

3. Mérték- és integrálelmélet

3.1. Halmazok számossága

Azt mondjuk, hogy egy véges A halmaz *számossága* n , ha az A halmaz n db elemből áll. Ez azzal ekvivalens, hogy a halmaz elemeit egy a_1, \dots, a_n véges sorozatba tudjuk rendezni, más szóval megadható az $\{1, 2, \dots, n\}$ és az A halmaz elemei között egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés (bijekció). Végtelen halmazokra ily módon tudjuk a számosság fogalmát általánosítani. Először tekintsük a természetes számok halmazának számosságát. Jelölje \mathbb{N} a természetes számok, azaz a pozitív egész számok halmazát.

3.1. Definíció. Egy végtelen A halmaz *megszámlálható* vagy *megszámlálható számosságú*, ha létezik a természetes számok halmaza és az A halmaz között egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés.

3.2. Megjegyzés. Más szóval a fenti definíció azt jelenti, hogy az A halmaz megszámlálható számosságú, ha az elemei egy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ végtelen sorozatba rendezhetők, ahol az A halmaz minden eleme pontosan egyszer szerepel a sorozatban.

Tegyük fel most, hogy adott egy tetszőleges (a_n) sorozat. Ekkor egy elem többször is előfordulhat a sorozatban. Megmutatjuk, hogy mindig található a sorozatnak egy olyan (esetleg véges) részsorozat, amelyben minden elem már csak egyszer fordul elő: legyen $b_1 = a_1$. Tekintsük a_2 -t. Ha $a_2 \neq b_1$, akkor legyen $b_2 = a_2$, egyébként kihagyjuk a_2 -t, és tekintsük a_3 -t. Tegyük fel, hogy már az a_1, \dots, a_n tagokat átnézve kiválasztottuk a b_1, \dots, b_m ($m \leq n$) számokból álló részsorozatot úgy, hogy abban b_1, \dots, b_m páronként különböző. Ekkor a_{n+1} -t véve ellenőrizzük, hogy az előfordul-e a b_1, \dots, b_m számok között. Ha nem, akkor az a_{n+1} számmal folytatjuk a b_1, \dots, b_m sorozatot, azaz legyen $b_{m+1} = a_{n+1}$, egyébként nem bővítjük a b_1, \dots, b_m sorozatot, hanem ismételjük ezt az eljárást az a_{n+2} számmal. Így módon egyértelműen definiálható a b_1, b_2, \dots (esetleg véges) sorozat, hogy abban az elemek már nem ismétlődnek. Ezért az $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ halmaz megszámlálható számosságú, ha van végtelen sok páronként különböző eleme, egyébként véges számosságú.

3.3. Példa. A nemnegatív egész számok halmaza (\mathbb{N}_0) megszámlálható, hiszen $\phi(n) = n + 1$ egy bijekció \mathbb{N}_0 és \mathbb{N} között. \square

3.4. Példa. Az egész számok halmaza (\mathbb{Z}) megszámlálható, hiszen egy lehetséges sorbarendezése \mathbb{Z} -nek $0, 1, -1, 2, -2, \dots$. A

$$\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \phi(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ k, & n = 2k, \\ -k, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{N}, \\ k \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

leképezés tehát egy bijekció \mathbb{N} és \mathbb{Z} között. \square

3.5. Példa. A $[0, 1]$ intervallumba eső racionális számokat a következő végtelen háromszög alakú táblázatban lehet felsorolni:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Ha ezen a táblázaton soronként megyünk végig, akkor felsorolhatjuk az összes racionális számot egy sorozatban:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots$$

Ekkor persze néhány racionális számot többször (sőt végtelen sokszor) is felsorolunk. De a fenti sorozatból a 3.2. Megjegyzésben leírt módon kiválaszthatunk egy olyan részsorozatot, amelyben már minden 0 és 1 közötti racionális szám pontosan egyszer szerepel, tehát a $[0, 1]$ intervallumba eső racionális számok halmaza megszámlálható számosságú. \square

3.6. Példa. Megmutatjuk, hogy a $[0, 1]$ intervallum nem megszámlálható számosságú. Tegyük fel, hogy az összes 0 és 1 közötti valós számot az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozatba rendeztük. Vegyük az a_n szám tizedes tört előállítását, ahol a tizedes jegyeket jelölje:

$$a_n = 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} a_4^{(n)} \dots$$

Ismert, hogy véges sok tizedesjeggyel leírható valós számok megadhatók végtelen sok tizedesjeggyel is (például $0,5 = 0,49999\dots$). Ilyen valós számokra a fenti felírásban mindig vegyük az a_n végtelen tizedestörtes alakját. Ekkor egyértelműen hozzárendeltük a 0 és 1 közötti valós számokhoz a végtelen tizedestörtes alakját.

Tekintsük ezután azt az $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ valós számot, amelynek n -edik tizedesjegye

$$x_n = \begin{cases} 2, & \text{ha } a_n^{(n)} = 1, \\ 1, & \text{ha } a_n^{(n)} \neq 1. \end{cases}$$

Ekkor x nem írható fel véges tizedestört alakban (nem végződik csupa 0-ra vagy csupa 9-re), és x nem egyezik meg egyik a_n valós számmal sem, hiszen x és a_n tizedestört felírása az n -edik tizedesjegyben eltér. Ez az ellentmondás mutatja, hogy a $[0, 1]$ halmaz nem megszámlálható számosságú. A $[0, 1]$ intervallum számosságát *kontinuum számosságnak* hívjuk. Megmutatható, hogy a valós számok halmaza és a $[0, 1]$ intervallum között létezik bijekció, azaz \mathbb{R} számossága is kontinuum. \square

3.7. Állítás.

1. Egy megszámlálható halmaz minden végtelen részhalmaza is megszámlálható.
2. Minden végtelen halmaznak létezik megszámlálható részhalmaza.
3. Legyen A_1 megszámlálható és A_2 véges halmaz. Ekkor $A_1 \cup A_2$ is megszámlálható.
4. Legyen A_1 és A_2 megszámlálható halmazok. Ekkor $A_1 \cup A_2$ is megszámlálható.
5. Legyen A_1 és A_2 megszámlálható halmazok. Ekkor az $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$ halmaz is megszámlálható.

6. Legyen A_i megszámlálható halmaz minden $i \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ is megszámlálható.

Bizonyítás: Csak az utolsó állítást látjuk be, a többi hasonló módon igazolható. Rendezzük az A_i halmaz elemeit az $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \dots$ sorozatba. Ekkor az $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz elemeit a

$$\begin{array}{cccccc}
 a_1^{(1)} & & a_2^{(1)} & \rightarrow & a_3^{(1)} & & a_4^{(1)} & \rightarrow & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 a_1^{(2)} & & a_2^{(2)} & & a_3^{(2)} & & a_4^{(2)} & & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
 a_1^{(3)} & & a_2^{(3)} & & a_3^{(3)} & & a_4^{(3)} & & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 a_1^{(4)} & & a_2^{(4)} & & a_3^{(4)} & & a_4^{(4)} & & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
 \end{array}$$

(jobbra és lefele is) végtelen táblázatban lehet felsorolni. Ekkor az összes elemet egy sorozatban fel tudjuk sorolni, ha a táblázat átlói mentén a nyilak irányában kezdjük felsorolni az elemeket:

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_1^{(4)}, a_2^{(3)}, a_3^{(2)}, a_4^{(1)}, a_5^{(1)}, a_4^{(2)}, a_3^{(3)}, a_2^{(4)}, a_1^{(5)}, \dots$$

Ezután a fenti sorozatból az azonos tagokat elhagyva kaphatunk egy olyan részsorozatot, amely az A halmaz összes elemeit pontosan egyszer tartalmazza. \square

3.8. Példa. A 3.5. Példa és a 3.7. Állítás 6. pontja alapján a racionális számok halmaza (\mathbb{Q}) is megszámlálható, mivel \mathbb{Q} felírható megszámlálható sok megszámlálható számosságú halmaz uniójaként: $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} B_i$, ahol $B_i = \mathbb{Q} \cap [i, i+1]$. Megjegyezzük, hogy a fenti végtelen unió megszámlálható sok halmaz uniója, mivel a 3.4. Példa szerint az egész számok halmaza megszámlálható számosságú. \square

3.9. Példa. Az előző példa és a 3.7. Állítás 5. pontja alapján a síkon a racionális koordinátájú pontok halmaza is megszámlálható. \square

3.2. Halmazgyűrűk és halmazfüggvények

Ebben a szakaszban feltesszük, hogy az itt szereplő halmazok egy X alaphalmaz részhalmazai (pl. $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$, stb.), és \mathcal{H} -val jelöljük az X alaphalmaz részhalmazainak egy halmazát, vagy más szóval, *halmazrendszerét*. A szokásos jelölést használjuk a halmazműveletekre: Legyen $A, B \in \mathcal{H}$, ekkor $A \cup B = \{x: x \in A \text{ vagy } x \in B\}$, $A \cap B = \{x: x \in A \text{ és } x \in B\}$, és $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ és } x \notin B\}$, az A halmaz komplementere az $X \setminus A$ halmaz. Jelölje \emptyset az üreshalmazt. Az A és B halmazt *diszjunkt*nek nevezzük, ha $A \cap B = \emptyset$. Egy A_1, A_2, \dots halmazrendszert *páronként diszjunkt*nek nevezünk, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re.

3.10. Definíció. A \mathcal{H} halmazrendszert *halmazgyűrűnek* vagy röviden *gyűrűnek* nevezzük, ha zárt az unió és a különbség halmazműveletekre, azaz tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ esetén

$$A \cup B \in \mathcal{H} \quad \text{és} \quad A \setminus B \in \mathcal{H}.$$

3.11. Állítás. Legyen \mathcal{H} egy gyűrű. Ekkor

1. \mathcal{H} zárt a metszet műveletre is,
2. $\emptyset \in \mathcal{H}$.

Bizonyítás:

1. Ha $A, B \in \mathcal{H}$, akkor $A \setminus B \in \mathcal{H}$, és ezért $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{H}$.
2. Legyen $A \in \mathcal{H}$. Ekkor $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{H}$. □

3.12. Példa. Legyen $\mathcal{H} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ véges}\}$ (az üres halmazt is véges halmaznak tekintjük). Ekkor nyilván \mathcal{H} gyűrű, hiszen véges halmazok uniója és különbsége is véges. □

3.13. Példa. Legyen $\mathcal{H} = \{E \subset \mathbb{N} : E \text{ véges vagy komplementere véges}\}$. Mutassuk meg, hogy \mathcal{H} gyűrű!

Először megmutatjuk, hogy \mathcal{H} zárt az unió műveletre. Legyen $A, B \in \mathcal{H}$. Két esetet különböztetünk meg: 1. Ha A és B is véges, akkor $A \cup B$ is véges. 2. Ha legalább az egyik halmaz, például B nem véges, de \overline{B} véges, akkor $A \cup B$ nem véges, de a komplementere, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{B}$ véges, függetlenül A számosságától.

Most legyen $A, B \in \mathcal{H}$, és megmutatjuk, hogy $A \setminus B \in \mathcal{H}$. Három esetet különböztetünk meg: 1. Ha A véges, akkor $A \setminus B$ is véges, függetlenül B számosságától. 2. Ha A nem véges, de komplementere véges, és B véges, akkor $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$ véges. 3. Ha A és B nem végesek, de \overline{A} és \overline{B} végesek, akkor $A \setminus B \subset \overline{B}$, így $A \setminus B$ véges. Mindhárom esetben tehát kaptuk, hogy $A \setminus B \in \mathcal{H}$. □

3.14. Definíció. A \mathcal{H} halmazgyűrűt σ -gyűrűnek nevezzük, ha zárt a megszámlálható unióképzésre, azaz ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$, akkor

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}.$$

A \mathcal{H} σ -gyűrűt σ -algebrának nevezzük, ha az alaphalmaz is hozzátartozik \mathcal{H} -hoz, azaz $X \in \mathcal{H}$.

3.15. Példa. Az X halmaz összes részhalmazainak halmaza mindig σ -algebra. □

3.16. Példa. Legyen $\mathcal{H} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ véges vagy megszámlálható számosságú}\}$. Ekkor \mathcal{H} σ -algebra a 3.7. Állítás szerint. □

3.17. Példa. Tekintsük a 3.12. Példában definiált \mathcal{H} halmazrendszert. Ez gyűrű, de nem σ -gyűrű, hiszen a halmazrendszer nem zárt a megszámlálható unióra.

Hasonlóan, a 3.13. Példában definiált \mathcal{H} halmazrendszer is csak gyűrű, de nem σ -gyűrű, hiszen például a racionális számok \mathbb{Q} halmaza megszámlálható, ezért előáll véges halmazok megszámlálható uniójaként, de $\mathbb{Q} \notin \mathcal{H}$, hiszen sem \mathbb{Q} sem a komplementere nem véges. □

3.18. Megjegyzés. Egy \mathcal{H} σ -gyűrű zárt a megszámlálható metszetképzésre is, mivel ha $A_n \in \mathcal{H}$ ($n = 1, 2, \dots$), akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{H}.$$

Nyilván egy \mathcal{H} σ -algebra zárt a komplementer képzésre is.

3.19. Definíció. Az $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_b \stackrel{\text{def}}{=} \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$ függvényt *halmazfüggvénynek* hívjuk, ha $+\infty$ és $-\infty$ egyidejűleg nem eleme F értékészletének, és van olyan $A \in \mathcal{H}$, amelyre $|F(A)| \neq +\infty$. F -et *additív halmazfüggvénynek* nevezzük, ha

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B), \quad \text{ha } A, B \in \mathcal{H} \text{ és } A \cap B = \emptyset.$$

Ha $F(A) \geq 0$ minden $A \in \mathcal{H}$ -ra, akkor F -et *nemnegatív halmazfüggvénynek* nevezzük.

Megmutatjuk az additív halmazfüggvények alábbi tulajdonságait.

3.20. Állítás. Legyen $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_b$ egy additív halmazfüggvény. Ekkor

1. $F(\emptyset) = 0$;
2. $F(A_1 \cup \dots \cup A_n) = F(A_1) + \dots + F(A_n)$, ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt, azaz $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re;
3. $F(A_2 \setminus A_1) = F(A_2) - F(A_1)$, ha $A_1 \subset A_2$, $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$ és $F(A_1) < \infty$;
4. ha F nemnegatív, akkor monoton is, azaz $F(A_1) \leq F(A_2)$, ha $A_1 \subset A_2$, $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$;
5. ha F nemnegatív, akkor $F(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq F(A_1) + \dots + F(A_n)$ minden $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ -ra.

Bizonyítás:

1. Az $F(\emptyset) = F(\emptyset \cup \emptyset) = F(\emptyset) + F(\emptyset) = 2F(\emptyset)$ összefüggésekből következik, hogy $F(\emptyset) = 0$ vagy $F(\emptyset) = +\infty$ vagy $F(\emptyset) = -\infty$. Ha $F(\emptyset) = +\infty$, akkor $F(A) = F(A \cup \emptyset) = F(A) + F(\emptyset) = +\infty$, minden $A \in \mathcal{H}$ -ra, ami ellentmond a halmazfüggvény definíciójának. Az $F(\emptyset) = -\infty$ esetben hasonló módon kapunk ellentmondást.

2. Az összefüggés teljes indukcióval rögtön következik az additivitási tulajdonságból.

3. Legyen $A_1 \subset A_2$. Ekkor $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ és $A_1 \cap (A_2 \setminus A_1) = \emptyset$, így az additivitás miatt $F(A_2) = F(A_1) + F(A_2 \setminus A_1)$, amiből következik az állítás.

4. Legyen $A_1 \subset A_2$. Ekkor az előzőhöz hasonló módon $F(A_2) = F(A_1) + F(A_2 \setminus A_1) \geq F(A_1)$.

5. Legyen $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$. Ekkor B_1, B_2, \dots, B_n páronként diszjunkt, $B_i \subset A_i$ és $A_1 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$. Ezért a 2. és 4. tulajdonság szerint

$$F(A_1 \cup \dots \cup A_n) = F(B_1 \cup \dots \cup B_n) = F(B_1) + \dots + F(B_n) \leq F(A_1) + \dots + F(A_n).$$

□

3.21. Példa. Legyen F egy additív halmazfüggvény egy \mathcal{H} gyűrűn. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ -ra

$$F(A \cup B) + F(A \cap B) = F(A) + F(B)!$$

Mivel $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ páronként diszjunkt halmazok uniója, ezért F additivitása miatt

$$F(A \cup B) = F(A \setminus B) + F(A \cap B) + F(B \setminus A).$$

Hasonlóan,

$$F(A) = F(A \setminus B) + F(A \cap B) \quad \text{és} \quad F(B) = F(B \setminus A) + F(A \cap B),$$

amiből következik az állítás. □

3.22. Definíció. A \mathcal{H} gyűrűn értelmezett F halmazfüggvényt σ -additívnek vagy megszámlálhatóan additívnek nevezük, ha minden olyan páronként diszjunkt $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ esetén, amelyre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$,

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n)$$

teljesül. Ha \mathcal{H} σ -algebra, és F egy σ -additív halmazfüggvény \mathcal{H} -n, akkor F -et *előjeles mértéknek* nevezük. Ha pedig F nemnegatív is ezen felül, akkor F -et egyszerűen *mértéknek* nevezük.

3.23. Megjegyzés. A fenti összefüggés bal oldala a halmazok átrendezésétől független, ezért ha a $\sum_{n=1}^{\infty} F(A_n)$ sor konvergencia, akkor abszolút konvergencia is. Egyébként divergencia, és divergál $+\infty$ -hez vagy $-\infty$ -hez.

3.24. Tétel. Tegyük fel, hogy F σ -additív egy \mathcal{H} σ -gyűrűn. Legyen továbbá $A_n \in \mathcal{H}$ ($n \geq 1$) úgy, hogy $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, és jelölje $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$. Ekkor

$$F(A_n) \rightarrow F(A), \quad n \rightarrow +\infty \text{ esetén.}$$

Bizonyítás: Legyen $B_1 = A_1$, és $n = 2, 3, \dots$ -re legyen

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}.$$

Ekkor a B_1, B_2, \dots halmazok páronként diszjunktak, azaz $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, továbbá

$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \quad \text{és} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

valamint

$$F(A_n) = F(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = \sum_{j=1}^n F(B_j).$$

Mivel F σ -additív, ezért

$$F(A) = \sum_{j=1}^{\infty} F(B_j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n F(B_j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(A_n).$$

□

3.25. Példa. Legyen \mathcal{H} az X halmaz összes részhalmazainak halmaza, $x_0 \in X$ rögzített. Minden $A \subset X$ -re legyen

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy μ egy σ -additív halmazfüggvény \mathcal{H} -n!

