1. A Laplace-transzformált

1.1. Valós változós komplex értékű függvények, komplex improprius integrálok

Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok és $\mathbb{C}$ a komplex számok halmazát.

Legyen (z_n) egy komplex számokból álló sorozat. Azt mondjuk, hogy a (z_n) komplex sorozat *konvergens*, és határértéke $z \in \mathbb{C}$, ha bármely ε pozitív számhoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $|z_n - z| < \varepsilon$, ha $n \geq N$. A jelölés $z = \lim_{n\to\infty} z_n$. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a (z_n) sorozat határértéke z, ha a $|z_n - z|$ valós számokból álló sorozat 0-hoz tart, ha $n \to \infty$.

Látható, hogy a komplex sorozatok határétrékének definíciója szó szerint megegyezik a valós esetben használt definícióval, csak valós abszolút érték helyett komplex abszolút érték szerepel a definícióban. A komplex abszolút érték algebrai tulajdonságai megegyeznek a valós abszolút érték tulajdonságaival, ezért a valós esetre ismert határértékre vonatkozó állítások (pl. összeg sorozat határértéke a határértékek összege, stb.) és bizonyításaik szó szerint átvihetők a komplex esetre, így ezeket itt nem részletezzük. Megjegyezzük, hogy csak a monotonitást használó tulajdonságoknak (mint például a valós sorozatokra vonatkozó rendőr elv) nincs komplex megfelelője, hiszen komplex számokra nem definiálható a $\leq$ rendezési reláció.

A következő eredmény is visszavezeti a komplex sorozatok határértékének számítását valós sorozatok határértékének számítására. Jelölje szokás szerint i a komplex képzetes egységet, azaz $i^2 = -1$.

1.1. Tétel. *Legyen (z_n) egy komplex sorozat, x_n ill. y_n a valós ill. képzetes része z_n-nek, azaz $z_n = x_n + iy_n$, és hasonlóan $z = x + iy$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ határérték létezik. Ekkor az

$$|x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |z_n - z|$$

egyenlőtlenségből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ugyanígy mutatható meg a $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ reláció is.

Fordítva, ha feltesszük, hogy a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ és $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ határértékek léteznek, akkor a határérték tulajdonságai szerint

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

azaz a (z_n) sorozat konvergál z-hez. □

Legyen $g\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ adott komplex értékű függvény. Jelölje $u = \operatorname{Re} g$, ill. $v = \operatorname{Im} g$ a g függvény valós, ill. képzetes részét, azaz

$$g(t) = u(t) + iv(t).$$

A komplex értékű *g függvény határértékét* ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben: a g függvény határértéke a t_0 pontban az L komplex szám, ha bármely ε pozitív számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|g(t) - L| < \varepsilon$, ha $0 < |t - t_0| < \delta$. Ugyanúgy, mint a valós esetben, sorozatokkal is megfogalmazhatjuk a definíciót: $\lim_{t\to t_0} g(t) = L$, ha minden olyan (t_n) valós sorozatra, amelyre $t_n \neq t_0$ minden $n - re$ és $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, teljesül, hogy $\lim_{n\to\infty} g(t_n) = L$.

A sorozatokra vonatkozó esethez hasonlóan kapjuk a következő eredményt.

1.2. Tétel. *Legyen* $g(t) = u(t) + iv(t)$, $L = p + iq$. *Ekkor a*

$$\lim_{t\to t_0} g(t) = L$$

határérték akkor és csak akkor létezik, ha a

$$\lim_{t\to t_0} u(t) = p \qquad \textit{és} \qquad \lim_{t\to t_0} v(t) = q$$

határértékek léteznek.

Komplex értékű függvény deriváltját is a valós esetnek megfelelően definiáljuk: Azt mondjuk, hogy g *differenciálható* a t_0 pontban, ha a

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h}$$

határérték létezik, és ekkor a határértéket a g függvény t_0 pontbeli differenciálhányadosának hívjuk, és $g'(t_0)$-lal jelöljük.

Az 1.2. Tételből következik rögtön az alábbi állítás.

1.3. Tétel. *A* $g(t) = u(t) + iv(t)$ *komplex értékű függvény akkor és csak akkor differenciálható a* t *pontban, ha az* u *és* v *függvények differenciálhatók* t*-ben, és ekkor*

$$g'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

A g függvény *korlátos* $[a, b]$-n, ha a

$$|g(t)| = \sqrt{(u(t))^2 + (v(t))^2}$$

valós függvény korlátos $[a, b]$-n. Nyilván g akkor és csak akkor korlátos, ha az u és v függvények korlátosak.

