2. A z-transzformált

2.1. Egy információátviteli probléma

Legyen adott egy üzenetátviteli rendszerünk, amelyben az üzeneteket két alapjel – mondjuk a és b – segítségével kódoljuk és továbbítjuk. Egy üzenet formája az a és b alapjelekből álló valamely véges hosszúságú sorozat. Például: *abaabbb*. Ilyen rendszerekre példa lehet a telegráf vagy a binárisan kódolt adatátviteli rendszerek (fax, internet, stb.).

A rendszerben az a alapjel átviteléhez k_1, míg a b alapjel átviteléhez k_2 időegységre van szükség (k_1 és k_2 pozitív egész). Tegyük fel a meghatározottság kedvéért, hogy $k_2 \geq k_1$.

Kérdés: Hány olyan egymástól különböző üzenet (jelsorozat) van amelyek átviteléhez pontosan n időegység kell?

Jelölje s_n azon az egymástól különböző üzeneteknek a számát, amelyek pontosan n időegység alatt vihetők át. Ekkor s_n teljesíti a

$$s_n = s_{n-k_1} + s_{n-k_2}, \qquad n \geq k_2 \tag{2.1}$$

rekurzív összefüggést, mivel két eset van: ha az utolsó átvitt alapjel k_1 hosszú volt, akkor előtte összesen s_{n-k_1} db különböző $n - k_1$ hosszú jelsorozat lehet, ill. ha az utolsó átvitt alapjel k_2 hosszú volt, akkor előtte összesen s_{n-k_2} féle $n - k_2$ hosszú jelsorozat lehetett. Természetesen a rekurzív képletünk akkor határozza meg egyértelműen az (s_n) sorozatot, ha megadjuk a sorozat első k_2 db kezdeti értékét:

$$s_0 = u_0,\ s_1 = u_1,\ \ldots,\ s_{k_2-1} = u_{k_2-1}.$$

Speciális eset: Legyen az $a = \cdot$ átviteléhez szükséges idő egy egység, $k_1 = 1$ és a $b = -$ átviteléhez szükséges idő 2 egység, azaz $k_2 = 2$. Ekkor

n	s_n	lehetséges sorozatok
1	1	$\cdot$
2	2	$\cdot\cdot$; $-$
3	3	$\cdot\cdot\cdot$; $\cdot -$; $- \cdot$
4	5	$\cdot\cdot\cdot\cdot$; $\cdot\cdot -$; $\cdot - \cdot$; $- \cdot\cdot$; $- -$.

Látható, hogy ebben az esetben az

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + s_{n-2}, \qquad n \geq 2, \\ s_0 &= 1, \qquad s_1 = 1 \end{aligned}$$

rekurzió adja a probléma megoldását.

Az információelméletben az áteresztő csatorna kapacitását C-vel jelölik, ahol a C értéket a következő formulával definiálják:

$$C = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 s_n}{n}.$$

Kérdések:

- Mi az explicit képlete s_n-nek?
- Hogyan számolható ki az áteresztő csatorna C kapacitása? Hogyan változik a C, ha k_1 és k_2 változik?

A kérdések megválaszolásához nyújt segítséget az úgynevezett z-transzformált alkalmazása.

2.2. A z-transzformált

Tekitsünk egy (x_n) valós vagy komplex számokból álló sorozatot. Ebben a fejezetben minden sorozatról feltesszük, hogy az indexe 0-val indul, $n = 0, 1, 2, \dots$. (Ez az alkalmazásokban nem megszorítás, hiszen mindig át tudjuk úgy alakítani a sorozat képletét, hogy az indexe 0-val kezdődjön.)

2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozatnak létezik a *z-transzformáltja* a $z \in \mathbb{C}$ helyen, ha az

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

sor konvergens. Az $x = (x_n)$ sorozat $z \in \mathbb{C}$ helyen vett z-transzformáltját az

$$X(z), \quad \mathcal{Z}\{x_n\}(z), \quad \mathcal{Z}\{x\}(z)$$

szimbólumokkal szokás jelölni.

