz olyan véges sok pontot a görbén, amelyek az irányítás szerinti rendezés értelmében monoton növekvőek. A görbe z_k és z_{k+1} pontja közötti ívét $\widehat{z_k z_{k+1}}$ jelöli, a beosztás finomsága alatt a

$$|P| \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\ell(\widehat{z_k z_{k+1}})\colon k = 0, \ldots, n-1\}$$

számot értjük. Válasszunk ki minden egyes ívdarabból egy közbülső $\xi_k \in \widehat{z_k z_{k+1}}$ pontot, ezeket röviden jelölje $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$.

4.14. Definíció. Tekintsük az

$$S(f,\xi,P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_{k+1}-z_k)$$

közelítő összeget. Ha létezik olyan I szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|P| < \delta$, akkor bármely ξ közbülső pontrendszerre $|S(f,\xi,P) - I| < \varepsilon$, akkor az f függvény a G görbe mentén *integrálható*, és az I számot az f függvény G görbe mentén vett *integráljának* nevezzük és

$$\int_G f(z)\,dz\text{-vel}$$

jelöljük. Ha a G görbe zárt, akkor az integrálra az

$$\oint_G f(z)\,dz$$

jelölést is használjuk. A G görbe mentén integrálható komplex függvényeket $\mathcal{L}(G)$-vel jelöljük.

4.15. Példa. Tekintsük az $f(z) = c$ konstans függvényt. Legyen a ill. b a görbe kezdő- ill. végpontja. Ekkor tetszőleges P beosztásra és ξ közbülső pontrendszerre

$$S(f,\xi,P) = c\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k) = c(b-a),$$

azaz

$$\int_G c\,dz = c(b-a).$$

□

4.16. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, G egy rekfitikálható irányított görbe a T tartományban, $f\colon T \to \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ekkor az f függvény a G görbe mentén integrálható.*

Bizonyítás: Hasonlóan történik a Riemann-féle integráloknál látottakhoz, felhasználva, hogy f folytonos és így egyenletesen is folytonos G-n. □

Legyen G_1 és G_2 két olyan görbe, hogy a G_1 végpontja megegyezik G_2 kezdőpontjával. Ekkor a G_1 és G_2 összefűzésével kapott görbét $G_1 + G_2$-vel jelöljük. A G irányított görbén megcserélve az irányítást, a kapott görbét $-G$-vel jelöljük.

A görbe menti integrál néhány tulajdonsága:

4.17. Állítás. *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, G, G_1, G_2 rektifikálható görbék T-ben, $f, f_1, f_2\colon T \to \mathbb{C}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.*

1. *Ha $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(G)$, akkor $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathcal{L}(G)$, és*

$$\int_G (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,dz = c_1 \int_G f_1\,dz + c_2 \int_G f_2\,dz.$$

2. *Legyen* G_1 *és* G_2 *olyan görbék, hogy a* G_1 *végpontja megegyezik* G_2 *kezdőpontjával. Tegyük fel, hogy* $f \in \mathcal{L}(G_1)$ *és* $f \in \mathcal{L}(G_2)$*. Ekkor* $f \in \mathcal{L}(G_1 + G_2)$*, és*

$$\int_{G_1+G_2} f(z)\,dz = \int_{G_1} f(z)\,dz + \int_{G_2} f(z)\,dz.$$

3. *Ha* $f \in \mathcal{L}(G)$*, akkor* $f \in \mathcal{L}(-G)$*, és*

$$\int_{-G} f(z)\,dz = -\int_G f(z)\,dz.$$

4. *Ha* $f \in \mathcal{L}(G)$ *és* $|f(z)| \leq M$ *minden* $z \in G$*-re, akkor*

$$\left|\int_G f(z)\,dz\right| \leq M \cdot \ell(G),$$

ahol $\ell(G)$ *a* G *ívhossza.*

5. *Legyen*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad \textit{ahol } z = x + iy,$$

legyen $\tilde{G}$ *a* G *komplex síkbeli görbe* $\mathbb{R}^2$*-beli megfeleltetése, azaz ha* G *paraméterezése* $g(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$*, akkor legyen* $\tilde{G}$ *az* $(x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ *paraméterezéssel meghatározott síkbeli görbe. Ekkor*

$$\int_G f(z)dz = \int_{\tilde{G}} (udx - vdy) + i\int_{\tilde{G}} (vdx + udy)\,, \tag{4.13}$$

ahol a jobb oldalon álló integrálok valós vonalintegrálok.

Bizonyítás:

1. Az állítás következik az $S(c_1 f_1 + c_2 f_2, \xi, P) = c_1 S(f_1, \xi, P) + c_2 S(f_2, \xi, P)$ összefüggésből, ha $|P| \to 0$.

2. Az $f \in \mathcal{L}(G_1 + G_2)$ reláció bizonyítását nem részletezzük. (Abban az esetben, ha például f folytonos, akkor rögtön következik a 4.16. Tételből. Az általános esetben pedig az 5. pont segítségével a valós vonalintegrálok tulajdonságaira visszavezetve indokolhatjuk.) Az integrálokra vonatkozó azonosságot pedig abból kapjuk, hogy ha $P = \{z_0 \prec \cdots \prec z_n\}$ és $\tilde{P} = \{\tilde{z}_0 \prec \cdots \prec \tilde{z}_m\}$ a G_1 ill. G_2 görbe felosztása (ahol tehát $z_n = \tilde{z}_0$), $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ és $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_0, \ldots, \tilde{\xi}_{m-1})$ a P ill. $\tilde{P}$ beosztásokhoz tartozó közbülső pontrendszerek, akkor $S(f, \xi, P) + S(f, \tilde{\xi}, \tilde{P})$ az f függvény $G_1 + G_2$ görbére vonatkozó integrál közelítő összege, amiből az állítás határátmenettel következik.