Legyen A_1, A_2, \dots páronként diszjunkt részhalmaza X -nek. Két esetet különböztetünk meg: 1. Ha x_0 eleme valamilyen n -re A_n -nek, akkor $\mu(A_n) = 1$ és $\mu(A_k) = 0$ minden $k \neq n$ -re. 2. Ha x_0 nem eleme egyik A_n halmaznak sem, akkor pedig $\mu(A_n) = 0$ minden n -re. Mindkét esetben teljesül tehát

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

□

3.26. Példa. Legyen \mathcal{H} a 3.13. Példában definiált halmazrendszer, és

$$\mu: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ha } A \text{ véges,} \\ 1, & \text{ha } A \text{ végtelen, de } \bar{A} \text{ véges.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy μ additív, de nem σ -additív!

Három esetet különböztetünk meg: 1. Ha A és B véges halmazok, akkor $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 0$ és $\mu(A \cup B) = 0$, hiszen $A \cup B$ is véges. 2. Ha az egyik halmaz véges, másik végtelen, pl. A véges és B végtelen, de \bar{B} véges, akkor, ahogy azt a 3.13. Példában láttuk, $A \cup B$ nem véges, de a komplementere az. Ezért $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 1$ és $\mu(A \cup B) = 1$. Végül, 3. legyen A és B mindkettő végtelen, és a komplementerük véges. Ekkor $A \cap B = \emptyset$ nem teljesülhet, hiszen ekkor $B \subset \bar{A}$, azaz B nem lehet végtelen.

Azaz minden olyan esetben, amikor $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ is teljesül.

Legyen $A_n = \{n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor A_1, A_2, \dots páronként diszjunkt, $\mu(A_n) = 0$, de

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \neq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1,$$

hiszen $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ végtelen halmaz, de komplementere az üres halmaz, azaz véges. \square

3.27. Definíció. A valós számegegyenes egy $I \subset \mathbb{R}$ részhalmazát (véges) *intervallumnak* nevezzük, ha $I = \emptyset$ vagy a következő halmazok valamelyikével egyenlő:

$$(\alpha, \beta), \quad [\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta], \quad [\alpha, \beta], \quad \text{ahol } \alpha \leq \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Ha $\alpha = \beta$, akkor $[\alpha, \beta]$ az egy pontból álló halmazt, (α, α) , $[\alpha, \alpha)$ és $(\alpha, \alpha]$ pedig az üreshalmazt jelöli. Az \mathbb{R}^p vektortér egy I részhalmazát *p-dimenziós intervallumnak* nevezzük, ha

$$I = I_1 \times \dots \times I_p = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p: x_i \in I_i, \quad i = 1, \dots, p\},$$

ahol I_i ($i = 1, \dots, p$) \mathbb{R} -beli intervallumok.

3.28. Definíció. Az \mathbb{R}^p vektortér azon részhalmazainak halmazát, amelyek *p*-dimenziós intervallumok véges sok egyesítéseként állnak elő, *elemi halmazoknak* nevezzük. Jelölje \mathcal{E}^p az \mathbb{R}^p vektortér összes elemi halmazainak halmazát.

A definíció alapján könnyen ellenőrizhetők az elemi halmazok alábbi tulajdonságai:

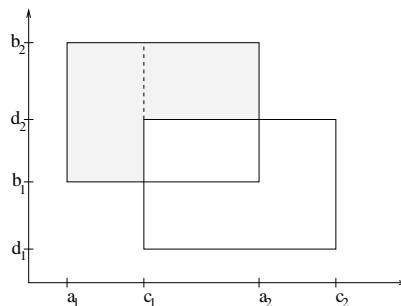
3.29. Állítás.

1. \mathcal{E}^p gyűrű (de nem σ -gyűrű).
2. Ha $A \in \mathcal{E}^p$, akkor A előáll véges sok diszjunkt intervallum egyesítéseként.

Bizonyítás: 1. Az \mathcal{E}^p halmazrendszer unióra való zártsága közvetlenül következik a definícióból. A különbségre vonatkozó zártságot csak 2 dimenzióban vizsgáljuk. Legyen

$$I = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \quad \text{és} \quad J = [c_1, c_2] \times [d_1, d_2],$$

és tegyük fel például, hogy $a_1 < c_1 < a_2 < c_2$ és $d_1 < b_1 < d_2 < b_2$, azaz a téglalapok elhelyezkedése:



Ekkor például $I \setminus J = \left([a_1, c_1] \times [b_1, b_2] \right) \cup \left([c_1, a_2] \times (d_2, b_2] \right)$, ezért $I \setminus J \in \mathcal{E}^p$. Végig lehet gondolni, hogy bárhogy is helyezkedik el egymáshoz viszonyítva a két téglalap, és bárhogy is választjuk zártnak illetve nyílnak a Descartes-szorzatban szereplő egydimenziós intervallumok végpontjait, a különbség mindig felbontható diszjunkt kétdimenziós intervallumok uniójára.

2. Legyen például $A = I \cup J$, ahol I és J intervallumok. Ekkor $A = (I \setminus J) \cup (I \cap J) \cup (J \setminus I)$, és a halmazok páronként diszjunktak. Nyilván $I \cap J$ intervallum. Az 1. pont bizonyítása szerint pedig $I \setminus J$ és $J \setminus I$ is felbontható diszjunkt intervallumok uniójára. Ehhez hasonló módon igazolható az állítás kettőnél több halmaz uniójára is. \square

3.30. Definíció. Az *elemi halmazok térfogatán* a következő m halmazfüggvényt értjük: Egy I p -dimenziós intervallumra legyen $m(I) = 0$, ha $I = \emptyset$, ha pedig $I = I_1 \times \dots \times I_p$, ahol I_i egy (3.1) alakú intervallum, amelynek végpontjai α_i és β_i , akkor legyen

$$m(I) = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \cdots (\beta_p - \alpha_p).$$

Ha az $A \in \mathcal{E}^p$ elemi halmaz

$$A = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(n)}$$

alakban írható fel p -dimenziós intervallumok diszjunkt uniójaként, akkor legyen

$$m(A) = m(I^{(1)}) + \dots + m(I^{(n)}).$$

A definícióból látszik, hogy egydimenziós, síkbeli ill. térbeli intervallumokra $m(I)$ az intervallum hosszát, területét ill. térfogatát adja vissza.

3.31. Állítás.

1. Ha $A \in \mathcal{E}^p$, akkor az $m(A)$ definíciója nem függ az A felbontásától.
2. m additív halmazfüggvény \mathcal{E}^p -n.

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy az A halmazt kétféleképpen állítottuk elő páronként diszjunkt p -dimenziós intervallumok uniójaként:

$$A = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(n)} = \tilde{I}^{(1)} \cup \dots \cup \tilde{I}^{(k)}.$$

Ekkor az $E_{i,j} = I^{(i)} \cap \tilde{I}^{(j)}$ halmazok ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$) is intervallumok, sőt páronként diszjunktak, továbbá

$$I^{(i)} = \bigcup_{j=1}^k E_{i,j} \quad \text{és} \quad \tilde{I}^{(j)} = \bigcup_{i=1}^n E_{i,j},$$

így m additivitását alkalmazva

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{i=1}^n m(I^{(i)}) = \sum_{i=1}^n m\left(\bigcup_{j=1}^k E_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m(E_{i,j}) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n m(E_{i,j}) \\ &= \sum_{j=1}^k m\left(\bigcup_{i=1}^n E_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^k m(\tilde{I}^{(j)}). \end{aligned}$$

2. Legyen A és B diszjunkt elemi halmazok. Írjuk fel a halmazokat diszjunkt intervallumok uniójaként:

$$A = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(n)}, \quad B = J^{(1)} \cup \dots \cup J^{(m)}.$$

Ekkor az $I^{(1)}, \dots, I^{(n)}, J^{(1)}, \dots, J^{(m)}$ halmazok is páronként diszjunktak, és így

$$A \cup B = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(n)} \cup J^{(1)} \cup \dots \cup J^{(m)}$$

diszjunkt felbontása $A \cup B$ -nek. Ezért

$$m(A \cup B) = \sum_{i=1}^n m(I^{(i)}) + \sum_{i=1}^m m(J^{(i)}) = m(A) + m(B).$$

□

3.32. Példa.

A kockadobás lehetséges kimenetelei: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Homogén kocka esetén annak valószínűsége, hogy a lehetséges kimenetek valamelyike teljesül: $p = \frac{1}{6}$. Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és \mathcal{H} jelölje Ω összes lehetséges részhalmazainak halmazát. Ekkor \mathcal{H} elemeit eseményeknek nevezzük. Definiáljuk az események valószínűségét a következő halmazfüggvénnyel:

$$P: \mathcal{H} \rightarrow [0, 1], \quad P(A) = \frac{\text{az } A \text{ halmaz elemeinek száma}}{6}, \quad (P(\emptyset) = 0).$$

Ekkor könnyen látható, hogy \mathcal{H} gyűrű, és P egy nemnegatív, additív halmazfüggvény.

Általánosabban, legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots\}$ az *állapottér*, ahol az $\{\omega_i\}$ halmazokat *elemi eseményeknek* nevezzük, és egy $\{\omega_i\}$ elemi esemény valószínűsége legyen p_i ($i = 1, 2, \dots$), ahol

$$p_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Legyen most is \mathcal{H} az események halmazrendszere, azaz Ω összes lehetséges részhalmazainak halmaza. Ekkor \mathcal{H} σ -gyűrű, a

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i, \quad A \in \mathcal{H}$$

függvény egy nemnegatív, σ -additív halmazfüggvény \mathcal{H} -n, $P(\Omega) = 1$ és $P(\emptyset) = 0$. A P függvényt *valószínűségi mértéknek* nevezzük, az (Ω, \mathcal{H}, P) hármast pedig *klasszikus valószínűségi mezőnek* hívjuk. □

3.33. Definíció. Azt mondjuk, hogy $E \subset \mathbb{R}^p$ *Borel-halmaz*, ha E előállítható nyílt intervallumokból kiindulva, megszámlálhatóan sok művelettel, amelyek az egyesítés, a metszet, a különbség képzés és komplementum képzés műveletek sorozatából áll.

3.34. Példa. Bármely $[a, b]$ zárt intervallum egydimenziós Borel-halmaz, hiszen

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right).$$

Hasonló módon, az egy pontból álló $\{a\}$ halmaz is Borel-halmaz, mivel

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right).$$

A végtelen ill. félig végtelen intervallumok is Borel-halmazok, mivel pl.

$$[a, \infty) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right) \right) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}, a + n \right) \right).$$

□

3.35. Állítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$. A következő állítások teljesülnek.

1. A Borel-halmazok osztálya a legszűkebb olyan σ -algebra, amely tartalmazza az \mathcal{E}^p elemi halmazokat (azaz a Borel-halmazok osztályának valódi részhalmazai már nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal).
2. Ha A megszámlálható vagy véges számosságú, akkor A Borel-halmaz.
3. Ha A nyílt halmaz, akkor A Borel-halmaz.
4. Ha A zárt halmaz, akkor A Borel-halmaz.

Bizonyítás:

1. Az állítás a Borel-halmazok definíciójából és az előbbi példában látott ötletek segítségével könnyen adódik. A részleteket nem mutatjuk meg.

2. Az állítás következik abból, hogy az egy pontból álló halmaz Borel-halmaz, és A előáll $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}$ alakban.

3. Ha A nyílt halmaz, akkor előáll megszámlálható sok nyílt intervallum uniójaként, mivel minden $a \in A$ -hoz található olyan I nyílt intervallum, amelyre $a \in I \subset A$, és I végpontjai racionális számok. Az ilyen intervallumokból a 3.7. Állítás 5. pontjából következően megszámlálható sok van, ezek uniója visszaadja A -t, így következik az állítás.

4. Az állítás abból következik, hogy ha A zárt, akkor $\mathbb{R}^p \setminus A$ nyílt halmaz, ezért Borel-halmaz, így A is az. □

3.3. Reguláris, additív, nemnegatív halmazfüggvények kiterjesztése

3.36. Definíció. Az $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_p, \beta_p)$ p -dimenziós intervallumot *nyílt intervallumnak*, az $I = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_p, \beta_p]$ p -dimenziós intervallumot pedig *zárt intervallumnak* nevezzük.

3.37. Definíció. Az \mathcal{E}^p -n értelmezett valamely $F \geq 0$ halmazfüggvényt *regulárisnak* nevezzük, ha minden $A \in \mathcal{E}^p$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $H \in \mathcal{E}^p$ zárt és $G \in \mathcal{E}^p$ nyílt halmaz, hogy

$$H \subset A \subset G \quad \text{és} \quad F(G) - \varepsilon < F(A) < F(H) + \varepsilon.$$

Ha A intervallum, akkor H és G is intervallumok.

3.38. Állítás. Az m elemi halmazok térfogata halmazfüggvény (lásd a 3.30. definíciót) reguláris.

Bizonyítás: Legyen $A \in \mathcal{E}^p$ és $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor $A = I^{(1)} \cup \dots \cup I^{(n)}$, ahol $I^{(i)} \cap I^{(j)} = \emptyset$ ($i \neq j$), és az $I^{(i)}$ p -dimenziós intervallum előállítására $I^{(i)} = I_1^{(i)} \times \dots \times I_p^{(i)}$, ahol az $I_j^{(i)}$ a (3.1) egyenletben felsorolt valamelyik típusú egydimenziós intervallum, ahol az intervallum végpontjait jelölje $\alpha_j^{(i)}$ és $\beta_j^{(i)}$. Ekkor

$$m(I^{(i)}) = \prod_{k=1}^p (\beta_k^{(i)} - \alpha_k^{(i)}).$$

Nilván minden $i = 1, \dots, n$ -re (kicsit csökkentve az $I^{(i)}$ intervallum méreteit) található olyan $\tilde{I}^{(i)}$ p -dimenziós zárt intervallum, hogy

$$\tilde{I}^{(i)} \subset I^{(i)}, \quad \tilde{I}^{(i)} \cap \tilde{I}^{(j)} = \emptyset, \quad (i \neq j), \quad \text{és} \quad m(\tilde{I}^{(i)}) > m(I^{(i)}) - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Legyen $H = \tilde{I}^{(1)} \cup \dots \cup \tilde{I}^{(n)}$. Ekkor nyilván $H \subset A$, H zárt halmaz, és

$$m(H) = \sum_{i=1}^n m(\tilde{I}^{(i)}) > \sum_{i=1}^n \left(m(I^{(i)}) - \frac{\varepsilon}{n} \right) = m(A) - \varepsilon.$$

Hasonló módon, minden $i = 1, \dots, n$ -re található olyan $\hat{I}^{(i)}$ p -dimenziós nyílt intervallum, hogy

$$I^{(i)} \subset \hat{I}^{(i)}, \quad \text{és} \quad m(\hat{I}^{(i)}) < m(I^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Megjegyezzük, hogy az $\hat{I}^{(i)}$ halmazok már nem biztos, hogy páronként diszjunktak lesznek. Legyen $G = \hat{I}^{(1)} \cup \dots \cup \hat{I}^{(n)}$. Ekkor $A \subset G$, G nyílt halmaz, és a 3.20. Állítás 5. pontja szerint

$$m(G) = m\left(\bigcup_{i=1}^n \hat{I}^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^n m(\hat{I}^{(i)}) < \sum_{i=1}^n \left(m(I^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{n} \right) = m(A) + \varepsilon.$$

□

Egy reguláris halmazfüggvény tehát bizonyos értelemben az m halmazfüggvény általánosításának tekinthető. A következő példában megadunk egy az m függvénytől eltérő reguláris halmazfüggvényt.

3.39. Példa. Legyen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy rögzített monoton növekvő függvény. Defináljuk a μ_g függvényt az egydimenziós intervallumokra a következő módon:

$$\begin{aligned} \mu_g(\emptyset) &= 0, \\ \mu_g([\alpha, \beta)) &= g(\beta-) - g(\alpha-), \\ \mu_g([\alpha, \beta]) &= g(\beta+) - g(\alpha-), \\ \mu_g((\alpha, \beta]) &= g(\beta+) - g(\alpha+), \\ \mu_g((\alpha, \beta)) &= g(\beta-) - g(\alpha+). \end{aligned}$$

Ezután μ_g -t a 3.30. Definícióhoz hasonló módon egyértelműen kiterjeszthetjük \mathcal{E}^1 -re, azaz az egydimenziós elemi halmazokra. Világos, hogy μ_g egy nemnegatív és additív halmazfüggvény \mathcal{E}^1 -n. Ha g folytonos, akkor $\mu_g([\alpha, \beta)) = \mu_g([\alpha, \beta]) = \mu_g((\alpha, \beta]) = \mu_g((\alpha, \beta)) = g(\beta) - g(\alpha)$, és ekkor μ_g reguláris is. Másrészt, ha g olyan monoton növekvő függvény, amely nem folytonos egy α pontban, akkor $\mu_g(\{\alpha\}) > 0$. □

Megmutatjuk, hogy minden reguláris halmazfüggvény kiterjeszhető egy az elemi halmazokat tartalmazó σ -gyűrűre úgy, hogy a kiterjesztés σ -additív legyen. Szükségünk lesz a következő fogalmakra.

3.40. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^p$ adott halmaz. Az $\mathcal{U} = \{U_\gamma \subset \mathbb{R}^p : \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszer az E lefedése, ha

$$E \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma.$$

Ha minden U_γ nyílt intervallum, akkor \mathcal{U} -t *nyílt lefedésnek* hívjuk. Ha a Γ indexhalmaz megszámlálható, akkor azt mondjuk, hogy \mathcal{U} megszámlálható lefedése E -nek, ha pedig Γ véges halmaz, akkor \mathcal{U} -t *véges lefedésnek* nevezzük.

3.41. Definíció. Egy A halmazt *kompaktnak* hívunk, ha bármely nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedése is.

Az analízisben alapvető fontosságú a következő állítás.

3.42. Tétel. *Egy $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

3.43. Definíció. Legyen μ egy additív, reguláris, nemnegatív és véges halmazfüggvény \mathcal{E}^p -n. Ekkor a μ által generált *külső mértéken* a

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \text{ } p\text{-dimenziós nyílt intervallum, } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \quad E \subset \mathbb{R}^p$$

halmazfüggvényt értjük, ahol az infimumot az E összes lehetséges megszámlálható, nyílt intervallumokkal történő $\{A_n\}_{n \geq 1}$ lefedéseire kell venni.