Valós vagy komplex számsorok konvergenciájának ellenőrzésére használhatjuk például a gyökkritériumot. Ezt alkalmazva a fenti sorra kapjuk, hogy $X(z)$ létezik, azaz a sor konvergens, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x_n}{z^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|x_n|}}{|z|} < 1,$$

és $X(z)$ nem létezik, azaz a végtelen sor nem konvergens, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x_n}{z^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|x_n|}}{|z|} > 1.$$

Jelölje ezért

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|},$$

feltéve, hogy a határérték létezik. Ekkor a fenti számolás azt adja, hogy $X(z)$ konvergens, ha $|z| > R$, és $X(z)$ divergens, ha $|z| < R$. Az R számot a z-transzformált *konvergenciasugárnak* nevezzük. Ha $R = 0$, akkor $X(z)$ létezik minden $z \neq 0$-ra. Megjegyezzük, hogy ha $|z| > R$, akkor a z-transzformált sora nem csak konvergens, hanem abszolút konvergens is.

Ha a konvergenciasugár fenti definíciójában szereplő határérték nem létezik, akkor a gyökkritérium általánosabb alakját használva kapjuk a fenti számoláshoz hasonlóan, hogy ha

$$|z| > R \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|},$$

akkor $X(z)$ létezik, ha pedig

$$|z| < \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|},$$

akkor $X(z)$ nem létezik. Ha tehát R véges, akkor a z-transzformált definiált a komplex számsík origó kozéppontú, R-sugarú körén kívül.

Megjegyezzük, hogy ha a z-transzformált változóját helyettesítjük a $w = 1/z$ új változóval, akkor a

$$X(1/w) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n w^n$$

hatványsort kapjuk, amit a sorozat *generátorfüggvényének* hívunk. Látható, hogy a generátorfüggvény és a z-transzformált között igen szoros a kapcsolat. Kombinatorikában például gyakran használják a generárotfüggvényt különböző feladatokban, de a differenciaegyenletek megoldására a z-transzformált módszert igen kényelmes használni, hiszen ennek a Laplace-transzformálthoz hasonló tulajdonságai vannak, ahogy ezt majd láthatjuk a fejezet során.

2.2. Példa. Számítsuk ki az $x_n = a^n, \quad (a \neq 0)$ sorozat z-transzformáltját!

A z-transzformált definícióját és a geometriai sor összegképletét alkalmazva kapjuk $|z| > |a|$-ra, hogy

$$\mathcal{Z}\{a^n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}.$$

Valóban, a konvergenciasugár ebben az esetben $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = |a|$. □

2.3. Példa. Tekintsük az $x_n = 1$ konstans sorozatot.

Ez az előbbi sorozat speciális esete $(a = 1)$, ezért

$$\mathcal{Z}\{1\}(z) = \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1.$$

□

2.4. Példa. Az *egység impulzus sorozat* vagy más néven a *Kronecker-delta sorozat* definíciója: adott k nemnegatív egészre $\delta_n^{(k)}$ legyen a következő

$$\delta_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad n = k \\ 0, & \text{ha} \quad n \neq k. \end{cases}$$

Definíció alapján

$$\mathcal{Z}\{\delta_n^{(k)}\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(k)} z^{-n} = z^{-k}, \qquad z \neq 0.$$

Speciálisan, ha $k = 0$, akkor

$$\mathcal{Z}\{\delta_n^{(0)}\}(z) = 1, \qquad z \neq 0.$$

□

2.5. Példa. Tekintsük a *Heaviside-sorozatot* vagy *egységugrás sorozatot*, azaz valamely k pozitív egészre

$$u_n^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n < k \\ 1, & \text{ha} \quad n \geq k. \end{cases}$$

Ekkor minden $|z| > 1$-re

$$\mathcal{Z}\{u_n^{(k)}\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z^{-k}}{1-z^{-1}} = \frac{z^{1-k}}{z-1}.$$

□

2.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy léteznek olyan $M \geq 0$ és $a > 0$ konstansok, hogy az (x_n) sorozatra*

$$|x_n| \leq M a^n, \qquad \textit{minden } n = 0, 1, \ldots \textit{-re.}$$

Ekkor az (x_n) sorozatnak létezik a z-tanszformáltja minden $|z| > a$-ra.