3. Legyen $P = \{z_0 \prec_G \cdots \prec_G z_n\}$ a G görbe egy felosztása, $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ pedig egy a P-hez tartozó közbülső pontrendszer. Ekkor a $\tilde{P} = \{z_n \prec_{-G} z_{n-1} \prec_{-G} \cdots, \prec_{-G} z_0\}$ pontrendszer a $-G$ görbe egy beosztása lesz, azon $\tilde{\xi} = (\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_0)$ egy közbülső pontrendszer, továbbá $S(f, \xi, P) = -S(f, \tilde{\xi}, \tilde{P})$, amiből következik az állítás.

4. Legyen $P = \{z_0 \prec_G \cdots \prec_G z_n\}$ a G görbe egy felosztása, $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ pedig egy a P-hez tartozó közbülső pontrendszer. Ekkor a háromszög egyenlőtlenséget és $\ell(G)$ definícióját felhasználva az

$$|S(f, \xi, P)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)||z_{k+1} - z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq M \cdot \ell(G)$$

összefüggés adódik, amiből a $|P| \to 0$ határátmenettel kapjuk az állítást.

5. Legyen $P = \{z_0 \prec \cdots \prec z_n\}$ a G görbe egy felosztása, $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ pedig egy a P-hez tartozó közbülső pontrendszer. Vezessük be az $\xi_k = \eta_k + i\theta_k$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ és $z_k = x_k + iy_k$

$(k = 0, \ldots, n)$ jelöléseket, ahol $\eta_k, \theta_k, x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Tegyük fel most, hogy a G görbe $x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ paraméterezése olyan, hogy

$$x'(t) > 0 \qquad \text{és} \qquad y'(t) > 0 \qquad \text{ha } t \in (\alpha, \beta).$$

Mivel $z_k \prec \xi_k \prec z_{k+1}$, az x és y monotonitása miatt

$$\eta_k \in [x_k, x_{k+1}] \qquad \text{és} \qquad \theta_k \in [y_k, y_{k+1}], \qquad k = 0, \ldots, n-1,$$

és így az

$$\begin{aligned} S(f, \xi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} [u(\eta_k, \theta_k) + iv(\eta_k, \theta_k)][x_{k+1} - x_k + i(y_{k+1} - y_k)] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(u(\eta_k, \theta_k)(x_{k+1} - x_k) - v(\eta_k, \theta_k)(y_{k+1} - y_k) \Big) \\ &\qquad + i \sum_{k=0}^{n-1} \Big(v(\eta_k, \theta_k)(x_{k+1} - x_k) + u(\eta_k, \theta_k)(y_{k+1} - y_k) \Big), \end{aligned}$$

összefüggésből következik az állítás, hiszen a jobb oldalon álló összegek a (4.13) egyenlet jobb oldalán álló valós vonalintegrálok közelítő összegei.

Ha a G görbe paraméterezésében $x'(t)$ és $y'(t)$ előjeltartó, akkor az indoklás hasonló. Az általános esetet pedig erre visszavezethetjük úgy, hogy felbontjuk a görbét olyan kis részekre, ahol már teljesül az előbbi feltétel. A részleteket az olvasóra bízzuk. □

A következő eredmény módszert ad arra, hogyan számíthatjuk ki a komplex integrál értékét.

4.18. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, G síma görbe T-ben, amelynek paraméteres előállítása a $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény, $f\colon T \to \mathbb{C}$ integrálható a G görbe mentén. Ekkor*

$$\int_G f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t)\, dt.$$

Bizonyítás: A 4.17. Állítás 5. pontját (az ott bevezetett jelölésekkel) valamint a valós vonalintegrálok kiszámítására vonatkozó tételt alkalmazva kapjuk

$$\begin{aligned} \int_G f(z)\, dz &= \int_{\tilde{G}} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int_{\tilde{G}} v(x,y)dx + u(x,y)dy \\ &= \int_\alpha^\beta \Big(u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \Big)\, dt \\ &\qquad + i \int_\alpha^\beta \Big(v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t) \Big)\, dt \\ &= \int_\alpha^\beta \Big(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \Big) \Big(x'(t) + iy'(t) \Big)\, dt \\ &= \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t)\, dt. \end{aligned}$$

□

4.19. Példa. Számítsuk ki az

$$\oint_G \frac{1}{z-z_0}\,dz$$

integrált, ahol G a z_0 körüli r sugarú kör pozitív (azaz az óramutató járásával ellentétes) irányítással. Mivel az egységsugarú origó középpontú kör paraméterezése $\cos t + i\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, ezért G egy lehetséges paraméterezése $g(t) = z_0 + r(\cos t + i\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. A 4.18. Tétel szerint tehát

$$\begin{aligned}
\oint_G \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(\cos t + i\sin t)} r(-\sin t + i\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t + i\cos t)(\cos t - i\sin t)}{(\cos t + i\sin t)(\cos t - i\sin t)}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} i\,dt \\
&= 2\pi i.
\end{aligned}$$

□

A következő tétel a valós esetben ismert Newton–Leibniz-formula komplex integrálokra vonatkozó megfelelője.