A külső mérték tehát az \mathbb{R}^p tér bármely részalmazán definiált, értéke lehet $+\infty$ is.

3.44. Állítás. μ^* egy nemnegatív monoton halmazfüggvény, azaz minden $E_1 \subset E_2$ -re

$$0 \leq \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2).$$

Bizonyítás: Az állítás abból következik, hogy E_2 bármely megszámlálható lefedése egyben az E_1 halmaznak is megszámlálható lefedése, így $\mu^*(E_1)$ kiszámításakor bővebb halmaznak kell az infimumát venni, mint $\mu^*(E_2)$ -nél. \square

3.45. Példa. Tekintsük az m által generált m^* egydimenziós külső mértéket. Megmutatjuk, hogy a racionális számok \mathbb{Q} halmazának külső mértéke nulla, azaz $m^*(\mathbb{Q}) = 0$. A 3.8. Példa szerint \mathbb{Q} elemei egy r_1, r_2, \dots sorozatba rendezhetők. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és definiáljuk az

$$A_i = \left(r_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right)$$

nyílt intervallumokat $i = 1, 2, \dots$ -re. Ekkor nyilván $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ nyílt lefedése \mathbb{Q} -nak, és

$$m^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $m^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Ehhez hasonló módon be lehet látni, hogy bármely megszámlálható $E \subset \mathbb{R}^p$ halmaz m^* külső mértéke mindig nulla. \square

3.46. Definíció. Legyen F egy halmazfüggvény, amely \mathbb{R}^p összes részhalmazán értelmezve van. Ekkor F -et *szubadditív* halmazfüggvénynek nevezzük, ha

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n).$$

3.47. Tétel. Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény \mathcal{E}^p -n, μ^* az általa generált külső mérték \mathbb{R}^p -n. Ekkor

1. μ^* a μ kiterjesztése, azaz minden $A \in \mathcal{E}^p$ -re $\mu^*(A) = \mu(A)$;
2. μ^* egy szubadditív halmazfüggvény.

Bizonyítás:

1. Legyen $A \in \mathcal{E}^p$ tetszőleges rögzített halmaz. Ekkor legyen $A = I_1 \cup \dots \cup I_n$, ahol I_1, \dots, I_n páronként diszjunkt p -dimenziós intervallumok. Ekkor μ additivitása miatt

$$\mu(A) = \mu(I_1) + \dots + \mu(I_n).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel μ reguláris, ezért minden $i = 1, \dots, n$ -re létezik olyan J_i p -dimenziós nyílt intervallum, hogy

$$I_i \subset J_i, \quad \mu(I_i) \leq \mu(J_i) < \mu(I_i) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Másrészt a μ^* definíciója szerint

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(J_i) < \sum_{i=1}^n \left(\mu(I_i) + \frac{\varepsilon}{n} \right),$$

amiből

$$\mu^*(A) < \mu(A) + \varepsilon \tag{3.2}$$

adódik. Másrészt ugyancsak a μ^* definíciója alapján van olyan nyílt intervallumokból álló (A_n) sorozat, hogy $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon. \tag{3.3}$$

A μ mérték reguláris, ezért A tartalmaz olyan F zárt elemi halmazt, amelyre $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$. Mivel F korlátos és zárt, ezért a 3.47. Tétel alapján az $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés is, azaz léteznek olyan k_1, \dots, k_N indexek, hogy

$$F \subset A_{k_1} \cup \dots \cup A_{k_N}.$$

Tehát a 3.20. Állítás 5. pontja és (3.3) alapján

$$\mu(A) < \mu(F) + \varepsilon \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_{k_n}\right) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_{k_n}) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon < \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Megmutattuk tehát, hogy

$$\mu^*(A) - \varepsilon < \mu(A) < \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

minden rögzített pozitív ε -ra. Ha most $\varepsilon \rightarrow 0+$, akkor

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) \leq \mu^*(A)$$

adódik, és ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mu(A) = \mu^*(A)$ minden $A \in \mathcal{E}^p$ -re.

2. Legyen $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ és tegyük fel, hogy $\mu^*(E_n) < \infty$ minden $n \geq 1$ -re. Ellenkező esetben nincs mit bizonyítanunk, ugyanis a szubadditivitás triviálisan teljesül.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor μ^* definíciója alapján van az E_n halmaznak olyan elemi nyílt intervallumokból álló $\{A_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ lefedése, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leq \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Ekkor

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \right).$$

Másrészt $\mu^*(E)$ a definíció szerint a lehetséges lefedések által generált összegek infimuma, ezért

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \right).$$

Ez az egyenlőtlenség összevetve a (3.4) becsléssel azt jelenti, hogy

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

minden $\varepsilon > 0$ -ra. Ha most $\varepsilon \rightarrow 0+$, akkor a kívánt

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

egyenlőtlenséget kapjuk és ezzel a tétel bizonyítása teljes. □

3.48. Definíció. Tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}^p$ halmazok *szimmetrikus differenciáját* $A \triangle B$ -vel jelöljük és az

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

képlettel definiáljuk.

Könnyen ellenőrizhetők a szimmetrikus különbség halmazművelet alábbi tulajdonságai:

3.49. Állítás. Legyen $A, B, C, A_1, A_2, B_1, B_2 \subset X$ tetszőleges. Ekkor

1. $A \triangle B = \emptyset$, akkor és csak akkor, ha $A = B$,
2. $A \triangle B = B \triangle A$,
3. $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$,

4. $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$,
5. $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$,
6. $(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

3.50. Definíció. Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény \mathcal{E}^p -n, μ^* az általa generált külső mérték \mathbb{R}^p -n. Az A és B halmazok μ által generált „távolságot” $d(A, B)$ -vel jelöljük és definíciója:

$$d(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^*(A \triangle B).$$

Azt mondjuk, hogy az (A_n) halmzsorozat konvergál A -hoz ($A_n \rightarrow A$), ha

$$d(A_n, A) = \mu^*(A_n \triangle A) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

3.51. Állítás. Legyen $A, B, C, A_1, A_2, A_n, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^p$. Ekkor

1. $d(A, B) = 0$, akkor és csak akkor, ha $\mu^*(A \setminus B) = 0$ és $\mu^*(B \setminus A) = 0$;
2. $d(A, B) = d(B, A)$;
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$;
4. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$.
5. Legyen $A_n \rightarrow A$. Ekkor $\mu^*(A_n) \rightarrow \mu^*(A)$.
6. $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.
7. $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.
8. $d(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.

Bizonyítás:

1. A μ^* szubadditivitásából és az $A \triangle B$ definíciójából következik.
2. A 3.49. Állítás 2. pontjából rögtön következik.
3. A 3.49. Állítás 3. pontja, valamint μ^* monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) \leq \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B).$$

4. Az előbbihez hasonló módon $\mu^*(A) \leq \mu^*(B \cup (A \triangle B)) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$, és ugyanígy $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B)$ is teljesül, amiből következik az állítás.

5. A 4. pont következménye.

6. A 3.49. Állítás 4. pontját, valamint μ^* monotonitását és szubadditivitását felhasználva teljesül. A 7. és 8. pontok bizonyítása hasonló. \square

Megjegyezzük, hogy d nem távolság az 5.80. Definíció értelmében (lásd az 5.7. szakaszt), hiszen, a 3.51. Állítás 1. pontja szerint $d(A, B)$ lehet 0 akkor is, ha A és B nem azonos. Az 5.80. Definíció többi pontja viszont teljesül. Ennek következtében a konvergencia fenti definíciója szerint egy konvergens halmzsorozat határértéke nem egyértelmű: Például, ha $A_n \rightarrow A$, és ha B és A egy olyan pontban különbözik egymástól, amelynek külső mértéke nulla, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy $A_n \rightarrow B$ is teljesül.

3.52. Definíció. Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény \mathcal{E}^p -n, μ^* az általa generált külső mérték \mathbb{R}^p -n. Ha az $A \subset \mathbb{R}^p$ halmazhoz van olyan elemi halmazokból álló (A_n) sorozat, amelyre $A_n \rightarrow A$, akkor azt mondjuk, hogy A végesen μ -mérhető. A végesen μ -mérhető halmazok osztályát $\mathcal{M}_F(\mu)$ jelöli.

3.53. Tétel. Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény \mathcal{E}^p -n, μ^* az általa generált külső mérték \mathbb{R}^p -n, $\mathcal{M}_F(\mu)$ a végesen μ -mérhető halmazok osztálya. Ekkor $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrű \mathbb{R}^p -n és μ^* az $\mathcal{M}_F(\mu)$ -n értelmezett additív nemnegatív halmazfüggvény.

Bizonyítás: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Ekkor léteznek olyan elemi halmazokból álló (A_n) és (B_n) halmzsorozatokat, hogy $A_n \rightarrow A$ és $B_n \rightarrow B$. A 3.51. Állítás 6. pontja alapján

$$d(A \cup B, A_n \cup B_n) \leq d(A, A_n) + d(B, B_n) \rightarrow 0,$$

és mivel $A_n \cup B_n$ elemi halmaz, ezért $A \cup B \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

A 3.51. Állítás 8. pontja miatt

$$d(A \setminus B, A_n \setminus B_n) \leq d(A, A_n) + d(B, B_n).$$

Ezért $A_n \setminus B_n \rightarrow A \setminus B$, és így $A \setminus B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Beláttuk tehát, hogy $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrű.

Megmutatjuk, hogy μ^* additív $\mathcal{M}_F(\mu)$ -n. Legyen $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ diszjunkt halmazok, és legyen $A_n \rightarrow A$ és $B_n \rightarrow B$, ahol A_n és B_n elemi halmazok. Ekkor

$$A_n \cup B_n = (A_n \setminus B_n) \cup (B_n \setminus A_n) \cup (A_n \cap B_n),$$

és az utóbbi három halmaz páronként diszjunkt. Mivel az elemi halmazokon $\mu^* = \mu$, és μ additív, ezért

$$\mu^*(A_n \cup B_n) = \mu^*(A_n \setminus B_n) + \mu^*(B_n \setminus A_n) + \mu^*(A_n \cap B_n) = \mu^*(A_n) + \mu^*(B_n) - \mu^*(A_n \cap B_n).$$

Mivel $A \cap B = \emptyset$, ezért $A_n \cap B_n = (A \cap B) \Delta (A_n \cap B_n)$, és így a 3.49. Állítás 5. pontját és μ^* monotonitását felhasználva

$$\mu^*(A_n \cap B_n) = \mu^*((A \cap B) \Delta (A_n \cap B_n)) \leq \mu^*((A \Delta A_n) \cup (B \Delta B_n)) \leq \mu^*(A \Delta A_n) + \mu^*(B \Delta B_n) \rightarrow 0.$$

Ezért

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cup B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n \cup B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu^*(A_n) + \mu^*(B_n) - \mu^*(A_n \cap B_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(B_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n \cap B_n) \\ &= \mu^*(A) + \mu^*(B), \end{aligned}$$

azaz μ^* additív $\mathcal{M}_F(\mu)$ -n. □

3.54. Megjegyzés. Az $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrű általában nem σ -gyűrű. Ehhez tekintsük \mathbb{R} -en az m halmazfüggvényt és az $\mathcal{M}_F(m)$ gyűrűt. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_F(m)$. Ekkor létezik olyan E elemi halmaz, hogy $m^*(\mathbb{R} \Delta E) < \infty$. Viszont $\mathbb{R} \Delta E = \mathbb{R} \setminus E$, ezért

$$m^*(\mathbb{R}) = m^*(E \cup (\mathbb{R} \setminus E)) \leq m^*(E) + m^*(\mathbb{R} \setminus E) < \infty,$$

ami ellentmond annak, hogy $m^*(\mathbb{R}) \geq m^*([-n, n]) = 2n$ tetszőleges n -re. Ezért $\mathbb{R} \notin \mathcal{M}_F(m)$. Másrészt $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ és $(-n, n) \in \mathcal{M}_F(m)$.

A következő eredmény szerint μ^* σ -additív az $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrűn (amely az előző példa szerint nem σ -gyűrű).

3.55. Tétel. Az μ^* külső mérték σ -additív az $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrűn.

Bizonyítás: Legyen $A_i \in \mathcal{M}_F(\mu)$ ($i = 1, 2, \dots$) páronként diszjunkt, legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, és tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Mivel μ^* szubadditív, ezért

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Megmutatjuk, hogy a fordított egyenlőtlenség is teljesül. μ^* monotonitása miatt, és mivel μ^* additív $\mathcal{M}_F(\mu)$ -n, ezért minden n -re

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i),$$

tehát

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

azaz μ^* σ -additív $\mathcal{M}_F(\mu)$ -n. □

A következő tétel szerint $\mathcal{M}_F(\mu)$ zárt a halmazok határtéréke műveletre.

3.56. Tétel. Legyen (A_n) olyan sorozat, amelyre $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ minden n -re, és $A_n \rightarrow A$. Ekkor $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan N , hogy

$$d(A, A_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $A_N \in \mathcal{M}_F(\mu)$, ezért létezik olyan $E_N \in \mathcal{E}^p$ elemi halmaz, hogy

$$d(A_N, E_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De ekkor a 3.51. Állítás 3. pontját felhasználva

$$d(A, E_N) \leq d(A, A_N) + d(A_N, E_N) < \varepsilon,$$

amiből következik, hogy $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. □

3.57. Definíció. Ha $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, ahol B_n végesen μ -mérhető minden n -re, akkor A -t μ -mérhetőnek nevezzük. A μ -mérhető halmazok osztályát $\mathcal{M}(\mu)$ jelöli.

A következő tétel szerint a μ -mérhető halmazok között pontosan az $\mathcal{M}_F(\mu)$ halmazhoz tartozóknak véges a μ^* külső mértéke.

3.58. Tétel. $\mathcal{M}_F(\mu) = \{A \in \mathcal{M}(\mu) : \mu^*(A) < \infty\}$

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $E \in \mathcal{E}^p$, hogy $\mu^*(A \triangle E) < \varepsilon$. De ekkor $A \subset E \cup (A \triangle E)$, ezért μ^* szubadditivitása miatt

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A \triangle E) < \infty.$$

Most fordítva, tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{M}(\mu)$ és $\mu^*(A) < \infty$. Legyen $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ahol $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Legyen $B_1 = A_1$, és $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$, $n = 2, 3, \dots$. Ekkor

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

és a B_1, B_2, \dots halmazok páronként diszjunkt végesen μ -mérhető halmazok. Mivel $\bigcup_{n=1}^m B_n \subset A$, \mathcal{M}_F zárt a véges unióra, és μ^* additív az \mathcal{M}_F gyűrűn, ezért

$$\sum_{n=1}^m \mu^*(B_n) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^m B_n\right) \leq \mu^*(A).$$

A fenti becslés minden m -re teljesül, így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \infty.$$

Legyen $C_N = \bigcup_{n=1}^N B_n$. Ekkor $C_N \in \mathcal{M}_F(\mu)$, és

$$d(A, C_N) = \mu^*(A \Delta C_N) = \mu^*\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(B_n) \rightarrow 0, \quad \text{ha } N \rightarrow \infty.$$

Ezért a 3.56. Tételből következik, hogy $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. □

Most már kimondhatjuk ennek a szakasznak a fő tételét:

3.59. Tétel. *Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény \mathcal{E}^p -n, μ^* az általa generált külső mérték \mathbb{R}^p -n, $\mathcal{M}(\mu)$ a μ -mérhető halmazok osztálya. Ekkor $\mathcal{M}(\mu)$ σ -algebra \mathbb{R}^p -n és μ^* az $\mathcal{M}(\mu)$ -n értelmezett mérték.*

Bizonyítás: 1. Legyen $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ ($i = 1, 2, \dots$), és legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ekkor minden i -re léteznek olyan $A_{ij} \in \mathcal{M}_F(\mu)$ halmazok, hogy $A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$. De ekkor $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$, és mivel az unió megszámlálható, ezért $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{M}(\mu)$ σ -gyűrű.

2. Most azt indokoljuk, hogy $\mathcal{M}(\mu)$ zárt a különbség képzésre. Legyen $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$. Ekkor léteznek olyan $A_i, B_i \in \mathcal{M}_F(\mu)$ halmazok, hogy $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ és $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. De ekkor

$$A \setminus B = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus B).$$

Megmutatjuk, hogy $A_i \setminus B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ minden i -re, amiből következik, hogy $A \setminus B \in \mathcal{M}(\mu)$. Legyen

$$C_{i1} = A_i \cap B_1, \quad C_{ij} = A_i \cap \left(B_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} B_k\right), \quad j = 2, 3, \dots$$

Ekkor $C_{ij} \subset A_i$ minden j -re, a $C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}, \dots$ halmazok páronként diszjunktak, és

$$A_i \setminus B = A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}\right).$$

Legyen $N \geq 1$ tetszőleges. Mivel

$$(A_i \setminus B) \Delta \left(A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N C_{ij}\right)\right) = \bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij},$$

ezért

$$d\left(A_i \setminus B, A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N C_{ij}\right)\right) = \mu^*\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij}\right).$$

Másrészt

$$\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij} \subset A_i,$$

és így

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij}\right) \leq \mu^*(A_i) < \infty,$$

ezért a 3.58. Tétel szerint $\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij} \in \mathcal{M}_F(\mu)$, tehát a 3.55. Tételt alkalmazva

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij}\right) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu^*(C_{ij}) < \infty.$$

Ebből viszont következik, hogy

$$d\left(A_i \setminus B, A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N C_{ij}\right)\right) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu^*(C_{ij}) \rightarrow 0, \quad \text{ha } N \rightarrow \infty,$$

így a 3.56. Tétel szerint $A_i \setminus B \in \mathcal{M}_F(\mu)$, hiszen $A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N C_{ij}\right) \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

3. Másrészt $\mathbb{R}^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] \times \cdots \times [-n, n]$, ezért $\mathbb{R}^p \in \mathcal{M}(\mu)$, azaz $\mathcal{M}(\mu)$ σ -algebra.