Bizonyítás: Mivel a feltétel szerint

$$\frac{|x_n|}{|z|^n} \le M\left(\frac{a}{|z|}\right)^n, \qquad \text{és} \qquad M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{|z|}\right)^n \quad \text{konvergens, ha } |z| > a,$$

ezért a majoráns kritérium alapján a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ sor is abszolút konvergens, azaz a z-transzformált létezik. □

Adott $k > 0$ egész, $a_1, \dots, a_k$ valós konstansok, (b_n) valós sorozat. Az

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} + b_n, \qquad n = k, k+1, \dots \tag{2.2}$$

egyenletet *k-adrendű konstans együtthatós lineáris rekurzív differenciaegyenletnek* hívjuk. Az egyenlet egyértelműen definiál egy (x_n) sorozatot, ha megadjuk a sorozat első k darab tagját:

$$x_0 = u_0, \dots, x_{k-1} = u_{k-1}, \tag{2.3}$$

ahol $u_0, \dots, u_{k-1}$ adott számok.

A következő állítás értelmében a (2.2)–(2.3) rekurzív sorozat mindig exponenciálisan korlátos, feltéve, hogy a (b_n) sorozat is az. Ebből következik, hogy a (2.2) egyenlet megoldásának mindig létezik a z-transzformáltja elég nagy $|z|$-re.

2.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (b_n) sorozat exponenciálisan korlátos, azaz léteznek olyan $B \ge 0$ és $b \ge 1$ számok, hogy $|b_n| \le Bb^n$ minden $n = k, k+1, \dots$ egész számra. Ekkor a (2.2)–(2.3) rekurzív sorozat is exponenciálisan korlátos, azaz léteznek olyan $M \ge 0$ és $a \ge 1$ számok, hogy $|x_n| \le Ma^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.*

Bizonyítás: Legyen $a = \max\{b, 2k|a_1|, \dots, 2k|a_k|\}$ és $M = \max\{2B, |u_0|, \dots, |u_{k-1}|\}$. Ekkor M definíciója alapján

$$|x_j| \le M \le Ma^j, \qquad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Tegyük fel, hogy $|x_j| \le M \le Ma^j$, $\quad j = 0, 1, \dots, n-1$ teljesül valamely $n \ge k$-ra. Megmutatjuk, hogy ekkor $|x_n| \le Ma^n$ is teljesül:

$$\begin{aligned}
|x_n| &= |a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} + b_n| \\
&\le |a_1||x_{n-1}| + |a_2||x_{n-2}| + \cdots + |a_k||x_{n-k}| + |b_n| \\
&\le |a_1|Ma^{n-1} + |a_2|Ma^{n-2} + \cdots + |a_k|Ma^{n-k} + Bb^n \\
&\le Ma^n\left(\frac{|a_1|}{a} + \frac{|a_2|}{a^2} + \cdots + \frac{|a_k|}{a^k} + \frac{B}{M}\right) \\
&\le Ma^n\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2}\right) \\
&= Ma^n,
\end{aligned}$$

amiből következik a tétel állítása. □

2.3. A z-transzformált tulajdonságai

2.8. Tétel (Linearitás). *Legyen $X(z)$ az (x_n) sorozat z-transzformáltja, amely konvergencia sugara R_1 és legyen $Y(z)$ az (y_n) sorozat z-transzformáltja, amely konvergencia sugara R_2. Ekkor bármely a és b komplex számokra*

$$\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\}(z) = aX(z) + bY(z), \qquad |z| > \max\{R_1, R_2\}.$$