Legyen $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ az $[a, b]$ intervallum egy *beosztása*, jelölje $|P| = \max\{t_{k+1} - t_k \colon k = 0, 1, \ldots, n - 1\}$ a *beosztás finomságát*, legyen $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ egy *közbülső pontok rendszere*, azaz $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$. A $g\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ függvény *Riemann-féle közelítő összegén* az

$$S(g, P, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$$

komplex számot értjük. A g komplex értékű függvényt az $[a, b]$ intervallumon *Riemann-integrálhatónak* nevezünk, ha létezik olyan I komplex szám, hogy bármely ε pozitív számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|S(g, P, \xi) - I| < \varepsilon$ minden olyan P beosztásra, amelyre $|P| < \delta$ és minden a beosztáshoz tartozó ξ közbülső pontrendszerre.

Nyilvánvalóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
S(g, P, \xi) &= \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (u(\xi_k) + iv(\xi_k))(t_{k+1} - t_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} u(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) \\
&= S(u, P, \xi) + iS(v, P, \xi),
\end{aligned}$$

amiből könnyen ellenőrizhető az alábbi eredmény.

1.4. Tétel. *A $g(t) = u(t) + iv(t)$ komplex értékű függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha az u és v függvények Riemann-integrálhatók $[a,b]$-n, és ekkor*

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Ha g Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor g korlátos is, mivel az u és v valós függvények integrálhatóságából (valós függvényekre ismert eredmény szerint) következik azok korlátossága.

Azt mondjuk, hogy g *abszolút Riemann-integrálható* $[a,b]$-n, ha a $|g|$ valós függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

1.5. Tétel. *Ha a $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor g abszolút Riemann-integrálható $[a,b]$-n, továbbá*

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \le \int_a^b |g(t)|\,dt.$$

Bizonyítás: A feltétel szerint g Riemann-integrálható, így $u = \operatorname{Re} g$ és $v = \operatorname{Im} g$ is az. Valós függvényekre ismert eredmény szerint ebből következik, hogy a $|g| = \sqrt{u^2+v^2}$ függvény is Riemann-integrálható, azaz g abszolút Riemann-integrálható. Ha az egyenlőtlenség bal oldala 0, akkor készen vagyunk, hiszen a jobb oldalon álló Riemann-integrálban az integrandus nemnegatív, így a Riemann-integrál sem lehet negatív. Amennyiben a bal oldal pozitív, jelölje

$$z = \int_a^b g(t)\,dt \in \mathbb{C}, \qquad c = \frac{\bar{z}}{|z|} \in \mathbb{C}.$$

Ekkor

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = |z| = zc = \int_a^b g(t)c\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)c)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im}(g(t)c)\,dt,$$

és mivel a kiindulási érték egy valós szám, ezért

$$\int_a^b \operatorname{Im}(g(t)c)\,dt = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| &= \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)c)\,dt = \left|\int_a^b \operatorname{Re}(g(t)c)\,dt\right| \le \int_a^b |\operatorname{Re}(g(t)c)|\,dt \\ &\le \int_a^b |g(t)c|\,dt = \int_a^b |g(t)||c|\,dt = \int_a^b |g(t)|\,dt.\end{aligned}$$

□

1.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ függvény *szakaszonként folytonos* $[a,b]$-n, ha legfeljebb véges számú szakadási helye van $[a,b]$-n, és minden szakadási helyén a jobb és bal oldali határértékei léteznek és végesek.

Valós függvényekre ismert tulajdonságból következik rögtön:

1.7. Tétel. *Ha a $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ függvény szakaszonként folytonos, akkor Riemann-integrálható (és így abszolút Riemann-integrálható is) $[a,b]$-n.*

1.8. Megjegyzés. Világos, hogy egy komplex értékű függvény akkor és csak akkor szakaszonként folytonos $[a, b]$-n, ha a valós része és képzetes része által definiált függvények szakaszonként folytonosak $[a, b]$-n.

Legyen $I = (c, d]$ $(-\infty \le c < d < \infty)$ vagy $I = [c, d)$ $(-\infty < c < d \le \infty)$ vagy $I = (-\infty, \infty)$, és legyen $h : I \to \mathbb{C}$. Ha a h függvény az értelmezési tartományának bármely korlátos zárt részintervallumán Riemann-integrálható, akkor azt mondjuk, hogy *h lokálisan Riemann-integrálható I-n.*

Legyen $h : (c, d] \to \mathbb{C}$, $-\infty \le c < d < \infty$ (vagy $h : [c, d) \to \mathbb{C}$, $-\infty < c < d \le \infty$). Azt mondjuk, hogy a h függvénynek létezik az *improprius integrálja* a $(c, d]$ (illetve $[c, d)$) intervallumon, ha a következő határértékek léteznek és végesek:

$$\int_c^d h(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to c+} \int_a^d h(t)\,dt \qquad \left(\int_c^d h(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to d-} \int_c^b h(t)\,dt\right).$$