4. Megmutatjuk, hogy μ^* σ -additív. Legyen $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ ($i = 1, 2, \dots$) páronként diszjunkt, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ha $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$, akkor a 3.58. Tétel szerint $\mu^*(A) < \infty$, de ekkor $\mu^*(A_i) \leq \mu^*(A) < \infty$, és így $A_i \in \mathcal{M}_F(\mu)$ minden i -re. De ekkor

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \tag{3.5}$$

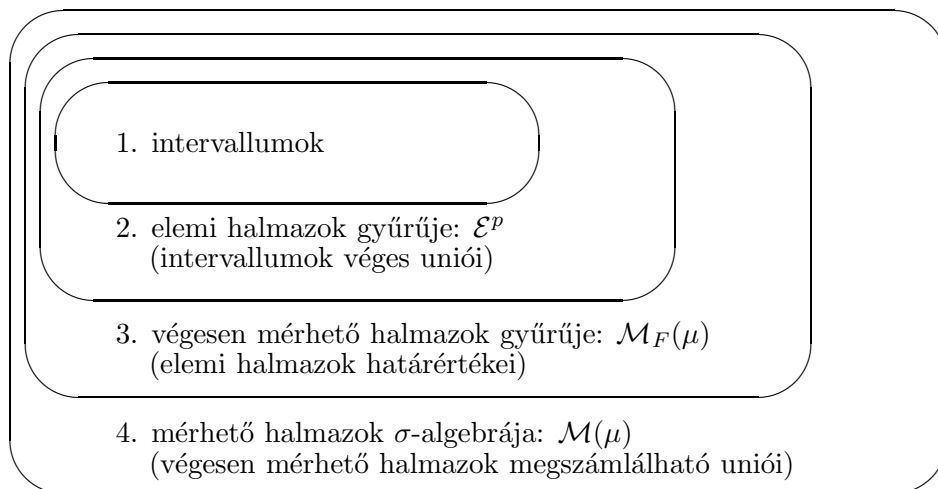
következik a 3.55. Tételből. Ha $A \notin \mathcal{M}_F(\mu)$, akkor a 3.58. Tétel szerint $\mu^*(A) = \infty$. Ezért μ^* szubadditívítása miatt

$$\infty = \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

így (3.5) most is teljesül. □

3.60. Megjegyzés. Ebben a szakaszban kiindulva az elemi halmazokon értelmezett μ halmazfüggvényből, vettük az általa generált μ^* külső mértéket, amelyet a $\mathcal{M}(\mu)$ σ -algebrára megszorítva mértéket kaptunk. Ezt a mértéket is μ -vel jelöljük, ezzel is hangsúlyozva azt, hogy ez a μ halmazfüggvény kiterjesztése.

A mérhető halmazok körét a következő lépésekben bővítettük ki egyre bővebb halmazrendszerekre:



3.4. A Lebesgue-mérték

3.61. Definíció. Az m (p -dimenziós elemi halmazok térfogata) halmazfüggvény kitejesztését az $\mathcal{M}(m)$ σ -algebrára p -dimenziós *Lebesgue-mértéknek* nevezzük, és az $\mathcal{M}(m)$ σ -algebra elemeit *Lebesgue-mérhető* halmazoknak nevezzük.

3.62. Definíció. Az $E \subset \mathbb{R}^p$ halmazt *μ -nullmértékű*, ill. a $\mu = m$ esetben egyszerűen csak *nullmértékű* halmaznak nevezzük, ha $\mu^*(E) = 0$.

A μ^* definíciójából következik:

3.63. Állítás. Egy $E \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *μ -nullmértékű* akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz léteznek olyan $\{I_1, I_2, \dots\}$ nyílt intervallumok, hogy

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i) < \varepsilon.$$

A következő állítás segítséget nyújt annak elképzeléséhez, hogy milyen halmazok Lebesgue-mérhetőek.

3.64. Állítás. Legyen m a Lebesgue-mérték \mathbb{R}^p -n, $\mathcal{M}(m)$ a p -dimenziós Lebesgue-mérhető halmazok σ -algebrája. Ekkor:

1. Minden véges és megszámlálható halmaz Lebesgue-mérhető és mértéke 0.
2. Ha A Borel-halmaz, akkor $A \in \mathcal{M}(m)$, azaz A Lebesgue-mérhető.
3. Minden nullmértékű halmaz Lebesgue-mérhető, azaz ha $m^*(A) = 0$, akkor $A \in \mathcal{M}(m)$.
4. Ha A Lebesgue-mérhető és B nullmértékű halmaz, akkor $A \cup B$ is Lebesgue-mérhető.

5. Ha $A \in \mathcal{M}(m)$ és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan zárt H és nyílt G halmaz, amelyre

$$H \subset A \subset G \quad \text{és} \quad m(G \setminus A) < \varepsilon, \quad m(A \setminus H) < \varepsilon.$$

6. Ha $A \in \mathcal{M}(m)$, akkor léteznek olyan H és G Borel-halmazok, hogy

$$H \subset A \subset G \quad \text{és} \quad m(G \setminus A) = m(A \setminus H) = 0.$$

7. Ha A Lebesgue-mérhető, akkor minden $b \in \mathbb{R}^p$ -re az $A + b \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \in \mathbb{R}^p : a \in A\}$ halmaz is Lebesgue-mérhető és $m(A) = m(A + b)$ (azaz a Lebesgue-mérték invariáns az eltolásra).

Bizonyítás: 1. Legyen $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, és

$$E_n = \left(a_1 - \frac{1}{n}, a_1 + \frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(a_p - \frac{1}{n}, a_p + \frac{1}{n}\right).$$

Ekkor E_n p -dimenziós nyílt intervallum, amelyre $m(E_n) = (2/n)^p$. Ezért

$$d(\{a\}, E_n) = m^*(\{a\} \triangle E_n) \leq m(E_n) \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

azaz $\{a\} \in \mathcal{M}_F(m) \subset \mathcal{M}(m)$ és $m(\{a\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 0$.

Ha A megszámlálható, akkor elemeit rendezzük egy (a_n) sorozatba. Ekkor $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$, ezért $A \in \mathcal{M}(m)$. Másrészt

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\{a_n\}) = 0.$$

2. Az állítás a 3.35. Állítás 1. pontjából következik.

3. Legyen A olyan, hogy $m^*(A) = 0$. Mivel $\emptyset \in \mathcal{E}^p$, ezért

$$d(A, \emptyset) = m^*(A \triangle \emptyset) = m^*(A) = 0,$$

és így $A \in \mathcal{M}_F(m)$.

4. A 3. pont szerint B Lebesgue-mérhető, ezért $A \cup B$ is az.

5. Tegyük fel először, hogy $A \in \mathcal{M}_F(m)$, azaz $m^*(A) < \infty$, és rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -t. A külső mérték definíciója szerint léteznek olyan I_1, I_2, \dots nyílt p -dimenziós intervallumok, hogy

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Legyen $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Ekkor G nyílt halmaz,

$$A \subset G \quad \text{és} \quad m^*(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Ekkor, használva, hogy $m = m^*$ a Lebesgue-mérhető halmazokon, következik az állítás.

Legyen ezután $A \in \mathcal{M}(m)$, és $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, ahol $A_i \in \mathcal{M}_F(m)$ minden i -re. Ekkor az előző eredmény miatt minden i -re létezik olyan G_i nyílt halmaz, hogy

$$A_i \subset G_i \quad \text{és} \quad m(G_i \setminus A_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Legyen $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Ekkor G nyílt halmaz,

$$A \subset G \quad \text{és} \quad m(G \setminus A) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \setminus A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i \setminus A_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

A zárt halmazokra vonatkozó állítást visszavezethetjük a nyílt halmazokra igazolt eredményre: Legyen $A \in \mathcal{M}(m)$. Ekkor $\bar{A} \in \mathcal{M}(m)$, ezért az előbbi eredmény szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan G nyílt halmaz, hogy

$$\bar{A} \subset G \quad \text{és} \quad m(G \setminus \bar{A}) < \varepsilon.$$

Legyen $H = \bar{G}$. Ekkor H zárt halmaz,

$$H \subset A \quad \text{és} \quad m(A \setminus H) = m(G \setminus \bar{A}) < \varepsilon.$$

6. Az 5. pont szerint minden n -re léteznek olyan G_n nyílt és H_n zárt halmazok, hogy

$$H_n \subset A \subset G_n \quad \text{és} \quad m(A \setminus H_n) < \frac{1}{n}, \quad m(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}.$$

Legyen

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \quad \text{és} \quad G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Ekkor H és G Borel-halmazok, amelyekre teljesül az állítás.

7. Az állítás intervallumokra nyilván teljesül. Ezután lépésenként megmutatható, hogy elemi halmazokra, végesen mérhető és végül a mérhető halmazokra is teljesül az eltolásra vonatkozó invariancia. A részleteket itt elhagyjuk. \square

3.65. Megjegyzés. Az előbbi állítás 2., 4. és 6. pontja szerint tehát a Lebesgue-mérhető halmazok és a Borel-halmazok nullmértékű halmazokban térnek el egymástól.

Az előbbi állítás szerint minden megszámlálható halmaz Lebesgue-mérhető (és mértéke 0). Most megmutatjuk, hogy létezik olyan nullmértékű végtelen halmaz, amely nem megszámlálható számosságú.

3.66. Példa. Az $E_0 = [0, 1]$ intervallumból kiindulva definiálunk egy (E_n) halmzsorozatot: Legyen $E_1 = E_0 \setminus (1/3, 2/3)$. Ekkor E_1 két, $1/3$ hosszú zárt intervallum uniója. Ezután hagyjuk el E_1 -ből is a két intervallum középső harmadát: legyen $E_2 = E_1 \setminus \left((1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \right)$. Ekkor E_2 4 db $1/9$ hosszú zárt intervallum uniója. Ezután újra mindegyik intervallum középső (nyílt) harmadát elhagyva kapjuk E_3 -at, amely 8 db $1/27$ hosszú zárt intervallum uniója lesz. Így definiáljuk az E_n halmzsorozatot, amelyben E_n 2^n db $1/3^n$ hosszú zárt intervallum uniója lesz. Nyilván E_n Lebesgue-mérhető, és $m(E_n) = (2/3)^n$. Definiáljuk a $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ halmazt, amelyet *Cantor-halmaznak* nevezünk. Ennek legfontosabb tulajdonságai:

1. C Borel-halmaz.
2. C mérhető és nullmértékű halmaz.
3. C zárt halmaz.
4. C kontinuum számosságú.

Az 1. tulajdonság nyilvánvaló a Cantor-halmaz definíciójából. Mivel C Borel-halmaz, ezért mérhető is (amit a definíciójából is nyilván láthatunk). Jelölje F_n az E_n komplementerét a $[0, 1]$ intervallumra, azaz $F_n = [0, 1] \setminus E_n$. Mivel $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, ezért $F_1 \subset F_2 \subset \dots$. De ekkor a 3.24. Tétel szerint

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n),$$

és ezért

$$\begin{aligned} m(C) &= m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} ([0, 1] \setminus F_n)\right) = m\left([0, 1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right) = 1 - m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} m([0, 1] \setminus E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 0. \end{aligned}$$

Ezzel a 2. állítást is beláttuk. A 3. állítás következik abból, hogy végtelen sok zárt halmaz metszete is zárt halmaz.

A 4. tulajdonság vázlatos indoklása a következő: Úgy mint a tízes számrendszerben (lásd a 3.6. Példát), a hármas számrendszerben is felírhatunk minden $x \in [0, 1]$ számot az

$$x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots)_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots \quad (3.6)$$

végtelen tört alakban, ahol $x_i \in \{0, 1, 2\}$. Akár a tízes számrendszerben, itt is vannak olyan számok, amelyeket felírhatunk véges sok (nem nulla) tört jeggyel és végtelen sok tört jeggyel is. Például $(0,1)_3 = (0,02222\dots)_3$. Ilyen esetekben mindig vegyük a végtelen tört jeggyel felírható alakját a számnak. Ekkor egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adtunk a $[0, 1]$ intervallum pontjai és a (3.6) alakú végtelen törtek között. Az E_1 halmaz definíciójából következik, hogy pontosan azok a $[0, 1]$ -beli számok nem tartoznak E_1 -hez, amelyek (3.6) előállításában $x_1 = 1$, azaz az E_1 -beli számokra $x_1 = 0$ vagy 2 . Hasonlóan, azokat a számokat hagyjuk el E_1 -ből az E_2 generálásakor, amelyekre $x_2 = 1$. Megmutatható tehát, hogy azon $[0, 1]$ -beli számok tartoznak a Cantor-halmazhoz, amelyekre (3.6)-ben $x_i = 0$ vagy 2 minden i -re. Megadunk most egy kölcsönösen egyértelmű leképezést C és $[0, 1]$ között: az $x \in C$ számhoz rendeljük hozzá azt a kettes számrendszerben felírt $y = (0, y_1 y_2 y_3 \dots)_2$ számot, amelyre $y_i = 0$, ha $x_i = 0$ és $y_i = 1$ ha $x_i = 2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez egy kölcsönösen egyértelmű leképezés lesz, azaz C számossága megegyezik $[0, 1]$ számosságával, azaz kontinuum számosságú. \square

A következő példában megmutatjuk, hogy nem minden \mathbb{R}^p -beli halmaz Lebesgue-mérhető, azaz a hossz, terület ill. térfogat fogalmát nem lehet természetes módon kiterjeszteni az összes \mathbb{R} -beli, síkbeli ill. térbeli halmazra.

3.67. Példa. Megmutatjuk, hogy létezik olyan részhalmaza a $[0, 1)$ intervallumnak, amely nem Lebesgue-mérhető.

Vezessük be $[0, 1)$ -en az összeadás modulo 1 műveletet: legyen tetszőleges $x, y \in [0, 1)$ -re

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y, & \text{ha } x + y < 1, \\ x + y - 1, & \text{ha } x + y \geq 1. \end{cases}$$

$E \subset [0, 1)$ -re jelölje $E \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \oplus y \in [0, 1) : x \in E\}$. Legyen $E \subset [0, 1)$ mérhető, $y \in [0, 1)$, és definiáljuk az

$$E_1 = E \cap [0, 1 - y) \quad \text{és} \quad E_2 = E \cap [1 - y, 1)$$

halmazokat. Ekkor $E = E_1 \cup E_2$, E_1 és E_2 diszjunkt és mérhető, így $m(E) = m(E_1) + m(E_2)$. Mivel $E_1 \oplus y = E_1 + y$ és $E_2 \oplus y = E_2 + (y - 1)$ és mivel a Lebesgue-mérték eltolás invariáns (3.64. Állítás 7. pont), ezért $E_1 \oplus y$ és $E_2 \oplus y$ is mérhető és diszjunkt halmazok, és $m(E_1) = m(E_1 \oplus y)$, $m(E_2) = m(E_2 \oplus y)$. Másrészt $E \oplus y = (E_1 \oplus y) \cup (E_2 \oplus y)$, így $E \oplus y$ is mérhető, továbbá

$$m(E \oplus y) = m(E_1 \oplus y) + m(E_2 \oplus y) = m(E_1) + m(E_2) = m(E).$$

Vezessük be a következő ekvivalenciarelációt. Jelölje $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Q}$. Ennek segítségével ekvivalenciaosztályokra bontjuk a $[0, 1)$ halmazt: egy osztályba azok a számok tartoznak, amelyek ekvivalensek, azaz különbségük egy racionális szám. Legyen $P \subset [0, 1)$ olyan halmaz, amely

minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy számot tartalmaz. Indirekt bizonyítással megmutatjuk, hogy a P halmaz nem Lebesgue-mérhető. Tegyük fel tehát, hogy P Lebesgue-mérhető. Legyen r_1, r_2, \dots a racionális számok egy sorozatba rendezése, és tekintsük a $P_i = P \oplus r_i$ halmazokat ($i = 1, 2, \dots$). Legyen $x \in P_i \cap P_j$ valamely $i \neq j$ -re. Ekkor $x = p_i + r_i = p_j + r_j$ alakú, ahol $p_i \in P_i, p_j \in P_j$, amiből következik, hogy $p_i - p_j = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$, ami ellentmond annak, hogy P minden ekvivalenciaosztályból csak egy elemet tartalmaz. Ezért a P_1, P_2, \dots halmazok páronként diszjunktak. De mivel $[0, 1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, ezért

$$1 = m([0, 1)) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P),$$

ami ellentmondás. Ezért P nem lehet Lebesgue-mérhető. \square

3.5. Mértékterek

A 3.3. szakaszban a p -dimenziós vektortér elemi halmazai gyűrűjén megadott μ nemnegatív, additív, reguláris halmazfüggvényeit terjesztettük ki az $\mathcal{M}(\mu)$ σ -algebrára úgy, hogy a kiterjesztett függvény mérték legyen $\mathcal{M}(\mu)$ -n. Az ilyen mértékeknek a legfontosabb példája a Lebesgue-mérték volt. Más kiindulási feltételekkel (pl. nem az \mathbb{R}^p tér részhalmazain megadott halmazfüggvényből, vagy például nem reguláris halmazfüggvényből kiindulva) is lehet az alaphalmaz valamely σ -algebrájára kiterjesztve mértékeket definiálni, illetve bizonyos esetekben direkt módon is meg tudunk adni egy σ -algebrát és azon egy σ -additív halmazfüggvényt (lásd pl. a 3.32. Példát). Ezért tekintsük a következő definíciót.

3.68. Definíció. Legyen X tetszőleges halmaz, \mathcal{M} az X részhalmazából álló σ -algebra és μ az \mathcal{M} -n értelmezett nemnegatív σ -additív halmazfüggvény. Ekkor az (X, \mathcal{M}, μ) hármast *mértéktérnek* nevezzük, és az \mathcal{M} halmaz elemeit *mérhető halmazoknak* nevezzük.

A következőkben arra adunk egyszerű példákat, hogy tetszőleges halmazon definiálhatunk mértékteret.

3.69. Példa. Legyen X egy tetszőleges halmaz, \mathcal{M} az X összes részhalmazainak halmaza és legyen tetszőleges véges $A \subset X$ esetén $\mu(A) =$ az A elemeinek a száma, ha pedig A végtelen számosságú halmaz, akkor legyen $\mu(A) = \infty$. Ekkor ellenőrizhető direkt módon, hogy μ mérték (az ú.n. *számosság mérték*), és így (X, \mathcal{M}, μ) mértéktér. \square

3.70. Példa. Legyen X egy tetszőleges halmaz, $x_0 \in X$ rögzített. Legyen \mathcal{M} az X összes részhalmazainak halmaza, és μ a 3.25. Példában vizsgált

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

σ -additív halmazfüggvény. Ekkor (X, \mathcal{M}, μ) egy mértéktér. Ezt a μ mértéket *triviális mértéknek* nevezzük. \square

A valószínűségszámítás elméletében a valószínűségi mező ismeretében tudunk következtetéseket levonni, azaz feltesszük, hogy adott egy (Ω, \mathcal{H}, P) mértéktér, ahol \mathcal{H} az Ω részhalmazából

álló σ -algebra, $P: \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ mérték, azaz σ -additív nemnegatív halmazfüggvény, és amelyre $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. Megjegyezzük, hogy ebben az általános esetben Ω nem minden részhalmaza mérhető, azaz nem minden részhalmazhoz (eseményhez) rendelhetünk valószínűséget.