Bizonyítás: Legyen $|z| > \max\{R_1, R_2\}$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(ax_n + by_n)z^{-n}| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a||x_n z^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |b||y_n z^{-n}| < \infty,$$

tehát a bal oldalon álló z-transzformált is létezik, és az értéke

$$Z\{ax_n + by_n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(ax_n + by_n)z^{-n} = a\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} + b\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = aX(z) + bY(z).$$

□

2.9. Példa. Számítsuk ki az $x_n = \sin an$ sorozat z-transzformáltját!

Az Euler-formula szerint

$$\sin an = \frac{e^{ian} - e^{-ian}}{2i},$$

így a z-transzformált linearitását használva

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\sin an\} &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{Z}\{e^{ian}\} - \mathcal{Z}\{e^{-ian}\}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z - e^{ia}} - \frac{z}{z - e^{-ia}}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\frac{z^2 - ze^{-ia} - z^2 + ze^{ia}}{z^2 - (e^{ia} + e^{-ia})z + 1} = \frac{z\sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}.\end{aligned}$$

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\mathcal{Z}\{\cos an\} = \frac{z^2 - z\cos a}{z^2 - 2z\cos a + 1}.$$

□

Bizonyítás nélkül tekintsük a következő állítást:

2.10. Tétel (Unicitás tétel). *Legyen az (x_n) és (y_n) két sorozat, amelyek $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ és $Y = \mathcal{Z}\{y_n\}$ z-transzformáltjai konvergensek a $|z| > R_1$, illetve $|z| > R_2$ tartományokban. Ha $X(z) = Y(z)$, $|z| > \max\{R_1, R_2\}$, akkor $x_n = y_n$, minden $n = 0, 1, 2, \ldots$-re.*

A 2.10. Tétel szerint tehát a z-transzformáltnak egyértelmű inverz művelete létezik, amelyet *inverz z-tranzformáltnak* hívunk, és $\mathcal{Z}^{-1}$-gyel jelölünk. Azaz ha $\mathcal{Z}\{x_n\}(z) = X(z)$, akkor $\mathcal{Z}^{-1}(X) = x_n$.

A z-transzformált linearitásából könnyen igazolható az alábbi tulajdonság.

2.11. Tétel. *Az inverz z-transzformált lineáris, azaz minden a és b konstansra*

$$\mathcal{Z}^{-1}\{aX(z) + bY(z)\} = a\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} + b\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}.$$

2.12. Példa. Számítsuk ki az

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + z - 20}$$

függvény inverz z-transzformáltját!

A nevező szorzattá alakítható, így parciális törtekre alakítjuk a kifejezést, de egy z szorzótényezőt először kiemelünk:

$$\frac{z^2 - z}{z^2 + z - 20} = z\left(\frac{2}{3}\frac{1}{z+5} + \frac{1}{3}\frac{1}{z-4}\right) = \frac{2}{3}\frac{z}{z+5} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-4},$$

ezért

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{2}{3}(-5)^n + \frac{1}{3}4^n.$$

□

2.13. Példa. Számítsuk ki az

$$X(z) = \frac{4z^2 + z}{z^2 - z + 1}$$

függvény inverz z-transzformáltját!

A nevező nem alakítható szorzattá, így a szinusz és koszinusz azonosságokra vezetjük vissza a számolást:

$$\begin{aligned}\frac{4z^2 + z}{z^2 - z + 1} &= \frac{4z^2 + z}{z^2 - 2z\frac{1}{2} + 1} = \frac{4z^2 + z}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1} = \frac{4(z^2 - z\frac{1}{2}) + 3z}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1} \\ &= 4\frac{z^2 - z\cos\frac{\pi}{3}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1} + 2\sqrt{3}\frac{z\sin\frac{\pi}{3}}{z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{3} + 1},\end{aligned}$$

ezért

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right).$$

□

2.14. Tétel (Eltolás). *Legyen (x_n) olyan sorozat, amelyet (teszőleges módon) kiterjesztünk negatív indexekre is, legyen $u_n^{(k)}$ az egységugrás sorozat. Legyen továbbá az $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ z-transzformált konvergencia sugara R, és legyen $k > 0$ rögzített egész. Ekkor*