4.20. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f\colon T \to \mathbb{C}$ függvénynek létezik az F primitív függvénye T-n, azaz $F\colon T \to \mathbb{C}$, amelyre $F'(z) = f(z)$, $z \in T$. Legyen G síma görbe, amelynek az a és b pont a kezdő- ill. végpontja. Ekkor*

$$\int_G f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás: Legyen $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ a G folytonosan differenciálható paraméterezése. Ekkor a 4.18. Tétel és az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\Big(F(g(t))\Big)\,dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

□

4.21. Következmény. *Tegyük fel, hogy az $f\colon T \to \mathbb{C}$ függvénynek létezik az F primitív függvénye T-n, G egy egyszerű zárt görbe T-ben. Ekkor*

$$\int_G f(z)\,dz = 0.$$

4.22. Példa. Számítsuk ki az

$$\int_G (z^2 - 3z + 2)\,dz$$

integrált, ahol G paraméteres előállítása $g(t) = \cos 3t + i\sin 5t$, $t \in [0, \pi/2]$!

A görbe kezdőpontja $g(0) = 1$, végpontja pedig $g(\pi/2) = i$. Ezért primitív függvényt számítva kapjuk, hogy

$$\int_G (z^2 - 3z + 2)\,dz = \left[\frac{z^3}{3} - 3\frac{z^2}{2} + 2z\right]_1^i = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}i.$$

□

4.5. A Cauchy-féle integráltétel és következményei

Az egész szakaszban feltesszük, hogy $T \subset \mathbb{C}$ egy tartomány, $f\colon T \to \mathbb{C}$ holomorf T-n.

Elsőnek tekintsük a komplex függvénytan egyik alaptételét, a Cauchy-féle integráltételt — bizonyítás nélkül.

4.23. Tétel (Cauchy-féle integráltétel). *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f : T \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, G a T belsejében haladó (nem szükségszerűen egyszerű) zárt rektifikálható görbe. Ekkor*

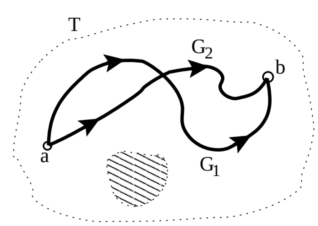
$$\oint_G f(z)\,dz = 0.$$

Megjegyezzük, hogy ha T nem egyszeresen összefüggő, akkor a zárt görbe menti integrál általában nem 0 (lásd a 4.19. Példát).

Szükségünk lesz a következő fogalmakra.

4.24. Definíció. Legyen G egy zárt görbe, amely teljes egészében a T tartományban halad. Azt mondjuk, hogy G a T-ben *egy pontra összehúzható*, ha a T tartománynak van olyan egyszeresen összefüggő T' résztartománya, amely G-t belsejével együtt tartalmazza.

Legyen G_1 és G_2 adott görbék T-ben, amelyek azonos pontból indulnak és közös végpontjuk van. Ha a G_1 görbe kezdőpontjától a végpontjáig haladunk a G_1 mentén, majd a végpontból a G_2 görbe mentén fordított irányban visszamegyünk a kezdőpontig, akkor a $G_1 - G_2$-vel jelölt zárt görbét kapjuk. Azt mondjuk, hogy G_1 és G_2 a T-n belül *egymásba deformálhatók*, ha az általuk definiált $G_1 - G_2$ zárt görbe egy pontra húzható össze. (Lásd az alábbi ábrát, ahol a satírozott tartomány nem tartozik hozzá T-hez.)



Ezek után rátérünk a Cauchy-féle integráltétel következményeire.

4.25. Következmény. *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f\colon T \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha G_1 és G_2 olyan T-beli egymásba deformálható rektifikálható görbék, amelyek azonos kezdőpontból indulnak és azonos a végpontjuk is, akkor*

$$\int_{G_1} f(z)\,dz = \int_{G_2} f(z)\,dz.$$

Bizonyítás: Tekintsük a $G_1 - G_2$ görbét. Mivel G_1 és G_2 egymásba deformálhatók, ezért létezik olyan $T' \subset T$ tartomány, amely tartalmazza $G_1 - G_2$-t. De ekkor a Cauchy-féle integráltétel és az integrál tulajdonságai szerint

$$0 = \int_{G_1 - G_2} f(z)\,dz = \int_{G_1} f(z)\,dz - \int_{G_2} f(z)\,dz.$$

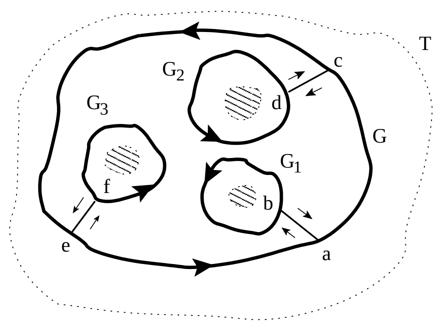
□

4.26. Következmény. *Az egyszeresen összefüggő T tartományban holomorf függvény T-ben haladó görbék menti integráljának értéke csupán a kezdő és végpontoktól függ, az integrációs utat közöttük szabadon választhatjuk a T-n belül, minden esetben ugyanazt az integrál értéket kapjuk.*

4.27. Állítás. *Legyenek $G, G_1, \ldots, G_n$ rektifikálható egyszerű zárt görbék. Tegyük fel, hogy a $G_1, \ldots, G_n$ görbék mindegyike a G belsejében halad, de egymásnak a külsejében vannak. Tegyük fel, hogy az a halmaz, amely pontjai a G zárt görbe belsejének és a $G_1, \ldots, G_n$ zárt görbék külsejének metszetéből áll, része az $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény holomorfitási tartományának. Ekkor*

$$\oint_G f(z)\,dz = \oint_{G_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{G_n} f(z)\,dz.$$

Bizonyítás: A bizonyítást a következő ábrán látható esetre részletezzük (az általános eset ennek mintájára kezelhető), amikor az f függvény T holomorfitási tartománya nem egyszeresen öszefüggő (a 3 satírozott tartomány nem tartozik hozzá T-hez), és a G görbe megkerüli ezt a 3 kimaradt részt. Fogjuk körbe az ábrán látható módon ezt a 3 tartományt a G_1, G_2 és G_3 zárt görbékkel, amelyek irányítása megegyezik G irányításával.