3.71. Definíció. Adott egy (X, \mathcal{M}, μ) mértéktér. Legyen T egy pontbeli tulajdonság valamely halmazon (például: egy függvény az adott pontban folytonos, vagy egy függvény az adott pontban nem zéró).

Azt mondjuk, hogy a T tulajdonság egy adott halmazon μ -majdnem mindenütt teljesül, ha azoknak a pontoknak a halmaza, ahol T nem teljesül vagy ahol T nincs értelmezve, μ -mérhető halmaz és a μ -mértéke nulla.

Pl.: Azt mondjuk, hogy az $f, g \in X \rightarrow \mathbb{R}$ függvények az $A \subset X$ halmazon μ -majdnem mindenütt egyenlőek (rövidítve $f = g$ μ -m.m.), ha az $\{x \in A: f(x) \neq g(x)\}$ halmaz μ -mérhető és μ -mértéke nulla. (Ha f és/vagy g egy adott pontban nincsen értelmezve, akkor azt úgy tekintjük, hogy f és g nem egyenlő ebben a pontban).

Ha a fenti definíciókban $\mu = m$, akkor az „ m -majdnem mindenütt” helyett egyszerűen a „majdnem mindenütt” kifejezést használjuk.

3.72. Példa. Ha f és g definíciója a közös értelmezési tartományukon véges sok pontban tér csak el egymástól, akkor f majdnem mindenütt megegyezik g -vel, mert véges sok pontból álló halmaz Lebesgue-mértéke 0.

Legyen most

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, 1] \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \in [0, 1] \text{ irracionális,} \end{cases}$$

és legyen g az azonosan nulla függvény $[0, 1]$ -en. Ekkor f majdnem mindenütt egyenlő g -vel, mert az $\{x \in [0, 1]: f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ halmaz nullmértékű. \square

3.6. Mérhető függvények

Ebben a szakaszban feltesszük, hogy adott egy (X, \mathcal{M}, μ) mértéktér, így a mérhető halmazokon mindig az \mathcal{M} elemeit, mérhetőségen μ -mérhetőséget, mértéken pedig a μ mértéket értjük. Olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek X -en értelmezettek és értékeiket a kibővített valós számok halmazából, $\mathbb{R}_b \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ -ből veszik fel.

3.73. Definíció. Legyen $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$. Azt mondjuk, hogy f mérhető függvény, ha az

$$\{x \in X: f(x) > a\}$$

halmaz minden valós a esetén mérhető.

3.74. Tétel. A következő állítások ekvivalensek:

1. $\{x \in X: f(x) > a\} \in \mathcal{M}$ minden $a \in \mathbb{R}$ -re,
2. $\{x \in X: f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$ minden $a \in \mathbb{R}$ -re,
3. $\{x \in X: f(x) < a\} \in \mathcal{M}$ minden $a \in \mathbb{R}$ -re,
4. $\{x \in X: f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$ minden $a \in \mathbb{R}$ -re.

Bizonyítás: Az egyes implikációk következnek az alábbi összefüggésekből:

1. \Rightarrow 2.: $\{x \in X : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > a - \frac{1}{n}\};$
2. \Rightarrow 3.: $\{x \in X : f(x) < a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) \geq a\};$
3. \Rightarrow 4.: $\{x \in X : f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < a + \frac{1}{n}\};$
4. \Rightarrow 1.: $\{x \in X : f(x) > a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) \leq a\}.$

□

3.75. Tétel. *Ha f mérhető, akkor $|f|$ is mérhető.*

Bizonyítás: Az állítás következik az $\{x \in X : |f(x)| > a\} = \{x \in X : f(x) > a\} \cup \{x \in X : f(x) < -a\}$ összefüggésből.

□

3.76. Tétel. *Ha f és g mérhető függvények, $c \in \mathbb{R}$, akkor cf , $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f + g$, $f \cdot g$ függvények szintén mérhetőek. Ha $\mu(\{x \in X : g(x) = 0\}) = 0$, akkor $1/g$ és f/g is mérhető.*

Bizonyítás: Tekintsük például az $f + g$ függvény mérhetőségét. Legyen r_1, r_2, \dots a racionális számok egy sorozatba rendezése (lásd a 3.8. Példát). Ekkor

$$\{x \in X : f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\{x \in X : f(x) > r_i\} \cap \{x \in X : g(x) > a - r_i\} \right) \in \mathcal{M}.$$

□

3.77. Tétel. *Legyen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető, valós értékű függvények, és legyen F valós és folytonos függvény \mathbb{R}^2 -n, és legyen*

$$h(x) = F(f(x), g(x)), \quad x \in X.$$

Ekkor h mérhető.

3.78. Tétel. *Legyen $\{f_n\}$ mérhető függvények sorozata. Ekkor az*

$$\sup_{n \geq 1} f_n, \quad \inf_{n \geq 1} f_n, \quad \limsup_{n \geq 1} f_n \quad \text{és} \quad \liminf_{n \geq 1} f_n$$

függvények szintén mérhetőek.

Bizonyítás: Legyen például $g(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$. Ekkor a supremum definíciója miatt

$$\{x : g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\},$$

így g mérhető.

Legyen például $h(x) = \limsup_{n \geq 1} f_n(x)$. Ekkor

$$h(x) = \inf_{m \geq 1} \sup_{n \geq m} f_n(x),$$

így az előbbiekből következik az állítás.

□

3.79. Következmény.

1. Ha f és g mérhető, akkor $\max\{f, g\}$ és $\min\{f, g\}$ szintén mérhető. Speciálisan ha

$$f^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{f, 0\} \quad f^- \stackrel{\text{def}}{=} -\min\{f, 0\},$$

akkor f^+ és f^- mérhető.

2. Mérhető függvények konvergens sorozatának határértéke is mérhető.

3.80. Tétel. Ha $X \subset \mathbb{R}^p$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor Lebesgue-mérhető.

Bizonyítás: Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített, és tekintsük az $\{x: f(x) > a\}$ halmazt. Ez nyílt halmaz, hiszen ha egy tetszőleges $x_0 \in \{x: f(x) > a\}$ pontot veszünk, f folytonosságából következik, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) > a$ teljesül minden x -re, amelyre $|x - x_0| < \delta$, ahol $|\cdot|$ az euklideszi távolság \mathbb{R}^n -en. A 3.64. Állítás szerint minden nyílt halmaz Lebesgue-mérhető, hiszen a nyílt halmazok Borel-halmazok is, tehát f Lebesgue-mérhető függvény. \square

3.81. Tétel. Legyen $X \subset \mathbb{R}^p$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, f Lebesgue-mérhető és $f = g$ majdnem mindenütt. Ekkor g is Lebesgue-mérhető.

Bizonyítás: A majdnem mindenütt definíciójából következik, hogy az $\{x: g(x) \neq f(x)\}$ halmaz Lebesgue-mérhető, és $m(\{x: g(x) \neq f(x)\}) = 0$. Ekkor persze az $\{x: g(x) = f(x)\}$ halmaz is Lebesgue-mérhető lesz. Mivel

$$\{x: g(x) > a\} \cap \{x: g(x) \neq f(x)\} \subset \{x: g(x) \neq f(x)\},$$

és minden m -nullmértékű halmaz részhalmaza is Lebesgue-mérhető, ezért az

$$\{x: g(x) > a\} = \left(\{x: f(x) > a\} \cap \{x: f(x) = g(x)\} \right) \cup \left(\{x: g(x) > a\} \cap \{x: g(x) \neq f(x)\} \right)$$

halmaz is Lebesgue-mérhető. \square

3.82. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy az előbbi tétel általánosítható olyan (X, \mathcal{M}, μ) mértékterekre is, ahol minden olyan $E \in \mathcal{M}$ halmaznak, amelynek μ -mértéke 0, bármely részhalmaza is mérhető halmaz. Az ilyen tulajdonságú mértéktereket *teljes mértéktérnek* nevezzük. Például a Lebesgue-mértékhez tartozó $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}(m), m)$ mértéktér teljes (lásd a 3.64. Állítást).

3.83. Megjegyzés. A mérhető függvények osztálya csak az \mathcal{M} σ -gyűrűtől függ (a konkrét mértéknek nincs szerepe a definícióban). Például \mathbb{R}^p -n beszélhetünk a Borel-mérhető függvényekről: Azt mondjuk, hogy f *Borel-mérhető*, ha bármely $a \in \mathbb{R}$ -re az $\{x: f(x) > a\}$ halmaz Borel-halmaz.

3.84. Példa. Legyen $P \subset [0, 1)$ a 3.67. Példában definiált olyan halmaz, amely nem Lebesgue-mérhető, és legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, 1) \cap P, \\ 0, & \text{ha } x \in [0, 1) \setminus P. \end{cases}$$

Ekkor f nem Lebesgue-mérhető függvény, mivel pl. az $\{x \in [0, 1): f(x) > 0,5\} = P$ halmaz nem Lebesgue-mérhető. \square

3.7. Egyszerű függvények

3.85. Definíció. Legyen s az X -en értelmezett valós értékű függvény. Ha s értékkészlete véges halmaz, akkor azt mondjuk, hogy s egyszerű függvény.

3.86. Definíció. Legyen $E \subset X$. Az E halmaz *karakterisztikus függvényének* nevezzük a

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

egyszerű függvényt.

Az egyszerű függvényeket mindig felírhatjuk karakterisztikus függvények lineáris kombinációjaként. Legyenek az s egyszerű függvény értékkészletének az elemei c_1, \dots, c_n , és legyen

$$E_i = \{x: s(x) = c_i\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ekkor

$$s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}.$$

3.87. Állítás. Az s egyszerű függvény akkor és csak akkor mérhető, ha az E_1, \dots, E_n halmazok mérhetőek.

Bizonyítás: Az állítás az

$$\{x: s(x) > a\} = \bigcup_{i: c_i > a} E_i$$

és valamely kis $\varepsilon > 0$ -ra az

$$E_i = \{x: s(x) > c_i - \varepsilon\} \cap \{x: s(x) < c_i + \varepsilon\}$$

összefüggésekből rögtön következik. □

A következő tétel szerint bármely függvény közelíthető egyszerű függvényekkel.

3.88. Tétel. Legyen $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$. Ekkor létezik olyan egyszerű függvényekből álló (s_n) sorozat, hogy minden $x \in X$ -re $s_n(x) \rightarrow f(x)$, ha $n \rightarrow +\infty$. Ha f mérhető, akkor (s_n) mérhető függvényekből álló sorozatnak választható. Ha $f \geq 0$, akkor (s_n) monoton növekvő sorozatnak választható.

Bizonyítás: Legyen $f \geq 0$ és

$$E_{n,i} = \left\{ x: \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \quad F_n = \{x: f(x) \geq n\},$$

$n = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n2^n$. Definiáljuk az s_n függvényt az

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{F_n}$$

képlettel. Ekkor s_n egyszerű függvény minden n -re, $s_n \leq s_{n+1}$, és $s_n \geq 0$, $n \geq 1$. Ha az f függvény mérhető, akkor az $E_{n,i}$ és F_n halmazok mérhetőek, így s_n is mérhető függvény a 3.76. Tétel szerint.

Rögzítsünk egy $x \in X$ számot. Tegyük fel először, hogy x olyan, hogy $f(x)$ véges. Ekkor válasszunk egy olyan n_0 természetes számot, hogy $f(x) < n_0$ legyen. Ekkor minden $n > n_0$ -ra létezik olyan $i_n(x)$ index, hogy $x \in E_{n, i_n(x)}$, azaz

$$\frac{i_n(x) - 1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i_n(x)}{2^n}.$$

Így

$$0 \leq f(x) - s_n(x) = f(x) - \frac{i_n(x) - 1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

Ha $f(x) = +\infty$, akkor minden n -re $x \in F_n$, ezért $s_n(x) = n \chi_{F_n}(x) \rightarrow +\infty$, ha $n \rightarrow +\infty$.

Ha f nem előjeltartó, akkor felírható két nemnegatív függvény különbségeként: $f = f^+ - f^-$, amiből az előzőek alapján az állítás következik. \square

3.8. Integrálás mértéktereken

Legyen (X, \mathcal{M}, μ) mértéktér, ahol X alaphalmaz, \mathcal{M} σ -gyűrű és μ megszámlálható mérték. Ebben a szakaszban mérhető függvények μ mérték szerinti integrálját definiáljuk. Az integrálást fokozatosan terjesztjük ki az egyszerű függvények integráljától kiindulva az egyre általánosabb függvényekre.

3.89. Definíció. Legyen $E \in \mathcal{M}$. Ekkor a konstans 1 függvény μ mérték szerinti integrálját az E halmazon az

$$\int_E 1 d\mu = \mu(E)$$

képlettel definiáljuk. Tegyük fel, hogy az

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$$

egyszerű függvény mérhető (azaz az E_i halmazok mind mérhetőek), és legyen $E \in \mathcal{M}$. Ekkor az s egyszerű függvény integrálját az E halmazon az

$$\int_E s d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i)$$

képlettel definiáljuk, ahol abban az esetben, amikor valamely $E \cap E_i$ halmaz mértéke végtelen, akkor feltesszük, azt is, hogy vagy minden $x \in E$ -re $s(x) \geq 0$ (azaz $c_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$) vagy minden $x \in E$ -re $s(x) \leq 0$ (azaz $c_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$).

Speciálisan, ha A mérhető és $s = \chi_A$, akkor

$$\int_E \chi_A d\mu = \mu(E \cap A).$$

Ekkor az egyszerű függvények körében az integrál az megőrzi a Riemann-integrál szokásos tulajdonságait:

3.90. Állítás. Legyen $s, s_1, s_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető elemi függvények, $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$. Ekkor

1. $\int_E cs \, d\mu = c \int_E s \, d\mu$ minden $c \in \mathbb{R}$ -re,
2. $\int_E (s_1 + s_2) \, d\mu = \int_E s_1 \, d\mu + \int_E s_2 \, d\mu$,
3. ha $s_1(x) \leq s_2(x)$ minden $x \in E$ -re, akkor $\int_E s_1 \, d\mu \leq \int_E s_2 \, d\mu$.

A következő lépésben nemnegatív mérhető függvények integrálját vezetjük vissza egyszerű függvények integráljaira.

3.91. Definíció. Legyen $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ mérhető és nemnegatív. Ekkor az f függvény $E \in \mathcal{M}$ halmazon vett μ mérték szerinti integrálját $\int_E f \, d\mu$ -vel jelöljük és ez definíció szerint

$$\int_E f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ egyszerű függvény} \right\}.$$

Megjegyezzük, hogy a mérték szerinti integrált nem korlátos függvényekre, sőt olyan olyan függvényekre is értelmeztük, amelyek a végtelen értéket is felvehetik, és persze az integrál értéke is lehet végtelen.

3.92. Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$$

$E = [0, 1]$, $E_i = (1/2^i, 1/2^{i-1}]$ ($i = 1, 2, \dots$). Ekkor E_1, E_2, \dots páronként diszjunkt halmazok, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = (0, 1]$. Definiáljuk az s_n egyszerű függvényt az $s_n(x) = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} \chi_{E_i}$ képlettel. Ekkor $0 \leq s_n \leq f$ és

$$\int_E f \, d\mu \geq \int_E s_n \, d\mu = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} m(E_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \rightarrow \infty, \quad (n \rightarrow \infty),$$

azaz $\int_E f \, d\mu = \infty$.

Megjegyezzük, hogy ha f -et a 0-ban másképp definiáljuk, például az $f(0) = 0$ értékkel, a fenti számolás megismételhető a módosított f függvényre is, így annak az integrálja is ∞ . \square

3.93. Példa. Legyen $A, E \subset \mathbb{R}$ mérhető halmazok,

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in A \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

és számítsuk ki az $\int_E f \, d\mu$ integrált!

Definíció szerint

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{\substack{0 \leq s \leq f, \\ s \text{ egyszerű } E}} \int_E s \, d\mu.$$

Ezért, ha vesszük az

$$s_n(x) = \begin{cases} n, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

egyszerű függvényt, akkor

$$\int_E f \, d\mu \geq \int_E s_n \, d\mu = n \cdot \mu(E \cap A) + 0 \cdot \mu(E \setminus A) = n \cdot \mu(E \cap A) \quad \text{minden } n \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

Tehát ha $\mu(E \cap A) \neq 0$, akkor $\int_E f \, d\mu = \infty$.

Ha pedig $\mu(E \cap A) = 0$, akkor tetszőleges olyan s egyszerű függvényre, amelyre $0 \leq s(x) \leq f(x)$ minden $x \in E$ -re, azaz $s(x) = 0$ minden $x \notin A$ -ra, $\int_E s \, d\mu = 0$ teljesül, ezért $\int_E f \, d\mu = 0$. \square

Végül az $f = f^+ - f^-$ összefüggés segítségével előjelváltó függvényekre terjesztjük ki az integrált.

3.94. Definíció. Legyen $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ mérhető függvény, $E \in \mathcal{M}$, és tekintsük a nemnegatív (szintén mérhető) f^+ és f^- függvények

$$\int_E f^+ \, d\mu \quad \text{és} \quad \int_E f^- \, d\mu$$

mérték szerinti integrálját. Ha a fenti két integrál közül legalább az egyik véges, akkor azt mondjuk, hogy f az E -n a μ mérték szerint integrálható, és az f függvény μ -szerinti integrálját az

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

összefüggéssel definiáljuk. Ha f integrálható E -n és az integrálja véges, akkor azt mondjuk, hogy f végesen integrálható az E halmazon a μ mérték szerint, és ezt úgy rövidítjük, hogy $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Ha $\mu = m$, akkor a végesen Lebesgue-integrálható függvények halmazát egyszerűen $\mathcal{L}(E)$ jelöli.

Szükségünk lesz a következőkben az egyváltozós elemi függvények speciális osztályára, a lépcsős függvényekre:

3.95. Definíció. Egy $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt lépcsős függvénynek nevezünk, ha létezik az $[a, b]$ intervallumnak egy $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ felosztása és c_0, \dots, c_{n-1} konstansok, hogy $g(x) = c_i$ ha $x \in (t_i, t_{i+1})$.