(a) $Z\{u_n^{(k)} x_{n-k}\} = z^{-k}X(z), \qquad |z| > R,$ *(eltolás jobbra)*

(b) $Z\{x_{n+k}\} = z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n}, \qquad |z| > R,$ *(eltolás balra).*

Bizonyítás: Az (a) rész következik a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)} x_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-(j+k)} = z^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j}$$

összefüggésekből, ahol a $j = n - k$ helyettesítést használtuk.

A (b) állítás hasonlóan adódik a $j = n + k$ helyettesítéssel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} z^{-n} = \sum_{j=k}^{\infty} x_j z^{k-j} = z^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j} - \sum_{j=0}^{k-1} x_j z^{-j}\right).$$

□

2.15. Tétel. *Legyen $a \neq 0$ komplex szám. Ha az (x_n) sorozat $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ z-transzformáltjának konvergencia sugara R, akkor*

$$\mathcal{Z}\{a^n x_n\}(z) = X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad |z| > R|a|.$$

Bizonyítás: Egyszerű számolással kapjuk

$$\mathcal{Z}\{a^n x_n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad \text{ha } \left|\frac{z}{a}\right| > R.$$

□

Az eltolási tétel lehetőséget ad differenciaegyenletek megoldására.

2.16. Példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+1} = 3x_n - 1, \qquad x_0 = 1$$

differenciaegyenletet!

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának z-transzformáltját

$$zX(z) - zx_0 = 3X(z) - \frac{z}{z-1},$$

és használjuk a kezdeti feltételt:

$$(z-3)X(z) = z - \frac{z}{z-1},$$

azaz

$$X(z) = \frac{z}{z-3} - \frac{z}{(z-1)(z-3)}.$$

Inverz z-transzformáltat számolva

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3} - \frac{z}{(z-1)(z-3)}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3} - z\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3}\right)\right\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{z}{z-3} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1}\right\} = \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

2.17. Tétel. *Ha az (x_n) sorozat $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ z-transzformáltjának konvergencia sugara R, akkor*

$$-zX'(z) = \mathcal{Z}\{nx_n\}(z), \qquad |z| > R,$$

általában,

$$(-1)^k z^k X^{(k)}(z) = \mathcal{Z}\{n(n+1)\cdots(n+k-1)x_n\}(z), \qquad |z| > R.$$

Bizonyítás: A z-transzformált konvergenciasugara definíciójából következik, hogy a $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n w^n$ hatványsor konvergál a $|w| < 1/R$ tartományon. Tudjuk, hogy egy hatványor tagonként differenciálható a konvergenciatartományán belül, azaz

$$g'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n w^{n-1}, \qquad |w| < 1/R.$$

Mivel $g(w) = X(1/w)$, ezért

$$-\frac{1}{w^2}X'\left(\frac{1}{w}\right) = g'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n w^{n-1},$$

azaz

$$-\frac{1}{w}X'\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} nx_n w^n.$$

A $z = 1/w$ helyettesítéssel kapjuk

$$-zX'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nx_n z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx_n\}(z), \qquad |z| > R.$$

A második állítás teljes indukcióval könnyen igazolható. □

2.18. Példa. Számítsuk ki az $x_n = n$ sorozat z-transzformáltját!

A 2.17. Tételt alkalmazva

$$\mathcal{Z}\{n\} = \mathcal{Z}\{n \cdot 1\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{1\cdot(z-1) - z\cdot 1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

□

2.19. Példa. Számítsuk ki az $x_n = n^2$ sorozat z-transzformáltját!

A 2.17. Tételt alkalmazva újra

$$\mathcal{Z}\{n^2\} = \mathcal{Z}\{n \cdot n\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = -z\frac{1\cdot(z-1)^2 - z\cdot 2(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