A G_1, G_2, G_3 és a G görbéket kössük össze az ábrán látható $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ és $\overline{ef}$ szakaszok segítségével. Legyen C az az irányított zárt görbe, amelyet úgy kapunk, hogy az a pontból indulva a G görbe mentén a c pontig haladunk, onnan a szakasz mentén a d pontba, majd a $-G_2$ görbe mentén körbe megyünk a d pontig, majd vissza a c pontba. Innen tovább haladunk a G görbe mentén az e pontba, onnan a szakasz mentén az f pontba, a $-G_2$ görbén vissza az f pontban jutunk. Onnan az a-ba, majd a b pontba, innen a $-G_1$ görbe mentén vissza b-be, és végül vissza a-ba. Ekkor egy zárt görbét kaptunk, amelynek belsejébe eső minden pont hozzá tartozik a T-hez, azaz az f holomorfitási tartományához, így a Cauchy-tétel szerint $\int_C f(z)\,dz = 0$. Másrészt ha a C görbe menti integrálást felbontjuk az egyes részgörbéken vett integrálok összegére, akkor könnyen látható, hogy

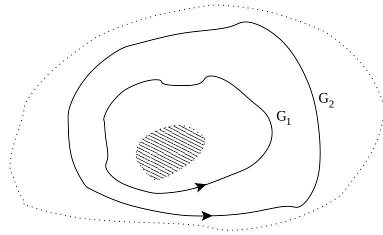
$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_G f(z)\,dz - \int_{G_1} f(z)\,dz - \int_{G_2} f(z)\,dz - \int_{G_3} f(z)\,dz,$$

hiszen az $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ és az $\overline{ef}$ szakaszokon mindkét irányban integrálunk, így azok kiejtik egymást. □

Az előbbi állítás speciális eseteként megfogalmazhatjuk a komplex integrál következő tulajdonságát:

4.28. Állítás. *Legyen $f\colon T \to \mathbb{C}$ holomorf, és legyen G_1 és G_2 két egyszerű, azonos irányítású zárt görbe T-ben, amelyre G_2 közrefogja G_1-et, és a két görbe közötti tartomány hozzá tartozik T-hez. (Lásd az alábbi ábrát.) Ekkor*

$$\int_{G_1} f(z)\,dz = \int_{G_2} f(z)\,dz.$$



A Cauchy-féle integráltétel általánosítása:

4.29. Tétel (Riemann). *Ha az f komplex függvény holomorf a $T \setminus \{z_0\}$ tartományban, és van a z_0 pontnak olyan ρ sugarú $K_\rho(z_0) \subset T$ környezete, hogy*

$$|f(z)| \leq M, \qquad z \in K_\rho(z_0), \quad z \neq z_0,$$

akkor

$$\oint_G f(z)\,dz = 0$$

teljesül minden olyan egyszerű zárt rektifikálható G görbére, amely belsejével együtt T-ben fekszik (függetlenül attól, hogy G megkerüli-e z_0-t vagy sem).

Bizonyítás: Legyen $0 < \varepsilon < \rho$, és legyen C_ε az origó középpontú ε sugarú kör. Ekkor a 4.28. Állítást, valamint a 4.17. Állítás 4. pontját felhasználva

$$\left|\oint_G f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leq M2\pi\varepsilon.$$

Ekkor az $\varepsilon \to 0+$ határértéket véve kapjuk az állítást. □

4.30. Tétel (Cauchy-féle integrálformula). *Ha $f : T \to \mathbb{C}$ holomorf a T tartományon, akkor*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_G \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

minden olyan egyszerű, pozitív irányítású zárt G görbére, amely belsejével együtt benne van T-ben, és amely a z_0 pontot a belsejében tartalmazza.

Bizonyítás: A feltétel szerint f differenciálható z_0-ban, ezért annak egy környezetében az

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

differenciahányados függvény korlátos lesz z_0 egy r sugarú zárt környezetében. Legyen $C_r(z_0)$ a z_0 középpontú r sugarú kör pozitív irányítással, amely szintén benne van a T tartományban. De ekkor a 4.28. Állítás és a 4.29. Tétel alapján

$$0 = \int_G \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz = \int_G \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \int_G \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,dz = \int_G \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0)\int_{C_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0}\,dz,$$

amiből következik az állítás, hiszen a 4.19. Példa szerint $\int_{C_r(z_0)} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$. □

4.31. Példa. Számítsuk ki az

$$\oint_G \frac{e^{\sin iz}}{z - \pi i}\,dz$$

integrált, ahol G a πi pontot a belsejében tartalmazó pozitív irányítású egyszerű zárt görbe!

Az integrandusnak a $z_0 = i\pi$ pont az egyetlen szinguláris pontja, ezért a Cauchy-féle integrálformula szerint

$$\oint_G \frac{e^{\sin iz}}{z - \pi i}\, dz = 2\pi i e^{\sin i^2 \pi} = 2\pi i.$$

□

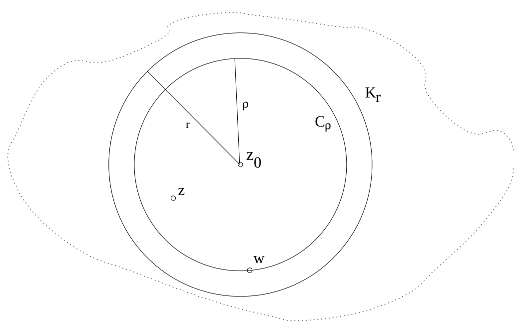
4.6. Holomorf függvények Taylor-sorba fejtése

4.32. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f\colon T \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ekkor f akárhányszor differenciálható a T tartományon, és bármely $z_0 \in T$-re*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots, \qquad z \in K_r(z_0), \tag{4.14}$$

ahol $r > 0$ olyan, hogy $K_r(z_0) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < r\} \subset T$.