Megjegyezzük, hogy a fenti definícióban a lépcsős függvény értéke tetszőleges lehet a t_i osztópontokban. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden lépcsős függvény egyben egyszerű függvény is.

Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ adott, és tekintsük át az $\int_a^b f(x) \, dx$ Riemann-integrál definícióját a szokásostól egy kicsit eltérő jelölésekkel: vegyük az $[a, b]$ intervallum egy $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ felosztását, jelölje $k_i = \inf\{f(x): t_i \leq x \leq t_{i+1}\}$ és $K_i = \sup\{f(x): t_i \leq x \leq t_{i+1}\}$, és definiáljuk a

$$g = \sum_{i=0}^{n-1} k_i \chi_{(t_i, t_{i+1})} \quad \text{és} \quad g^* = \sum_{i=0}^{n-1} K_i \chi_{(t_i, t_{i+1})}$$

lépcsős függvényeket. (Ekkor $g(t_i) = 0$ és $g^*(t_i) = 0$ minden i -re.) Legyen m az egydimenziós Lebesgue-mérték. Ekkor a g ill. g^* lépcsős függvények $[a, b]$ intervallumon vett Lebesgue-integrálja visszaadja az f függvény P beosztáshoz tartozó Darboux-féle alsó ill. felső integrál közelítő összegét:

$$\int_{[a,b]} g \, dm = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(t_{i+1} - t_i) \quad \text{és} \quad \int_{[a,b]} g^* \, dm = \sum_{i=0}^{n-1} K_i(t_{i+1} - t_i).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti összefüggések akkor is teljesülnek, ha a g és g^* lépcsős függvények értékeit a t_i osztópontokban tetszőlegesen definiáljuk. Láthatjuk tehát, hogy az $\int_a^b f(x) \, dx$ Riemann-integrál tehát akkor és csak akkor létezik, ha f korlátos $[a, b]$ -n, továbbá

$$\sup_{\substack{0 \leq g \leq f, \\ g \text{ lépcsős függv.}}} \int_{[a,b]} g \, dm = \inf_{\substack{g^* \geq f, \\ g^* \text{ lépcsős függv.}}} \int_{[a,b]} g^* \, dm. \quad (3.7)$$

Látható, hogy a 3.91. Definíció a fentiek mintájára született, úgy, hogy a lépcsős függvények helyett az elemi függvények (tágabb) osztályára alkalmaztuk a (3.7) egyenlet bal oldalán álló kifejezést. Felmerül a kérdés, hogy ez a supremum mikor egyezik meg a (3.7) egyenlet jobb oldalának megfelelő, egyszerű függvényekre vett infimummal. A következő tétel szerint ez pontosan akkor teljesül, ha f mérhető. Ez mutatja a mérhetőség fogalmának jelentőségét, és emiatt a mérték szerinti integrálhatóság Riemann-integrálhatósággal analóg feltételét az egyszerűbben ellenőrizhető mérhetőséggel helyettesíthetjük. Azt is érdemes kiemelni, hogy a mérték szerinti integrál definiálásához nem kellett kikötni, hogy az f függvény korlátos legyen.

3.96. Tétel. *Legyen $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos az $E \subset X$ mérhető halmazon, amelyre $\mu(E) < \infty$. Ekkor f akkor és csak akkor mérhető, ha*

$$\sup_{\substack{s \leq f, \\ s \text{ egyszerű függv.}}} \int_E s \, d\mu = \inf_{\substack{s^* \geq f, \\ s^* \text{ egyszerű függv.}}} \int_E s^* \, d\mu.$$

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy az f függvény mérhető és $|f(x)| < M$ minden $x \in E$ -re, legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és definiáljuk az

$$E_i = \left\{ x \in E : \frac{(i-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{iM}{n} \right\} \quad (3.8)$$

halmazokat $i = -n+1, \dots, n$ -re. Ekkor E_{-n+1}, \dots, E_n μ -mérhető halmazok, páronként diszjunktak,

$$E = \bigcup_{i=-n+1}^n E_i, \quad \text{és így} \quad \mu(E) = \sum_{i=-n+1}^n \mu(E_i).$$

Használjuk az

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{s \leq f, \\ s \text{ egyszerű függv.}}} \int_E s \, d\mu \quad \text{és} \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{s^* \geq f, \\ s^* \text{ egyszerű függv.}}} \int_E s^* \, d\mu(s)$$

jelöléseket. Legyen s és s^* olyan egyszerű függvények, hogy $s(x) \leq f(x) \leq s^*(x)$ minden $x \in E$ -re. Ekkor a 3.90. Állítás 3. pontja értelmében

$$\int_E s \, d\mu \leq \int_E s^* \, d\mu,$$

de ebből rögzített s^* -ra a bal oldal supremumát véve, majd ezután a kapott egyenlőtlenség jobb oldalának infimumát véve következik, hogy $S \leq I$.

Definiáljuk a következő egyszerű függvényeket:

$$s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=-n+1}^n \frac{(i-1)M}{n} \chi_{E_i} \quad \text{és} \quad s_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=-n+1}^n \frac{iM}{n} \chi_{E_i}. \quad (3.9)$$

Ekkor nyilván $s_n(x) \leq f(x) \leq s_n^*(x)$ minden $x \in E$ -re, ezért

$$I \leq \int_E s_n^* d\mu = \frac{M}{n} \sum_{i=-n+1}^n i\mu(E_i) \quad \text{és} \quad S \geq \int_E s_n d\mu = \frac{M}{n} \sum_{i=-n+1}^n (i-1)\mu(E_i),$$

amiből következik, hogy

$$0 \leq I - S \leq \frac{M}{n} \sum_{i=-n+1}^n \mu(E_i) = \frac{M}{n} \mu(E).$$

Mivel n tetszőlegesen nagy lehet, ezért $S = I$.

2. Most tegyük fel, hogy $S = I$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ -re léteznek olyan s_n és s_n^* egyszerű függvények, hogy $s_n(x) \leq f(x) \leq s_n^*(x)$ minden $x \in E$ -re és

$$0 \leq \int_E s_n^* du - \int_E s_n du < \frac{1}{n}.$$

Legyen $s \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{s_n : n = 1, 2, \dots\}$ és $s^* \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{s_n^* : n = 1, 2, \dots\}$. Ekkor a 3.78. Tétel szerint s és s^* mérhető függvények, továbbá $s(x) \leq f(x) \leq s^*(x)$ minden $x \in E$ -re. Legyen

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E : s(x) < s^*(x)\}, \quad \text{és} \quad A_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in E : s(x) < s^*(x) - \frac{1}{i}\right\} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Ekkor nyilván $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ és $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Másrészt

$$A_i \subset \left\{x \in E : s_n(x) < s_n^*(x) - \frac{1}{i}\right\} \quad \text{minden } n\text{-re,}$$

ezért

$$\frac{1}{n} > \int_E (s_n^* - s_n) d\mu = \int_{A_i} (s_n^* - s_n) d\mu + \int_{E \setminus A_i} (s_n^* - s_n) d\mu \geq \int_{A_i} (s_n^* - s_n) d\mu \geq \frac{1}{i} \mu(A_i),$$

és így $\mu(A_i) \leq \frac{i}{n}$. Mivel n tetszőlegesen nagy lehet, ezért $\mu(A_i) = 0$ minden i -re, de így a 3.24. Tétel szerint $\mu(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = 0$, azaz $s(x) = f(x) = s^*(x)$ μ -majdnem mindenütt, ezért f is μ -mérhető. \square

A szakasz végéig legyen $\mu = m$ a Lebesgue-féle mérték a valós számegegyenes $[a, b]$ intervallumán, $X = [a, b]$, \mathcal{M} az $[a, b]$ intervallum Lebesgue-mérhető részalmazainak összessége. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény $[a, b]$ szakaszon vett Riemann-integrálját az

$$\int_a^b f(x) dx$$

szokásos jelöléssel, a Lebesgue-integrálját pedig az

$$\int_{[a,b]} f \, dm \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f \, dm$$

képletekkel jelöljük. A következő tétel mutatja a kapcsolatot a Riemann- és a Lebesgue-féle integrálok között:

3.97. Tétel. *Ha az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható $[a, b]$ -n, akkor f mérhető és Lebesgue-integrálható is $[a, b]$ -n továbbá*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f \, dm.$$

Bizonyítás: Mivel minden lépcsős függvény elemi függvény is, ezért az

$$\sup_{\substack{0 \leq g \leq f \\ g \text{ lépcsős fgv.}}} \int_a^b g \, dm \leq \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ elemi fgv.}}} \int_a^b s \, dm \leq \inf_{\substack{f \leq s^* \\ s^* \text{ elemi fgv.}}} \int_a^b s^* \, dm \leq \inf_{\substack{f \leq g^* \\ g^* \text{ lépcsős fgv.}}} \int_a^b g^* \, dm$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ha f Riemann-integrálható, akkor f korlátos is, és a fenti relációkban mindenhol egyenlőség teljesül, azaz a 3.96. Tétel alapján f mérhető $[a, b]$ -n, és a Riemann-integrál megegyezik a Lebesgue-integrállal. \square

3.98. Példa. Tekintsük az $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ függvényt. Ez nem Riemann-integrálható $[0, 1]$ -en, mivel könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges olyan g és g^* lépcsős függvényre, amelyre $0 \leq g \leq f$ és $f \leq g^*$, az

$$\int_0^1 g \, dm = 0 \quad \text{és} \quad \int_0^1 g^* \, dm = 1$$

relációk teljesülnek. Másrészt f mérhető egyszerű függvény, így Lebesgue-integrálható is, és

$$\int_{[0,1]} f \, dm = \int_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} 1 \, dm = m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0.$$

\square

Megmutatható a Riemann-integrálhatóság következő szükséges és elégséges feltétele.

3.99. Tétel (Lebesgue-kritérium). *Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha f majdnem mindenütt folytonos az $[a, b]$ intervallumon.*

3.9. A mérték szerinti integrálás tulajdonságai

Legyen (X, \mathcal{M}, μ) egy rögzített mértéktér. Megmutatjuk, hogy a Riemann- (és egyéb) integrálás szokásos tulajdonságai teljesülnek a mérték szerinti integrálra is, sőt a mérték szerinti integrálás számos jobb tulajdonsággal is rendelkezik.

3.100. Tétel. *Legyen $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ mérhető függvény.*

1. *Ha $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ állandóra $cf \in \mathcal{L}(E, \mu)$ és*

$$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu.$$

2. *Ha $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$, akkor $f + g \in \mathcal{L}(E, \mu)$, továbbá*

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

3. *Ha $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ és $f(x) \leq g(x)$, $x \in E$, akkor*

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

4. *Ha $x \in E$ esetén $k \leq f(x) \leq K$ és $\mu(E) < \infty$, akkor*

$$k\mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq K\mu(E).$$

5. *Ha f mérhető és korlátos az E -n, továbbá $\mu(E) < \infty$, akkor $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.*

6. *Ha $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, akkor $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$, és*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

7. *Legyen f mérhető az E -n és $|f| \leq g$, ahol $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Ekkor $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.*

8. *Legyen $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető. Ekkor*

$$\int_A f \, d\mu = \int_B f \chi_A \, d\mu.$$

9. *Legyen $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$. Ha $f \in \mathcal{L}(B, \mu)$, akkor $f \in \mathcal{L}(A, \mu)$, továbbá ha $f \geq 0$, akkor*

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

10. Ha $A, B \in \mathcal{M}$ diszjunkt halmazok, akkor

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Bizonyítás:

1. Elemi függvényekre az állítás a 3.90. Állítás 1. pontja alapján teljesül. Tekintsük most azt az esetet, amikor $f \geq 0$ mérhető. Nyilván s akkor és csak akkor mérhető egyszerű függvény, ha cs ($c \neq 0$) is az. Ha $c > 0$, akkor

$$\int_E cf d\mu = \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ egyszerű fgv. } E}} \int_E cs d\mu = c \cdot \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ egyszerű fgv. } E}} \int_E s d\mu = c \int_E f d\mu.$$

Ha $c < 0$, akkor $(cf)^+ = 0$ és $(cf)^- = -cf$, ezért a 3.94. Definíciót és az előbb bizonyított eredményt használva

$$\int_E cf d\mu = \int_E (cf)^+ d\mu - \int_E (cf)^- d\mu = - \int_E -cf d\mu = -(-c) \int_E f d\mu.$$

Legyen most f tetszőleges mérhető függvény. Ha $c > 0$, akkor $(cf)^+ = cf^+$ ill. $(cf)^- = cf^-$, ha pedig $c < 0$, akkor $(cf)^+ = -cf^-$ ill. $(cf)^- = -cf^+$. Ekkor $c > 0$ -ra

$$\int_E cf d\mu = \int_E cf^+ d\mu - \int_E cf^- d\mu = c \int_E f^+ d\mu - c \int_E f^- d\mu = c \int_E f d\mu.$$

A $c < 0$ eset hasonló módon következik.

2. Elemi függvényekre az állítás a 3.90. Állítás 2. pontja alapján teljesül. Tegyük fel először, hogy $f, g \geq 0$ mérhető, és legyen s_1 és s_2 olyan egyszerű függvények, amelyekre

$$0 \leq s_1 \leq f \quad \text{és} \quad 0 \leq s_2 \leq g. \quad (3.10)$$

Ekkor $0 \leq s_1 + s_2 \leq f + g$, továbbá az $\int_E (f + g) d\mu$ definíciója és a 3.90. Állítás 2. pontja alapján

$$\int_E s_1 d\mu + \int_E s_2 d\mu = \int_E (s_1 + s_2) d\mu \leq \int_E (f + g) d\mu.$$

Azaz ha rögzítünk egy (3.10) tulajdonságú s_2 elemi függvényt, akkor minden (3.10) tulajdonságú s_1 elemi függvényre

$$\int_E s_1 d\mu \leq \int_E (f + g) d\mu - \int_E s_2 d\mu.$$

De ekkor a bal oldal supremumát véve kapjuk, hogy

$$\int_E f d\mu \leq \int_E (f + g) d\mu - \int_E s_2 d\mu,$$

azaz

$$\int_E s_2 d\mu \leq \int_E (f + g) d\mu - \int_E f d\mu$$

teljesül minden (3.10) tulajdonságú s_1 elemi függvényre, így ezek supremumára is, tehát kapjuk, hogy

$$\int_E f d\mu + \int_E g d\mu \leq \int_E (f + g) d\mu.$$

Legyen most s_1^* és s_2^* olyan elemi függvények, amelyekre $s_1^* \geq f$ és $s_2^* \geq g$. Ekkor a 3.96. Tételt alkalmazva az előzőhöz hasonló módon kapjuk, hogy

$$\int_E s_1^* d\mu + \int_E s_2^* d\mu \geq \int_E (f + g) d\mu,$$

és ebből következik, hogy

$$\int_E f d\mu + \int_E g d\mu \geq \int_E (f + g) d\mu.$$

Ezzel a 2. állítást beláttuk arra az esetre, amikor $f, g \geq 0$.

Az általános esetben legyen $f = f^+ - f^-$ és $g = g^+ - g^-$. Ekkor

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f + g)^+ - (f + g)^-,$$

amiből

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

De ekkor a nemnegatív esetre vonatkozó eredményt felhasználva kapjuk, hogy

$$\int_E (f + g)^+ d\mu + \int_E f^- d\mu + \int_E g^- d\mu = \int_E (f + g)^- d\mu + \int_E f^+ d\mu + \int_E g^+ d\mu,$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) d\mu &= \int_E (f + g)^+ d\mu - \int_E (f + g)^- d\mu \\ &= \int_E f^+ d\mu + \int_E g^+ d\mu - \int_E f^- d\mu - \int_E g^- d\mu \\ &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

3. Elemi függvényekre az állítás a 3.90. Állítás 3. pontja alapján teljesül. Legyen $0 \leq f$. Ekkor $\{s \text{ elemi fgv. : } 0 \leq s \leq f\} \subset \{s \text{ elemi fgv. : } 0 \leq s \leq g\}$, amiből következik az állítás. Tegyük fel most, hogy $f \leq g$. Ekkor $f^+ \leq g^+$ és $f^- \geq g^-$, így a nemnegatív esetre belátott egyenlőtlenségek alapján

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \leq \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu = \int_E g d\mu.$$

4. A 3. állítás következménye.

5. A 4. pontból következik.

6. Az $f = f^+ - f^-$ integrálható az E -n, akkor $f^+, f^- \in \mathcal{L}(E, \mu)$, és ezért a 2. állítás alapján $|f| = f^+ + f^-$ is végesen integrálható az E -n. Ezért a 4. állítást a $-|f| \leq f \leq |f|$ egyenlőtlenséggel alkalmazva következik az állítás.

7. Az előző ponthoz hasonlóan látható be.

8. Legyen először $f = \chi_E$ valamely $E \in \mathcal{M}$ -re. Ekkor

$$\int_A f d\mu = \int_A \chi_E d\mu = \mu(A \cap E) = \mu((A \cap E) \cap B) = \int_B \chi_{A \cap E} d\mu = \int_B \chi_E \chi_A d\mu = \int_B f \chi_A d\mu.$$

Ha $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ mérhető elemi függvény, akkor

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_A \chi_{E_i} d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_B \chi_{E_i} \chi_A d\mu = \int_B \left(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} \right) \chi_A d\mu = \int_B f \chi_A d\mu.$$

Ha $0 \leq f$ mérhető függvény, akkor az

$$\left\{ \int_A s d\mu : 0 \leq s(x) \leq f(x), x \in A, s \text{ elemi fgv.} \right\} \\ = \left\{ \int_B s \chi_A d\mu : 0 \leq s(x) \chi_A(x) \leq f(x) \chi_A(x), x \in B, s \text{ elemi fgv.} \right\}$$

összefüggés mindkét oldalának supremumát véve következik az állítás. Az általános esetben pedig a nemnegatív esetre már belátott eredmény alapján

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \int_B f^+ \chi_A d\mu - \int_B f^- \chi_A d\mu = \int_B f \chi_A d\mu.$$

9. Mivel $f(x) \chi_A(x) \leq f(x)$ minden $x \in B$ -re, ezért a 3. és 8. pontot felhasználva kapjuk az állítást.

10. Ha A és B diszjunkt, akkor $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$, ezért a 2. és 8. pontból következik az állítás. \square

Ismert, hogy ha az f_n Riemann-integrálható függvények egyenletesen konvergálnak az f függvényhez az $[a, b]$ intervallumon, akkor az f határérték függvény is Riemann-integrálható, valamint $\int_a^n f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$. A következőkben megmutatjuk, hogy hasonló tulajdonság a mérték szerinti integrálásra enyhébb feltételek mellett is teljesül. Első ilyen eredményünk a következő tétel.