□

2.20. Példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = u_n^{(2)}, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 0$$

kezdeti érték feladatot!

z-transzformáltat számolva

$$z^2X(z) - z^2x_0 - zx_1 - 4zX(z) + 4zx_0 + 4X(z) = \frac{1}{z(z-1)},$$

amiből a kezdeti feltételeket is használva következik

$$X(z) = \frac{1}{z(z^2-4z+4)(z-1)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{z}{(z-2)^2(z-1)}.$$

Számítsuk ki először

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-2)^2(z-1)}\right\} &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{z\left(\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z/2}{(z/2-1)^2}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}2^n n - 2^n + 1 \\
&= 2^{n-1}n - 2^n + 1.
\end{aligned}$$

Ezért az jobbra eltolási tételt használva

$$x_n = u_n^{(2)} \left(2^{n-3}(n-2) - 2^{n-2} + 1\right).$$

A $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ inverz z-ztanszformáltat kiszámolhatjuk úgy is, hogy kiindulunk az

$$\begin{aligned} X(z) &= z \cdot \frac{1}{z^2(z-2)^2(z-1)} = z\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{z}{(z-2)^2} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

alakból. Ezért

$$x_n = -\frac{1}{4}\delta_n^{(1)} - \frac{1}{2}\delta_n^{(0)} + \frac{1}{8}2^n n - \frac{1}{2}2^n + 1.$$

Ellenőrizhető, hogy a fenti két képlet ugyanazt a sorozatot generálja. □

Bizonyítás nélkül tekintsük az alábbi eredményt.

2.21. Tétel (Kezdeti- és végérték tétel). *Legyen $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$. Ekkor*

(a) Kezdeti érték állítás:

$$\lim_{|z|\to+\infty} X(z) = x_0,$$

(b) Végérték állítás:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

(feltéve, hogy ez a határérték létezik).

2.22. Definíció. Az $x = (x_n)$ és $y = (y_n)$ sorozatok *konvolúciója* alatt azt az $x * y$-nal jelölt sorozatot értjük, amely általános tagja a következő összefüggéssel definiált:

$$(x * y)_n = \sum_{j=0}^{n} x_{n-j} y_j, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$(x * y)_n = \sum_{j=0}^{n} x_j y_{n-j}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Szokás egyszerűen az $x_n * y_n$ jelölést is használni a konvolúciós sorozat n-edik tagjára.

Könnyen ellenőrizhetők a konvolúció alábbi tulajdonságai:

2.23. Állítás. *Minden x, y, w sorozatra teljesül*

(a) kommutativitás: $x * y = y * x$,

(b) asszociativitás: $(x * y) * w = x * (y * w)$,

(c) disztributivitás: $(x + y) * w = x * w + y * w$,

(d) $x * O = O$, ahol $O_n \equiv 0$ az azonosan nulla sorozat.

2.24. Tétel (Konvolúciós tétel). *Ha $x = (x_n)$ és $y = (y_n)$ két sorozat, amelyek $X = \mathcal{Z}\{x_n\}$ és $Y = \mathcal{Z}\{y_n\}$ z-transzformáltjainak a konvergencia sugara R_1, illetve R_2, akkor azok konvolúciójának z-transzformáltja is létezik, és*

$$\mathcal{Z}\{x * y\}(z) = X(z)Y(z), \qquad |z| > \max\{R_1, R_2\}.$$

Bizonyítás: A konvolúció definícióját alkalmazva kapjuk

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x*y)_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} x_{n-j}y_j\right) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} x_{n-j}z^{-(n-j)}y_j z^{-j}.$$

Mivel $|z| > \max\{R_1, R_2\}$, ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ és $\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$ sorok abszolút konvergensek, ezért ezek Cauchy-szorzata is az, és

$$X(z)Y(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} x_{n-j}z^{-(n-j)}y_j z^{-j},$$

amiből következik az állítás. □

2.4. Alkalmazás

Térjünk vissza a 2.1. szakaszban definiált információátviteli probléma speciális esetéhez:

2.25. Példa. Számoljuk ki az

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1$$

rekurzív összefüggéssel definiált (s_n) sorozat képletét!