Bizonyítás: Legyen $z_0 \in T$, és legyen $r > 0$ olyan, hogy $K_r(z_0) \subset T$. (Ilyen $r > 0$ létezik, mivel T nyílt.) Legyen $z \in K_r(z_0)$ rögzített. Legyen ρ olyan, hogy $|z - z_0| < \rho < r$, és legyen $C_\rho(z_0) = \{z\colon |z - z_0| = \rho\}$. Ekkor $C_\rho(z_0) \subset K_r(z_0) \subset T$.



Legyen $w \in C_\rho(z_0)$, ekkor

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1,$$

így a geometriai sor azonosságát alkalmazva

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Mivel a geometriai sor a konvergenciatartományának zárt részhalmazán egyenletesen konvergens, ezért megmutatható, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}$$

végtelen sor is egyenletesen konvergens a $w \in C_\rho(z_0)$ görbén, így tagonként integrálható. A Cauchy-féle integrálformula alapján ezért

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_{C_\rho}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw.
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az f függvény $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ alakú hatványsorba fejthető, ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw.$$

A 4.12. Következmény szerint f akárhányszor differenciálható, és

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Ezzel a (4.14) összefüggést igazoltuk. □

Az előző tétel bizonyításából és a 4.28. Állításból rögtön következik:

4.33. Tétel (Általános Cauchy-féle integrálformula). *Ha $f : T \to \mathbb{C}$ holomorf a T tartományon, akkor f akárhányszor differenciálható T-n, és*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

minden olyan egyszerű, pozitív irányítású zárt G görbére, amely belsejével együtt benne van T-ben, és amely a z_0 pontot a belsejében tartalmazza.

4.34. Példa. Számítsuk ki az

$$\oint_G \frac{e^{\sin iz}}{(z-\pi i)^2}\,dz$$

integrált, ahol G pozitív irányítású egyszerű zárt görbe, amely a πi pontot a belsejében tartalmazza!

Legyen $f(z) = e^{\sin iz}$. Ekkor $f'(z) = ie^{\sin iz}\cos iz$, ezért az általános Cauchy-féle integrálformula szerint

$$\oint_G \frac{e^{\sin iz}}{(z-\pi i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(\pi i) = 2\pi i^2 e^{\sin i^2\pi}\cos i^2\pi = 2\pi.$$

□

4.7. A Laurent-sor és a reziduum-tétel

Megmutatjuk, hogy izolált szinguláris pontok egy kis környezetében is végtelen sorba fejthető egy komplex függvény, de ekkor negatív kitevős hatványok is szerepelhetnek a végtelen sorban.

4.35. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, $z_0 \in T$, $f : (T \setminus \{z_0\}) \to \mathbb{C}$ holomorf a $T \setminus \{z_0\}$ halmazon. Ekkor*

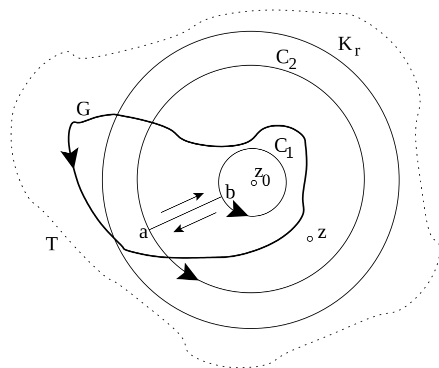
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad 0 < |z-z_0| < r, \tag{4.15}$$

ahol $r > 0$ olyan, hogy $K_r(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}\colon |z-z_0| < r\} \subset T$, továbbá

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.16}$$

ahol G olyan T-ben haladó egyszerű zárt görbe, amely a z_0 pontot pozitív irányban megkerüli.

Bizonyítás: Rögzítsünk egy z pontot, amelyre $0 < |z-z_0| < r$. Legyen r_1 és r_2 olyan, hogy $0 < r_1 < |z-z_0| < r_2 < r$, és legyen $C_j(z_0) = \{z\colon |z-z_0| = r_j\}$ $(j = 1,2)$ pozitív irányítással, legyen $\overline{ab}$ a C_1 és C_2 köröket összekötő szakasz, amely nem megy át a z_0 ponton (lásd az alábbi ábrán).



Ekkor legyen C az a zárt egyszerű görbe, amelyet úgy kapunk, hogy az a pontból a C_2 mentén elmegyünk körbe az a-ba, onnan a szakasz mentén a b-be, onnan a $-C_1$ mentén a b-be, majd vissza az a-ba: $C = C_2 + \overline{ab} - C_1 - \overline{ab}$. Ekkor a z pontot a C pozitív irányban kerüli meg. A Cauchy-féle integrálformula és az integrál tulajdonságai szerint

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Legyen $w \in C_2(z_0)$. Ekkor a feltételek szerint

$$\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1,$$

ezért

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Hasonlóan, ha $w \in C_1(z_0)$, akkor

$$\frac{|w-z_0|}{|z-z_0|} = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1,$$

ezért

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Megmutatható, hogy ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

végtelen sorok egyenletesen konvergensek a $w \in C_2(z_0)$ ill. $w \in C_1(z_0)$ körökön, ezért az integrálás és a határátmenet felcserélhető. Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\int_{C_1} f(w)(w-z_0)^n\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n}}\int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}\,dw, \end{aligned}$$

azaz (4.15) teljesül a

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \qquad n = -1, -2, \ldots$$

együtthatókkal. De ebből a 4.28. Állítás szerint következnek a (4.16) képletek, hiszen C_1 és C_2 is a G görbébe deformálható. □

Az f függvény (4.15) alakú sorfejtését az f függvény *Laurent-sorának* hívjuk. A Laurent-sor fogalma segítségével osztályozhatjuk a szinguláris pontokat.