3.101. Tétel (Lebesgue monoton konvergencia tétele). *Legyen $E \in \mathcal{M}$, és legyen (f_n) nemnegatív, mérhető függvények monoton növekvő sorozata, azaz*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad (x \in E),$$

és legyen

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}_b, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Bizonyítás:

A feltételekből és a 3.100. Tétel 3. pontjából következik $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu$ minden n -re, ezért a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$ (nem szükségképpen véges) határérték létezik. Másrészt $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$ is teljesül, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

A fordított becslés igazolásához rögzítsünk egy olyan s egyszerű függvényt, hogy $0 \leq s \leq f$ az E -n, és definiáljuk az $A = \{x \in E : s(x) = 0\}$ és $B = \{x \in E : s(x) \neq 0\}$ halmazokat. Nyilván $A \cup B = E$. Legyen egy tetszőleges $0 < c < 1$ és $\varepsilon > 0$ is rögzítve. Definiáljuk az $M = \max\{s(x) : x \in E\}$ és $m = \min\{s(x) : x \in B\}$ konstansokat és a

$$B_n = \{x \in B : cs(x) \leq f_n(x)\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

halmazokat. Ekkor a feltételekből következően

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \quad \text{és} \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

A 3.24. Tétel szerint $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$, ha $n \rightarrow \infty$.

Tegyük fel először, hogy $\mu(B) = \infty$. Ekkor

$$\int_E f \, d\mu \geq \int_E s \, d\mu = \int_A s \, d\mu + \int_B s \, d\mu \geq m\mu(B) = \infty.$$

Másrészt

$$\int_E f_n \, d\mu \geq \int_{B_n} f_n \, d\mu \geq \int_{B_n} cs \, d\mu \geq cm\mu(B_n) \rightarrow \infty.$$

Most tegyük fel, hogy $\mu(B) < \infty$. Ekkor $\mu(B \setminus B_n) = \mu(B) - \mu(B_n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Legyen n_0 olyan, hogy $\mu(B \setminus B_{n_0}) < \varepsilon/M$. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_E s \, d\mu &= \int_A s \, d\mu + \int_{B_{n_0}} s \, d\mu + \int_{B \setminus B_{n_0}} s \, d\mu \\ &\leq \int_{B_{n_0}} \frac{1}{c} f_{n_0} \, d\mu + \int_{B \setminus B_{n_0}} M \, d\mu \\ &\leq \frac{1}{c} \int_E f_{n_0} \, d\mu + M\mu(B \setminus B_{n_0}) \\ &\leq \frac{1}{c} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel $0 < c < 1$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így ha most $c \rightarrow 1-$ és $\varepsilon \rightarrow 0+$, akkor a fenti egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\int_E s \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

De s is a $0 \leq s \leq f$ egyenlőtlenségeket teljesítő tetszőleges egyszerű függvény volt, így a bal oldal supremumát véve

$$\int_E f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu$$

adódik. Ezzel a tétel bizonyítása teljes. \square

3.102. Megjegyzés. A 3.88. Tétel szerint bármely nemnegatív mérhető f függvény előállítható egyszerű függvények monoton sorozatának határértékeként: $s_n \rightarrow f$. De ekkor a Lebesgue

monoton konvergencia tétel szerint $\int_E s_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu$. Ezért a mérték szerinti integrálás definiálásának van olyan tárgyalási módja, ahol elemi függvények monoton sorozatai segítségével, azok integráljai határértékeként definiálják a nemnegatív mérhető függvények mérték szerinti integrálját.

A következő példa mutatja, hogy a Riemann-integrálra általában nem teljesül a Lebesgue-féle monoton konvergencia tétel.

3.103. Példa. Legyen r_1, r_2, \dots a $[0, 1]$ intervallumba eső racionális számok egy sorozatba rendezése, és definiáljuk az

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \{r_1, \dots, r_n\}, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvényt a $[0, 1]$ -en. Ekkor véges sok pont kivételével a függvény egyenlő 0-val, ezért f_n Riemann-, és így Lebesgue-integrálható is, továbbá $\int_0^1 f_n(x) dx = 0$. Az f_n függvényt sorozat nemnegatív, monoton növekvő függvényt sorozat. Továbbá létezik az $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ határérték, mégpedig $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$, ami a 3.98. Példa szerint nem Riemann-integrálható. Lebesgue monoton konvergencia tétele alapján viszont az f függvény Lebesgue-integrálható és $\int_0^1 f dm = 0$. Valóban, $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} dm = m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$. \square

Azt, hogy a 3.101. Tételben a monoton növekedést nem lehet monoton csökkenésre kicserélni, láthatjuk a következő példából.

3.104. Példa. Legyen

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < n, \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$$

Ekkor f_n monoton csökkenő függvényt sorozat, amely pontonként tart az azonosan 0 függvényhez, $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = \infty$, viszont $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm = 0$. \square

Az előző tételt alkalmazva a végtelen sor részletösszegeire rögtön kapjuk a következő eredményt.

3.105. Következmény. Legyen $E \in \mathcal{M}$, (f_n) nemnegatív, mérhető függvények sorozata és $f: E \rightarrow \mathbb{R}_b$ olyan, hogy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E\text{-re.}$$

Ekkor f mérhető, és

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

A Riemann-integrálok egyik alaptulajdonsága, hogy $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, amit úgy szoktak röviden mondani, hogy az integrál additív a tartományban. A 3.100. Tételben láttuk, hogy a mérték szerinti integrál szintén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, sőt, a Lebesgue-féle monoton konvergencia tétel segítségével megmutatjuk, hogy az integrál σ -additív is a tartományban.

3.106. Tétel. Legyen $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ mérhető függvény.

1. Legyen $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$, és definiáljuk a

$$\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_b, \quad \Phi(E) = \int_E f d\mu$$

halmazfüggvényt. Ekkor Φ σ -additív halmazfüggvény. Ha $f \geq 0$, akkor Φ mérték \mathcal{M} -en.

2. Ha $\mu(E) = 0$ és f mérhető E -n, akkor

$$\int_E f d\mu = 0.$$

3. Ha $f(x) = g(x)$ μ -m.m. $x \in E$ -re, akkor

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

4. Ha $A, B \in \mathcal{M}$ olyan, hogy $\mu(A \triangle B) = 0$, akkor

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

Bizonyítás:

1. Tegyük fel először, hogy $f \geq 0$. Legyen $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ páronként diszjunkt, legyen $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ekkor

$$\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n},$$

és így a 3.100. Tétel 8. pontja és a 3.105. Következmény szerint

$$\Phi(E) = \int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu = \int_X f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n).$$

Ha $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$, és $f = f^+ - f^-$, akkor

$$\Phi(E) = \int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^+ d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n).$$

2. Ha $|f| \leq M$, akkor a 3.100. Tétel 8. pontját használva

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq M\mu(E) = 0.$$

Ha f nem korlátos, de $|f(x)| < \infty$ minden $x \in E$ -re, akkor definiáljuk az $A_n = \{x \in E : |f(x)| \leq n\}$ halmazokat és a $B_1 = A_1 \cap E$, $B_n = (A_n \setminus A_{n-1}) \cap E$ ($n = 2, 3, \dots$) halmazokat. Ekkor B_1, B_2, \dots páronként diszjunkt, mérhető halmazok és $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = E$, valamint $\mu(B_n) = 0$ minden n -re. Ezért az integrál tartományra vonatkozó σ -additivitása és a korlátos esetre megmutatott eredmény alapján

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f d\mu = 0.$$

Most tekintsük az általános f esetét. Legyen $A = \{x \in E : |f(x)| < \infty\}$. Ekkor

$$\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{E \setminus A} f d\mu,$$

így a 3.93. Példát, a $\mu(E \setminus A) = 0$ összefüggést és a véges esetet alkalmazva adódik az állítás.

3. Legyen $A = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$. Ekkor $\mu(E \setminus A) = 0$, így a 2. pont miatt

$$\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{E \setminus A} f d\mu = \int_A g d\mu = \int_A g d\mu + \int_{E \setminus A} g d\mu = \int_E g d\mu.$$

4. Az előző bizonyítás mintájára belátható. □

3.107. Példa. Számítsuk ki az $\int_{[0,1]} f dm$ Lebesgue-integrált, ahol

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2x - 3, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mivel $m([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$, az f függvény és a $g(x) = 2x - 3$ függvény majdnem mindenütt megegyezik. Ezért az előző tétel 3. pontja szerint és a 3.97. Tétel szerint az integrált visszavezethetjük Riemann-integrál számolására:

$$\int_{[0,1]} f dm = \int_{[0,1]} g dm = \int_0^1 (2x - 3) dx = -2.$$

□

3.108. Tétel (Fatou lemmája). Tegyük fel, hogy $E \in \mathcal{M}$, (f_n) nemnegatív mérhető függvények sorozata, és legyen $f : E \rightarrow \mathbb{R}_b$ olyan, hogy

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in E.$$

Ekkor f mérhető és

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Bizonyítás: f mérhetősége a 3.78. Tételből következik. Legyen $g_n(x) = \inf\{f_i(x) : i \geq n\}$. Ekkor

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \quad \text{és} \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x).$$

Továbbá $g_n \leq f_n$, emiatt $\int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu$, és így Lebesgue monoton konvergencia tételét használva

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

□

3.109. Tétel (Lebesgue "nagy" konvergenciatétele). Tegyük fel, hogy $E \in \mathcal{M}$. Legyen (f_n) mérhető függvények olyan sorozata, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E\text{-re.}$$

Ha van olyan g függvény, hogy $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ és

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in E\text{-re,}$$

akkor $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Bizonyítás: A feltételek miatt $g - f_n \geq 0$, így a Fatou-lemmát alkalmazva

$$\int_E (g - f) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (g - f_n) d\mu = \int_E g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu,$$

tehát

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

A $g + f_n$ függvényre alkalmazva az előbbi számolást kapjuk, hogy

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu,$$

azaz az állítás teljesül. □

3.110. Következmény (Lebesgue "kis" konvergenciatétele). Legyen $E \in \mathcal{M}$ olyan halmaz, amelyre $\mu(E) < \infty$, a mérhető függvények (f_n) sorozata egyenletesen korlátos az E -n, azaz van olyan $M > 0$, hogy $|f_n(x)| \leq M$, $x \in E$ minden $n = 1, 2, \dots$ -re, és $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in E$. Ekkor

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Általános mérték szerinti integrálok kiszámolásához hasznos a következő állítás, amelynek igazolását az olvasóra bizzuk.

3.111. Tétel. Legyen μ_1 és μ_2 mérték az \mathcal{M} σ -algebrán, α_1 és α_2 pozitív konstansok. Legyen $f: X \rightarrow \mathbb{R}_b$ mérhető az \mathcal{M} σ -algebra szerint, $E \in \mathcal{M}$. Ekkor $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ is mérték \mathcal{M} -en, továbbá

$$\int_E f d(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = \alpha_1 \int_E f d\mu_1 + \alpha_2 \int_E f d\mu_2.$$

A Riemann-integrálokra ismert eredmény általánosítása a következő tétel, amely a differenciálás és a Lebesgue-integrálás kapcsolatát vizsgálja. A bizonyítástól eltekintünk.

3.112. Tétel. *Legyen*

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f \, dm \quad (a \leq x \leq b),$$

ahol $f \in \mathcal{L}([a, b], \mathbb{R})$, azaz $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ végesen Lebesgue-integrálható függvény. Ekkor

$$F'(x) = f(x), \quad m.m. \ x \in [a, b]\text{-re.}$$

Megfordítva: ha egy $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $[a, b]$ intervallum minden pontjában differenciálható és $F' \in \mathcal{L}([a, b], \mathbb{R})$, akkor

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F' \, dm.$$

3.10. A Riemann–Stieltjes-integrál

Ebben a szakaszban a Riemann-integrál egy másik lehetséges kiterjesztését, a Riemann–Stieltjes-integrál fogalmát definiáljuk. Ez az integrálfogalom is fontos szerepet játszik például az analízis, valószínűségszámítás és a fizika több ágában is.

Legyenek $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ beosztását. A beosztás finomsága legyen $|P| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, \dots, n-1\}$. Minden intervallumból válasszunk egy $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ pontot. Ekkor a P beosztáshoz és a $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ közbülső pontok rendszeréhez definiáljuk az

$$S(f, G, P, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [G(x_{k+1}) - G(x_k)]$$

összeget, amelyet az f függvény G függvényre vonatkozó Riemann–Stieltjes-féle integrál közelítő összegének nevezünk. Ez az összeg a $G(x) = x$ ($x \in [a, b]$) esetben a Riemann-féle integrál közelítő összeggel egyezik meg.

3.113. Definíció. Ha létezik olyan I szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta > 0$, hogy az $[a, b]$ intervallum minden olyan P beosztásra, amelynek finomsága $|P| < \delta$ és az adott beosztáshoz tartozó tetszőleges ξ közbülső pontok rendszerére az $S(f, G, P, \xi)$ Riemann–Stieltjes közelítő összegre $|S(f, G, P, \xi) - I| < \varepsilon$ teljesül, akkor az f függvényt a G függvény szerint *Riemann–Stieltjes-integrálható* függvénynek nevezzük, és az I számot az f függvény G -re vonatkozó *Riemann–Stieltjes-integráljának* nevezzük az $[a, b]$ intervallumon, és azt az

$$\int_a^b f(x) \, dG(x)$$

képlettel jelöljük. A G függvényre nézve az $[a, b]$ intervallumon Riemann–Stieltjes-integrálható függvények halmazát $\mathcal{L}_S([a, b], G)$ -vel jelöljük.

3.114. Példa. Ha $G(x) = c$ konstans, akkor a definícióból rögtön következik, hogy tetszőleges f függvény Riemann–Stieltjes-integrálható G szerint és $\int_a^b f(x) \, dG(x) = 0$.

Ha $G(x) = x$, akkor a Riemann–Stieltjes-integrál megegyezik a Riemann-integrállal. Ha $G(x) = \alpha x + \beta$, akkor a definícióból könnyen következik, hogy ha f Riemann-integrálható, akkor a G függvény szerint Riemann–Stieltjes-integrálható is, és

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Az is könnyen látható a definícióból, hogy bármely G függvényre

$$\int_a^b c dG(x) = c(G(b) - G(a)).$$

□

3.115. Definíció. A G függvényt *korlátos változásúnak* nevezzük, ha felírható két monoton növekvő függvény különbségeként.

Speciálisan a monoton növekvő függvények is korlátos változású függvények, hiszen $g = g - 0$ alakban felírhatók. Hasonlóan, ha g monoton csökkenő, akkor korlátos változású is, hiszen $g = 0 - (-g)$. Ha $g = g_1 - g_2$, ahol g_1 és g_2 monoton csökkenő, akkor g korlátos változású is, hiszen $g = -g_2 - (-g_1)$.

Megmutatjuk, hogy folytonos f függvény mindig Riemann–Stieltjes-integrálható egy korlátos változású G függvény szerint.

3.116. Tétel. Legyen $f, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ahol f folytonos, G pedig korlátos változású. Ekkor f Riemann–Stieltjes-integrálható a G függvény szerint az $[a, b]$ intervallumon.

Bizonyítás:

1. Tegyük fel először, hogy G monoton növekvő. Feltehetjük ekkor azt is, hogy $G(b) > G(a)$, hiszen egyébként G konstans függvény volna, amire az állítás teljesül. Legyen

$$m_i = \min_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \quad \text{és} \quad M_i = \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Definiáljuk az

$$\underline{S}(f, G, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} m_k [G(x_{k+1}) - G(x_k)] \quad \text{és} \quad \overline{S}(f, G, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} M_k [G(x_{k+1}) - G(x_k)],$$

ú.n. *Riemann–Stieltjes-féle alsó és felső integrál közelítő összegeket*. Ekkor G monotonitása miatt

$$\underline{S}(f, G, P) \leq S(f, G, P, \xi) \leq \overline{S}(f, G, P), \quad (3.11)$$

ami egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\sup_P \underline{S}(f, G, P) \leq \inf_P \overline{S}(f, G, P),$$

ahol a supremumot ill. infimumot az összes beosztásra vesszük.

Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Az f függvény folytonos, ezért egyenletesen is folytonos az $[a, b]$ -n, azaz $\varepsilon/(G(b) - G(a))$ -hoz is található olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - \tilde{x}| < \delta$, akkor $|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon/(G(b) - G(a))$. Vegyünk egy tetszőleges olyan P beosztást, amelyre $|P| < \delta$. Ekkor

$$M_k - m_k = \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \{f(x)\} - \min_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} \{f(x)\} < \frac{\varepsilon}{G(b) - G(a)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

így ehhez a felosztáshoz tartozó alsó és felső Riemann–Stieltjes-összegekre

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, G, P) - \underline{S}(f, G, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) [G(x_{k+1}) - G(x_k)] \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{G(b) - G(a)} [G(x_{k+1}) - G(x_k)] \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy

$$\inf_P \overline{S}(f, G, P) = \sup_P \underline{S}(f, G, P),$$

de ekkor (3.11) miatt a Riemann–Stieltjes-féle közelítő összeg is konvergens és

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \inf_P \overline{S}(f, G, P) = \sup_P \underline{S}(f, G, P).$$

2. Ha G monoton csökkenő, akkor $-G$ monoton növény, és minden P -re és ξ -re $S(f, G, P, \xi) = -S(f, -G, P, \xi)$, ezért az 1. pont szerint $f \in \mathcal{L}_S([a, b], -G)$, így $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$ is teljesül, és

$$\int_a^b f(x) dG(x) = - \int_a^b f(x) d(-G(x)).$$

3. Ha $G = G_1 - G_2$ alakú, ahol G_1 és G_2 monoton függvények, akkor minden P -re és ξ -re

$$S(f, G, P, \xi) = S(f, G_1 - G_2, P, \xi) = S(f, G_1, P, \xi) - S(f, G_2, P, \xi),$$

ezért ha $|P| \rightarrow 0$ kapjuk, hogy $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$, továbbá

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b f(x) dG_1(x) - \int_a^b f(x) dG_2(x).$$

□

Ahogy az az előző tétel bizonyításából is látható, a Riemann–Stieltjes-integrál tulajdonságai hasonlóak a Riemann-integrál tulajdonságaihoz. A bizonyítást az olvasóra bízunk.