A z-transzformált kényelmes alkalmazásához írjuk át a rekurzív egyenletet az

$$s_{n+2} = s_{n+1} + s_n, \qquad n \geq 0$$

alakba. Legyen $S = \mathcal{Z}\{s_n\}$. Ekkor mindkét oldal z-transzformáltját véve és alkalmazva az eltolási tételt kapjuk, hogy

$$z^2 S(z) - z^2 s_0 - z s_1 = zS(z) - z s_0 + S(z),$$

ahova a kezdeti értékeket behelyettesítve

$$(z^2 - z - 1)S(z) = z^2,$$

azaz

$$S(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

$S(z)$ inverz z-transzformáltjának meghatározásához parciális törtekre bontunk, de úgy, hogy egy z szorzótényezőt meghagyunk a számlálóban:

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)} = z\left(\frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2}\right),$$

ahol

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ezt végigszámolva kapjuk

$$A = \frac{z_1}{z_1 - z_2} = \frac{z_1}{\sqrt{5}} \qquad \text{és} \qquad B = \frac{z_2}{z_2 - z_1} = -\frac{z_2}{\sqrt{5}},$$

és így

$$S(z) = \frac{z_1}{\sqrt{5}} \frac{z}{z - z_1} - \frac{z_2}{\sqrt{5}} \frac{z}{z - z_2}.$$

Ennek inverz z-transzformáltját véve

$$s_n = \frac{z_1}{\sqrt{5}} z_1^n - \frac{z_2}{\sqrt{5}} z_2^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

A 2.1. szakaszban definiált csatorna áteresztő képességét kiszámítva erre a sorozatra, kapjuk

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 s_n}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{n} = \\
& \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right)^{n+1} \right) \right)}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{5}} + \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \log_2 \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right)}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{5}}}{n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right)}{n} \\
&= 0 + \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 0,
\end{aligned}$$

azaz

$$C = \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,7.$$

□

Feladat: Vizsgáljuk meg a (2.1) rekurzió többi esetét is, pl. ha, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ vagy $k_1 = 1$, $k_2 = 4$, stb.

Két érdekes eset:

1. Legyen $1 \le k_1$ és $k_2 = 2k_1$. Mutassuk meg, hogy ekkor $C = \frac{1}{k_1} \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \approx \frac{1}{k_1} 0,7$
2. $k_1 = k_2 = k$, azaz $s_n = 2s_{n-k}$. Igazoljuk, hogy $C = \log_2 2^{1/k} = \frac{1}{k}$.

2.26. Példa. Oldjuk meg az

$$x_{n+1} - 4y_n = 1, \quad y_{n+1} - x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1$$

differenciaegyenlet-rendszert! Az egyenletek mindkét oldalának z-transzformáltját véve

$$\begin{aligned} zX(z) - zx_0 - 4Y(z) &= \frac{z}{z-1} \\ zY(z) - zy_0 - X(z) &= 0, \end{aligned}$$

így a kezdeti feltételeket használva

$$\begin{aligned} zX(z) - 4Y(z) &= z + \frac{z}{z-1} \\ zY(z) - X(z) &= -z. \end{aligned}$$

Az algebrai egyenletrendszert megoldva kapjuk

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z(z-2)}{(z-1)(z+2)} = z\left(\frac{4}{3}\frac{1}{z+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{z-1}\right) \\ Y(z) &= -\frac{z^2}{(z-1)(z+2)} = z\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{z+2} - \frac{1}{3}\frac{1}{z-1}\right). \end{aligned}$$

Ezért a megoldás

$$x_n = \frac{4}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}, \qquad y_n = -\frac{2}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}.$$

□