Legyen z_0 izolált szinguláris pontja f-nek. Ekkor z_0 egy kis környezetében Laurent-sorba fejthető az f függvény. Három esetet különböztetünk meg:

1. A Laurent sorban minden $c_n = 0$, ha n negatív, azaz

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots, \qquad 0 < |z-z_0| < r$$

alakú. Ekkor f kiterjeszthető z_0-ra az $f(z_0) = c_0$ értékkel, és a kiterjesztett függvény holomorf lesz z_0 egy kis környezetében. Ebben az esetben a z_0 pontot *megszüntethető szinguláris pontnak* nevezzük.

2. A Laurent-sorban csak véges sok negatív indexű együttható nem nulla, azaz

$$f(z) = c_{-k}(z-z_0)^{-k} + \cdots + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots, \qquad 0 < |z-z_0| < r$$

alakú, ahol $c_k \neq 0$. Ekkor a z_0 pontot *k-adrendű pólusnak* nevezzük.

3. A Laurent-sorban végtelen sok negatív indexű tag együtthatója nem nulla. Ekkor z_0-t *lényeges szinguláris pontnak* hívjuk.

A definícióból könnyen igazolható:

4.36. Állítás. *Az f függvénynek a z_0 izolált szinguláris pontja k-adrendű pólus, akkor és csak akkor, ha*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$

alakú, ahol g holomorf függvény a z_0 egy kis környezetében.

4.37. Példa. Számítsuk ki az

$$f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1}$$

függvény $z_0 = -i$ körüli Laurent-sorát! Parciális törtekre bontással kapjuk, hogy

$$\frac{z+3i}{z^2+1} = \frac{z+3i}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i},$$

ahol $A = -1$ és $B = 2$. A geometriai sor összegképletét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{2}{z-i} = \frac{2}{z+i-2i} = -\frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}} = i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n,$$

ahol a sor konvergens, ha $|z+i| < 2$. Így az f függvény $z_0 = -i$ körüli Laurent-sora

$$\frac{z+3i}{z^2+1} = -\frac{1}{z+i} + i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n, \qquad 0 < |z+i| < 2.$$

Hasonló módon kiszámítható, hogy az f függvény i körüli Laurent-sora

$$\frac{z+3i}{z^2+1} = \frac{2}{z-i} + \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n, \qquad 0 < |z-i| < 2.$$

□

A (4.15) Laurent-sorban a c_{-1} együttható kitüntetett jelentőségű, hiszen

$$\int_G f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Azaz, ha ismerjük c_{-1}-et, akkor a fenti képlettel kiszámítható a görbe menti integrál. A c_{-1} számot az f függvény z_0 pontjához tartozó *reziduumának* nevezzük és $\mathrm{Res}(f, z_0)$-lal jelöljük.

A 4.27. Állítás szerint ha egy egyszerű zárt G görbe az f függvény $z_1, \ldots, z_m$ izolált szinguláris pontjait tartalmazza, akkor a z_i pontot egy kis r_i sugarú pozitív irányítású C_i körrel körbevesszük, úgy, hogy C_i benne van a G belsejében és a C_i kör belsejében már csak z_i az egyetlen szinguláris pont, akkor a G görbe menti integrál egyenlő a C_i görbe menti integrálok összegével. Ezeket viszont a fenti képlet szerint a függvény reziduuma segítségével kiszámíthatjuk. Kapjuk tehát a következő tételt:

4.38. Tétel (Reziduum-tétel). *Legyen $f : T \to \mathbb{C}$ holomorf a T-ben a $z_1, \ldots, z_m$ pontok kivételével, G egy egyszerű pozitív irányítású zárt görbe T-ben, amely belsejében tartalmazza a $z_1, \ldots, z_m$ szinguláris pontokat. Ekkor*

$$\int_G f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_i).$$

4.39. Példa. Számítsuk ki az

$$\int_G \frac{z+3i}{z^2+1}\,dz$$

integrált, ahol G az $1+2i$, $-1+2i$, $-1-2i$ és $1-2i$ pontokat összekötő pozitív irányítású zárt görbe! Jelölje $f(z)=\frac{z+3i}{z^2+1}$. Vegyük észre, hogy G tartalmazza az i és $-i$ pontokat, az f függvény szinguláris pontjait. Ezért a reziduum-tétel szerint

$$\int_G \frac{z+3i}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,-i)\Big).$$

A 4.37. Példában levezetett Laurent-sorokból leolvasható, hogy

$$\operatorname{Res}(f,i)=2 \qquad \text{és} \qquad \operatorname{Res}(f,-i)=-1,$$

tehát

$$\int_G \frac{z+3i}{z^2+1}\,dz = 2\pi i.$$

□

A következő speciális alakú függvényekre könnyű reziduumot számolni:

4.40. Állítás. *Legyen $g,h\colon T\to\mathbb{C}$ holomorf, $z_0\in T$ olyan, hogy*

$$h(z_0)=0 \qquad \textit{és} \qquad h'(z_0)\neq 0.$$

Ekkor

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},z_0\right)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{4.17}$$

Bizonyítás: Legyen $f(z)\overset{\text{def}}{=}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}$. Ekkor