3.117. Állítás. Legyen $f, f_1, f_2, G, G_1, G_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

1. Tegyük fel, hogy az $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$. Ekkor $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$, és

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dG(x) = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dG(x) + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dG(x).$$

2. Legyen $G = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$, és tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G_1)$ és $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G_2)$. Ekkor $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$, továbbá

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \lambda_1 \int_a^b f(x) dG_1(x) + \lambda_2 \int_a^b f(x) dG_2(x).$$

3. Legyen $a < c < b$, és tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{L}_S([a, c], G) \cap \mathcal{L}_S([c, b], G)$. Ekkor $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$, és

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^c f(x) dG(x) + \int_c^b f(x) dG(x).$$

4. Tegyük fel, hogy G monoton függvény az $[a, b]$ -n, $|f(x)| \leq M$ az $[a, b]$ -n, és $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$.
Ekkor

$$\left| \int_a^b f(x) dG(x) \right| \leq M|G(b) - G(a)|.$$

3.118. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *szakaszonként folytonosan differenciálható*, ha véges sok szakadási pontja van $[a, b]$ -n, és bármely x_0 szakadási pontjában léteznek a

$$G(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} G(x), \quad G(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} G(x)$$

egyoldali függvényhatárértékek és az

$$G'(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{G(x) - G(x_0+)}{x - x_0}, \quad G'(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{G(x) - G(x_0-)}{x - x_0}$$

egyoldali deriváltak, továbbá bármely két szakadási pontja közötti nyílt intervallumon folytonosan differenciálható. (Ha x_0 az intervallum végpontja, akkor természetesen csak az egyik oldali határérték létezik.)

A következő állítás szerint bizonyos speciális függvénytípusok korlátos változású függvények.

3.119. Állítás. A következő függvények korlátos változásúak $[a, b]$ -n:

1. $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, hogy G folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n.
2. G lépcsős függvény $[a, b]$ -n.
3. G szakaszonként folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n.

Bizonyítás:

1. A 3.112. Tételt alkalmazva (a Lebesgue-integrál ebben az esetben a Riemann-integrállal megegyezik) kapjuk, hogy

$$G(x) = G(a) + \int_a^x G'(t) dt.$$

Ekkor $G = G_1 - G_2$, ahol

$$G_1(x) = G(a) + \int_a^x [G'(t)]^+ dt, \quad \text{és} \quad G_2(x) = \int_a^x [G'(t)]^- dt$$

monoton nemcsökkenő függvények $[a, b]$ -n, hiszen $G_1'(x) = [G'(x)]^+ \geq 0$ és $G_2'(x) = [G'(x)]^- \geq 0$.

2. Legyen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ olyan, hogy $G(x)$ konstans az $x \in (t_i, t_{i+1})$ intervallumokon. Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$\alpha_i = G(t_i) - G(t_i-), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{és} \quad \beta_i = G(t_i+) - G(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

a G függvény bal és jobb oldali ugrásai a t_i pontokban (az intervallum végpontjaiban persze csak az egyik oldalról). Az egyszerűbb jelölés kedvéért vezessük be az $\alpha_0 = 0$ konstans is. Ekkor a G függvény képletét felírhatjuk az ugrások segítségével a következő módon:

$$G(x) = \begin{cases} G(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_j + \beta_j) + \alpha_i, & x = t_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ G(t_0) + \sum_{j=0}^i (\alpha_j + \beta_j), & t_i < x < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Definiáljuk a G_1 és G_2 függvényeket az ugrások pozitív ill. negatív részei segítségével:

$$G_1(x) = \begin{cases} G(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} ([\alpha_j]^+ + [\beta_j]^+) + [\alpha_i]^+, & x = t_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ G(t_0) + \sum_{j=0}^i ([\alpha_j]^+ + [\beta_j]^+), & t_i < x < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1, \end{cases}$$

és

$$G_2(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} ([\alpha_j]^- + [\beta_j]^-) + [\alpha_i]^-, & x = t_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ \sum_{j=0}^i ([\alpha_j]^- + [\beta_j]^-), & t_i < x < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Ekkor nyilván G_1 és G_2 monoton nemcsökkenő függvények, és $G = G_1 - G_2$.

3. Legyen G olyan függvény, amelynek az $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ pontban van (pontosabban szólva lehet) szakadási pontja, és a $G(t_i+)$ ill $G(t_i-)$ egyoldali hatértékek léteznek (az intervallum végpontjaiban csak egyik oldalról). Vezessük be az

$$u_i = G(t_i+) - G(t_i-), \quad i = 1, \dots, m-1$$

ugrásokat, és legyen

$$F(x) = \begin{cases} G(t_0+), & x = t_0, \\ G(t_i+) - \sum_{j=1}^i u_j, & x = t_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ G(t_m-) - \sum_{j=1}^{m-1} u_j, & x = t_m, \\ G(x) - \sum_{j=1}^i u_j, & t_i < x < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases}$$

és $H(x) = G(x) - F(x)$. Ekkor F folytonos, és H lépcsős függvény, mivel $x \in (t_i, t_{i+1})$ -re $H(x) = \sum_{j=1}^i u_j$. Mivel F a t_i pontok kivételével folytonosan differenciálható is (azaz F' m.m. létezik és folytonos), ezért a 3.112. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt.$$

Így az 1. ponthoz hasonló módon belátható, hogy F korlátos változású. A H függvényről a 2. pont értelmében tudjuk, hogy korlátos változású, de ekkor az összegük is az. \square

A következő eredmények arra vonatkoznak, hogyan tudjuk az előző állításban vizsgált típusú G függvényekre kiszámítani a Riemann–Stieltjes-integrált.

3.120. Tétel. *Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és legyen*

1. $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású, folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b f(x) G'(x) dx.$$

2. $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lépcsős függvény az $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ szakadási pontokkal. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i)[G(t_{i+1}) - G(t_i)],$$

ahol legyen $G(t_0-) = G(t_0)$ és $G(t_m+) = G(t_m)$.

3. legyen $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, az $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ szakadási pontokkal, a G függvény (t_i, t_{i+1}) intervallumokra vett megszorítását jelölje G_i , és legyen $G(t_0-) = G(t_0)$ és $G(t_m+) = G(t_m)$. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) G'_i(x) dx + \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i)[G(t_{i+1}) - G(t_i)].$$

Bizonyítás:

1. A 3.116. Tételből következik, hogy $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$. Vegyünk egy tetszőleges $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ beosztását $[a, b]$ -nek. Ekkor a Lagrange-féle középérték tétel miatt léteznek olyan $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ számok, hogy

$$G(x_{k+1}) - G(x_k) = G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Legyen $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$, és tekintsük az ezekhez a közbülső pontokhoz tartozó Riemann–Stieltjes-féle közelítő összeget. Ez a speciálisan választott Riemann–Stieltjes-féle közelítő összeg is tart az $\int_a^b f(x) dG(x)$ integrálhoz, ha $|P| \rightarrow 0$. Másrészt erre az összegre

$$S(f, G, P, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[G(x_{k+1}) - G(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

azaz megegyezik az $f(x)G'(x)$ folytonos függvény egy Riemann-féle integrál közelítő összegével, ami konvergens ha $|P| \rightarrow 0$ és a határértéke $\int_a^b f(x)G'(x) dx$.

2. Az integrál tartományra vonatkozó additivitását alkalmazva

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dG(x).$$

Tekintsük a $[t_i, t_{i+1}]$ intervallumot, és definiáljuk a

$$H_1(x) = \begin{cases} G(t_i) - G(t_i+), & x = t_i, \\ 0, & t_i < x \leq t_{i+1}, \end{cases} \quad H_2(x) = G(t_i+), \quad t_i \leq x \leq t_{i+1},$$

és a

$$H_3(x) = \begin{cases} G(t_{i+1}) - G(t_{i+1}-), & x = t_{i+1}, \\ 0, & t_i \leq x < t_{i+1} \end{cases}$$

függvényeket. Ekkor $G(x) = H_1(x) + H_2(x) + H_3(x)$, ezért

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dG(x) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dH_1(x) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dH_3(x),$$

hiszen H_2 konstans, így a rá vonatkozó Riemann–Stieltjes-integrál nulla. Legyen $t_i = x_0 < \dots < x_n = t_{i+1}$ egy beosztása $[t_i, t_{i+1}]$ -nek, $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ egy tetszőleges közbülső pontrendszer. Ekkor a H_1 -re vonatkozó Riemann–Stieltjes-féle közelítő összeg

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[H_1(x_{k+1}) - H_1(x_k)] = f(\xi_0)[H_1(x_1) - H_1(x_0)].$$

Ha $|P| \rightarrow 0$, akkor kapjuk, hogy

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dH_1(x) = f(t_i)(H_1(t_{i+}) - H_1(t_i)) = f(t_i)(G(t_{i+}) - G(t_i)).$$

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dH_3(x) = f(t_{i+1})(G(t_{i+1}) - G(t_{i+1}-)).$$

Ezért

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dG(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dG(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (f(t_i)(G(t_{i+}) - G(t_i)) + f(t_{i+1})(G(t_{i+1}) - G(t_{i+1}-))) \\ &= \sum_{i=0}^m f(t_i)[G(t_{i+}) - G(t_{i-})]. \end{aligned}$$

3. Az integrál tartományra vonatkozó additivitását és az 1. és 2. tulajdonságokat használva

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dG(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) dG(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) G'_i(x) dx + f(t_i)[G(t_{i+}) - G(t_i)] + f(t_{i+1})[G(t_{i+1}) - G(t_{i+1}-)] \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) G'_i(x) dx + \sum_{i=0}^m f(t_i)(G(t_{i+}) - G(t_{i-})). \end{aligned}$$

□

3.121. Példa. Legyen

$$G(x) = \begin{cases} 4, & x = -2, \\ x^2 - 1, & -2 < x < -1, \\ 1, & x = -1, \\ 3x - 2, & -1 < x \leq 1, \\ x^3 - 4x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Számítsuk ki az $\int_{-2}^2 (x^2 + 5x) dG(x)$ integrált!

A G függvény szakadási pontjai $x = -2, -1$ és 1 , így az előző tétel szerint

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^2 + 5x) dG(x) &= \int_{-2}^{-1} (x^2 + 5x)(x^2 - 1)' dx + \int_{-1}^1 (x^2 + 5x)(3x - 2)' dx \\ &\quad + \int_1^2 (x^2 + 5x)(x^3 - 4x)' dx + ((-2)^2 + 5 \cdot (-2)) \left(((-2)^2 - 1) - 4 \right) \\ &\quad + \left((-1)^2 + 5 \cdot (-1) \right) \left((3 \cdot (-1) - 2) - ((-1)^2 - 1) \right) \\ &\quad + \left(1^2 + 5 \cdot 1 \right) \left((1^3 - 4 \cdot 1) - (3 \cdot 1 - 2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{-1} (x^2 + 5x)2x \, dx + \int_{-1}^1 (x^2 + 5x)3 \, dx + \int_1^2 (x^2 + 5x)(3x^2 - 4) \, dx \\
&\quad + 6 + 20 - 24 \\
&= \frac{95}{6} + 2 + \frac{2131}{60} + 6 + 20 - 24 \\
&= \frac{1107}{20}.
\end{aligned}$$

□

3.122. Példa. Legyen $f, G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = G(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Vegyük a $[0, 1]$ egy tetszőleges $0 = x_0 < \dots < x_n = 1$ beosztását és egy $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ közbülső pontrendszert. Ekkor f és G definíciója alapján

$$S(f, G, P, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [G(x_{k+1}) - G(x_k)] = f(\xi_{n-1}).$$

De ekkor ha ξ olyan, hogy $\xi_{n-1} \neq 1$, akkor $S(f, G, P, \xi) = 0$, ha pedig $\xi_{n-1} = 1$, akkor $S(f, G, P, \xi) = 1$. Ezért a $\int_0^1 f(x) dG(x)$ a közelítő összegnek nem létezik a határértéke, azaz a Riemann–Stieltjes-integrál nem definiálható. □

A korlátos változású függvények egy jellemzését adja a következő tétel, amelyet bizonyítás nélkül tekintünk.

3.123. Tétel. A $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor korlátos változású, ha létezik olyan M szám, hogy az $[a, b]$ intervallum bármely $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ beosztására

$$\sum_{k=0}^{n-1} |G(x_{k+1}) - G(x_k)| \leq M.$$

3.124. Definíció. Ha G korlátos változású $[a, b]$ -n, akkor a

$$V_a^b(G) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_P \sum_{k=0}^{n-1} |G(x_{k+1}) - G(x_k)|$$

számot (ahol a supremumot az $[a, b]$ összes beosztására vesszük) a G függvény $[a, b]$ intervallumra vonatkozó teljes változásának hívjuk.

A definícióból könnyen adódnak a teljes változás alábbi tulajdonságai:

3.125. Állítás. Legyen G, G_1, G_2 korlátos változású függvények $[a, b]$ -n. Ekkor

1. G konstans $[a, b]$ -n, akkor és csak akkor, ha $V_a^b(G) = 0$;

2. ha G monoton $[a, b]$ -n, akkor $V_a^b(G) = |G(b) - G(a)|$;
3. ha $a \leq c \leq b$, akkor $V_a^b(G) = V_a^c(G) + V_c^b(G)$;
4. $V_a^b(G_1 + G_2) \leq V_a^b(G_1) + V_a^b(G_2)$;
5. minden $c \in \mathbb{R}$ -re $V_a^b(cG) = |c|V_a^b(G)$.

A teljes változás fogalma segítségével általánosíthatjuk a 3.117. Állítás 4. pontját, amely a Riemann–Stieltjes-integrál becslésére vonatkozik. A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

3.126. Állítás. Tegyük fel, hogy G korlátos változású függvény az $[a, b]$ -n, $|f(x)| \leq M$ az $[a, b]$ -n, és $f \in \mathcal{L}_S([a, b], G)$. Ekkor

$$\left| \int_a^b f(x) dG(x) \right| \leq MV_a^b(G).$$

3.11. A Lebesgue- és a Riemann–Stieltjes-integrál kapcsolata és egy valószínűségszámítási alkalmazás

Legyen (Ω, \mathcal{M}, P) egy valószínűségi mező, azaz egy olyan speciális mértéktér ahol

$$P(\Omega) = 1, \quad \text{továbbá} \quad P(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{M}.$$

Ebből világos, hogy

$$P(\emptyset) = 0 \quad \text{és} \quad 0 \leq P(A) \leq 1, \quad A \in \mathcal{M}.$$

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük, ha ξ mérhető. A ξ valószínűségi változó *várható értéke* alatt az

$$M(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP$$

mennyiséget értjük, feltéve, hogy $M(\xi)$ véges. Legyen ξ korlátos függvény, azaz van olyan $k, K \in \mathbb{R}$, hogy $k < \xi(\omega) < K$, $\omega \in \Omega$. Ekkor

$$k = kP(\Omega) \leq M(\xi) \leq KP(\Omega) = K,$$

azaz ξ -nek létezik a várható értéke. (Ha speciálisan $\xi(\omega) = c$, $\omega \in \Omega$, akkor $M(\xi) = c$.)

Vizsgáljuk tovább azt az esetet, amikor ξ korlátos és így $k < \xi(\omega) < K$, $\omega \in \Omega$. Legyen $k = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = K$ és legyen

$$A_i = \{\omega \in \Omega : x_{i-1} \leq \xi(\omega) < x_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ekkor

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{továbbá} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Így

$$M(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \xi dP,$$

és ezért

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1} P(A_i) \leq M(\xi) \leq \sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

3.127. Definíció. A $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* az

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\}), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvényt nevezzük.

Az F függvény monoton nem csökkenő és

$$P(A_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

ugyanis

$$\begin{aligned} P(A_i) &= P(\{\omega \in \Omega: x_{i-1} \leq \xi(\omega) < x_i\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x_i\} \setminus \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x_{i-1}\}) = F(x_i) - F(x_{i-1}). \end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1}[F(x_i) - F(x_{i-1})] \leq M(\xi) \leq \sum_{i=1}^n x_i[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Ha most a $[k, K]$ intervallum (x_0, \dots, x_n) beosztását minden határon túl finomítjuk, akkor

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1}[F(x_i) - F(x_{i-1})] \rightarrow \int_k^K x dF(x)$$

és

$$\sum_{i=1}^n x_i[F(x_i) - F(x_{i-1})] \rightarrow \int_k^K x dF(x).$$

Másrészt $F(x) = 0$ ha $x \leq k$ és $F(x) = 1$ ha $x > K$. Tehát

$$\lim_{\substack{k \rightarrow -\infty \\ K \rightarrow +\infty}} \int_k^K x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

és így a várható érték kiszámítására két kiszámítási módot is kapunk:

$$M(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Ez az összefüggés kapcsolatot teremt a valószínűségi mérték szerinti integrál és az eloszlásfüggvény szerinti Riemann–Stieltjes-integrál között.

3.128. Megjegyzés.

(a) A ξ valószínűségi változót *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz

$$\text{Im}(\xi) = \{c_1, c_2, \dots, c_m, \dots\}, \quad \text{ahol } c_1 < c_2 < \dots < c_m < \dots$$

Ekkor

$$P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = c_i\}) = p_i, \quad 0 \leq p_i \leq 1,$$

és így

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i c_i.$$

(b) A ξ valószínűségi változót *folytonos valószínűségi változónak* nevezzük, ha az eloszlásfüggvénye $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ ($x \in \mathbb{R}$) alakú, ahol f vagy Riemann- vagy Lebesgue-integrálható. Az f függvényt a valószínűségi változó *sűrűségfüggvényének* hívjuk. Ekkor

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \left(= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \right),$$

ahol az improprius integrál definíciója:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \lim_{\substack{k \rightarrow -\infty \\ K \rightarrow +\infty}} \int_k^K x f(x) dx.$$

3.129. Példa. A ξ valószínűségi változót *egyenletes eloszlásúnak* nevezzük a $[k, K]$ intervallumon, ha eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x > K, \\ \frac{x-k}{K-k}, & k \leq x \leq K, \\ 0, & x < k. \end{cases}$$

Ekkor a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{K-k}, & k < x < K, \\ 0, & x < k \text{ vagy } x > K \end{cases}$$

lesz, a várható értéke pedig

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_k^K \frac{x}{K-k} dx = \frac{1}{K-k} \frac{K^2 - k^2}{2} = \frac{K+k}{2}.$$

□