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$$

azaz az f függvénynek megszüntethető szingularitása van z_0-ban. De ekkor a $\frac{g(z)}{h(z)}$ függvénynek z_0 elsőrendű pólusa, és (4.17) teljesül. □

4.41. Példa. Számítsuk ki a (4.17) formula segítségével az

$$f(z)=\frac{z+3i}{z^2+1}$$

függvény reziduumait i-ben és $-i$-ben. Mivel most $g(z)=z+3i$, $h(z)=z^2+1$ és $h'(z)=2z$, ezért

$$\operatorname{Res}(f,i)=\frac{g(i)}{h'(i)}=\frac{4i}{2i}=2 \qquad \text{és} \qquad \operatorname{Res}(f,-i)=\frac{g(-i)}{h'(-i)}=\frac{2i}{-2i}=-1.$$

□

k-adrendű pólusok esetében is könnyen kiszámítható a reziduum értéke.

4.42. Állítás. *Legyen* z_0 *k-adrendű pólusa az* f *függvénynek. Ekkor*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g^{k-1}(z_0)}{(k-1)!},$$

ahol $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$.

Bizonyítás: Ha z_0 k-adrendű pólus, akkor

$$f(z) = c_{-k}(z - z_0)^{-k} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

alakú, ezért

$$g(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \cdots.$$

Ebből rögtön következik az állítás a 4.12. Következményt használva. □

4.43. Példa. Számítsuk ki az

$$f(z) = \frac{\sin 2z}{(z - i)^3}$$

függvény reziduumát i-ben! Az i pontban f-nek harmadrendű pólusa van, ezért legyen $g(z) = (z - i)^3 f(z) = \sin 2z$. Ekkor

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{g^{(2)}(i)}{2} = \frac{-4 \sin 2i}{2} = -2 \sin 2i.$$

□

4.8. Alkalmazások valós integrálok kiszámítására

Néhány példán keresztül megmutatjuk, hogy bizonyos esetekben valós integrálok kiszámíthatók komplex integrálok segítségével.

Tekintsük először az

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

integrált, ahol $R(u, v)$ egy kétváltozós racionális tört! A

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Euler-formulákat behelyettesítve az integranduszba

$$I = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} R\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) ie^{it}\, dt$$

alakban írható fel. Ez utóbbi alakot viszont tekinthetjük úgy is, mint az

$$I = \oint_G \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) dz$$

komplex integrál paraméterezését, ahol G az origó középpontú egységsugarú kör, és a kör paraméterezése $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. A zárt görbe menti integrált pedig kiszámíthatjuk a reziduumtételt alkalmazva.

4.44. Példa. Nézzük például az

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin t + 1}{\cos t + 2}\, dt$$

integrált! Most

$$R(u, v) = \frac{u^2 + v + 1}{u + 2},$$

ezért

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) = \frac{1}{iz} \frac{\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 + \frac{z-z^{-1}}{2i} + 1}{\frac{z+z^{-1}}{2} + 2} = -\frac{iz^4 + 2z^3 + 6iz^2 - 2z + i}{2z^2(z^2 + 4z + 1)}.$$

Az f függvény szinguláris pontjai

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = -2 + \sqrt{3}, \qquad z_3 = -2 - \sqrt{3},$$

amelyek közül z_1 és z_2 esik az egységsugarú kör belsejébe, így

$$I = 2\pi i \Big(\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\Big).$$

Számítsuk ki a reziduumokat! $z_1 = 0$ másodrendű pólus, ezért a 4.42. Állítást alkalmazva

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_1) &= \frac{d}{dz}\left(-\frac{iz^4 + 2z^3 + 6iz^2 - 2z + i}{2(z^2 + 4z + 1)}\right)\Bigg|_{z=0} \\
&= -\frac{iz^5 + 2iz^3 + 6iz^4 + 5iz + 12iz^2 + z^4 + 4z^2 + 8z^3 - 1 - 2i}{(z^2 + 4z + 1)^2}\Bigg|_{z=0} \\
&= 1 + 2i.
\end{aligned}$$

A második reziduumot a 4.40. Állítás segítségével kapjuk:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_2) &= -\frac{iz^4 + 2z^3 + 6iz^2 - 2z + i}{2z^2(2z + 4)}\Bigg|_{z=-2+\sqrt{3}} \\
&= -\frac{35i\sqrt{3} - 60i - 12\sqrt{3} + 21}{3(-2 + \sqrt{3})^2}.
\end{aligned}$$

Az integrál tehát

$$I = 2\pi i \left(1 + 2i - \frac{35i\sqrt{3} - 60i - 12\sqrt{3} + 21}{3(-2 + \sqrt{3})^2}\right) = \frac{2\pi(-102 + 59\sqrt{3})}{3(-2 + \sqrt{3})^2} \approx 5.571624606.$$

□

Tegyük fel most, hogy az

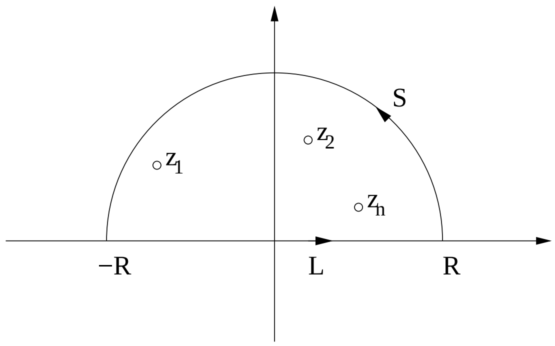
$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\, dx$$

integrált szeretnénk kiszámítani, ahol

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

alakú (valós) racionális tört függvény. Tegyük fel, hogy q-nak nincs valós gyöke, és q fokszáma legalább kettővel nagyobb, mint p fokszáma.

Az $r(z)$ komplex függvénynek a feltételek szerint nincs szinguláris pontja a valós tengelyen, és ha w egy szinguláris pontja r-nek (azaz gyöke q-nak), akkor $\overline{w}$ is az. Azaz a szinguláris pontok a valós tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el. Legyenek $z_1, \overline{z_1}, \dots, z_n, \overline{z_n}$ az összes szinguláris pontja r-nek. Legyen R olyan nagy, hogy az origó középpontú R-sugarú kör minden szinguláris pontot a belsejében tartalmaz. Jelölje S az R-sugarú, origó középpontú kör felső félkörét pozitív irányítással, legyen L a $[-R, R]$ intervallum, és legyen $C = S + L$:



Ekkor a reziduum-tétel szerint

$$\oint_C r(z)\,dz = \int_S r(z)\,dz + \int_L r(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(r, z_j).$$

A feltétel szerint

$$\frac{z^2 p(z)}{q(z)}$$

korlátos a $|z| \geq R$ tartományon, azaz létezik olyan M, hogy

$$\frac{|p(z)|}{|q(z)|} \leq \frac{M}{|z|^2}, \qquad |z| \geq R.$$

Ezért a komplex integrál tulajdonsága szerint

$$\left| \int_S r(z)\,dz \right| \leq \frac{M}{R^2}\pi R = \frac{M\pi}{R} \to 0, \qquad \text{ha } R \to \infty.$$

Másrészt

$$\int_L r(z)\,dz = \int_{-R}^{R} r(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\,dx, \qquad \text{ha } R \to \infty.$$

Kaptuk tehát, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(r, z_j), \tag{4.18}$$

ahol tehát az összes a felső félsíkba tartozó szinguláris pontra számítjuk a reziduumok összegét.

4.45. Példa. Számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 64}\,dx$$

integrált!

A függvény pozitív képzetes részű szinguláris pontjai:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i, \\ z_3 &= 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

A 4.40. Állítás szerint

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, z_1) &= \frac{1}{6{z_1}^5} = \frac{1}{192}(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}) = \frac{1}{192}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) \\ \mathrm{Res}(f, z_2) &= \frac{1}{6{z_2}^5} = \frac{1}{192}(\cos\frac{-5\pi}{2} + i\sin\frac{-5\pi}{2}) = -\frac{1}{192}i \\ \mathrm{Res}(f, z_3) &= \frac{1}{6{z_3}^5} = \frac{1}{192}(\cos\frac{-25\pi}{6} + i\sin\frac{-25\pi}{6}) = \frac{1}{192}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i). \end{aligned}$$

A (4.18) képlet alapján

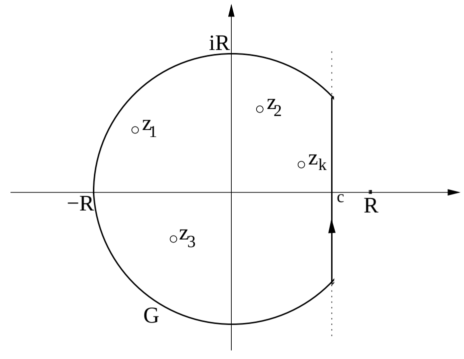
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 64}\,dx = 2\pi i \frac{1}{192}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{48}.$$

□

Megmutatható, hogy bizonyos feltételek mellett egy (komplex függvény) inverz Laplace-transzformáltját ki lehet fejezni komplex görbe menti integrál segítségével. Az eredményt egy egyszerűbb esetre fogalmazzuk meg bizonyítás nélkül.

4.46. Tétel (Laplace-transzformált inverziós formulája). *Tegyük fel, hogy az F komplex függvény a véges sok $z_1, \ldots, z_k$ pont kivételével az egész komplex síkon holomorf, és létezik olyan $a > 1$ és $b \in \mathbb{R}$, hogy $|z^a F(z)|$ korlátos a $\mathrm{Re}\, z > b$ komplex félsíkon. Legyen $R > c > b$, és legyen G az az egyszerű zárt görbe, amely az origó középpontú R sugarú kör és a $\mathrm{Re}\, z = c$ függőleges egyenes az alábbi ábrán látható részeiből áll, pozitív irányítással. Tegyük fel továbbá, hogy G a belsejében tartalmazza az F függvény összes szinguláris pontját. Ekkor*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_G e^{zt} F(z)\,dz. \tag{4.19}$$



4.47. Példa. Legyen $\beta > 0$. Keressük meg az

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + \beta^2}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját a (4.19) formula segítségével!

Mivel $|z^{3/2}/(z^2 + \beta^2)|$ korlátos például a $Re\, z > 1$ félsíkon, ezért alkalmazható a (4.19) formula, ahol G az a fenti ábrán látható görbe, ahol például $R > \max(\beta, 2)$, $c = 2$. Ekkor F két szinguláris pontja, $i\beta$ és $-i\beta$, a G görbe belsejébe esik. A reziduum-tétel és a (4.19) formula szerint tehát

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{e^{zt}}{z^2 + \beta^2}\, dz = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + \beta^2}, i\beta\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + \beta^2}, -i\beta\right).$$

Másrészt a (4.17) képlet alapján

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + \beta^2}, i\beta\right) = \left.\frac{e^{zt}}{2z}\right|_{z=i\beta} = \frac{e^{i\beta t}}{2i\beta} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + \beta^2}, i\beta\right) = \left.\frac{e^{zt}}{2z}\right|_{z=-i\beta} = \frac{e^{-i\beta t}}{-2i\beta},$$

ezért

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2i\beta}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}) = \frac{\sin \beta t}{\beta}.$$

$\square$