Azt mondjuk, hogy a h függvény *abszolút improprius integrálható* a $(c, d]$ (illetve $[c, d)$) intervallumon, ha

$$\int_c^d |h(t)|\,dt = \lim_{a\to c+} \int_a^d |h(t)|\,dt < \infty \qquad \left(\int_c^d |h(t)|\,dt = \lim_{b\to d-} \int_c^b |h(t)|\,dt < \infty\right).$$

1.9. Tétel. *Ha a $h : (c, d] \to \mathbb{C}$, $-\infty \le c < d < \infty$ (vagy $h : [c, d) \to \mathbb{C}$, $-\infty < c < d \le \infty$) függvény lokálisan Riemann-integrálható és abszolút improprius integrálható $(c, d]-n$ (illetve $[c, d)-n$), akkor az improprius integrálja szintén létezik ugyanezen az intervallumon, és*

$$\left|\int_c^d h(t)\,dt\right| \le \int_c^d |h(t)|\,dt < \infty.$$

Bizonyítás: Az improprius integrál létezése következik a Cauchy-féle konvergencia kritériumból, az 1.5. Tételből, valamint az abszolút improprius integrál létezéséből. A fenti egyenlőtlenség pedig határátmenettel kapható az 1.5. Tételből. A részletek kidolgozását az olvasóra bízzuk. □

A Laplace-transzformáció bevezetéséhez és annak tanulmányozásához szükségünk lesz a következő két fogalomra:

1.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvény *szakaszonként folytonos* $[0, \infty)$-n, ha bármely $[0, A]$ véges intervallumon szakaszonként folytonos.

1.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvény *exponenciálisan korlátos* a $[0, \infty)$ intervallumon, ha van olyan $M > 0$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \qquad t \ge 0.$$

1.12. Megjegyzés. Ha $h\colon (c, d) \to \mathbb{C}$, $(-\infty \le c < d \le \infty)$ a (c, d) intervallumon szakaszonként folytonos függvény, akkor a h függvény (c, d)-n vett improprius integrálja alatt a

$$\int_c^d h(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^b h(t)\,dt + \int_b^d h(t)\,dt$$

összefüggéssel definiált értéket értjük, feltéve, hogy az $\int_c^b h(t)\,dt$ és $\int_b^d h(t)\,dt$ improprius integrálok léteznek valamely rögzített $b \in (c, d)$-re. Világos, hogy a h improprius integrálhatósága és improprius integráljának értéke nem függ a $b \in (c, d)$ érték választásától.

A műszaki alkalmazásokban fontos a következő tétel:

1.13. Tétel. *Ha az* $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *függvény szakaszonként folytonos és exponenciálisan korlátos* $[0,\infty)$*-en, akkor létezik olyan* $s_0 \in \mathbb{R}$*, hogy a* $[0,\infty) \to \mathbb{C}$*,* $t \mapsto e^{-st}f(t)$ *függvény abszolút improprius integrálható* $[0,\infty)$*-en minden olyan rögzített komplex* $s \in \mathbb{C}$ *esetén, amelyre* $\operatorname{Re} s > s_0$*, azaz*

$$\int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right| dt < \infty, \qquad \operatorname{Re} s > s_0.$$

Bizonyítás: Legyen $s \in \mathbb{C}$ rögzített komplex szám. Ekkor

$$\left|e^{-st}f(t)\right| = e^{-(\operatorname{Re} s)t}\left|e^{-i(\operatorname{Im} s)t}\right| |f(t)| = e^{-(\operatorname{Re} s)t}\,|f(t)|\,, \qquad t \geq 0,$$

mivel

$$\left|e^{-i(\operatorname{Im} s)t}\right| = |\cos(\operatorname{Im} s)t - i\sin(\operatorname{Im} s)t| = 1.$$

A feltételeink szerint f exponenciálisan korlátos $[0,\infty)$-en, ami azt jelenti, hogy

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, \qquad t \geq 0$$

bizonyos $M > 0$ és $s_0 \in \mathbb{R}$ állandókkal. Így

$$\left|e^{-st}f(t)\right| \leq Me^{(s_0-\operatorname{Re} s)t}, \qquad t \geq 0.$$

Legyen $A > 0$ tetszőlegesen rögzített valós szám. Ekkor az

$$\int_0^A |e^{-st}f(t)|\,dt$$

integrál létezik, mivel az integrandus szakaszonként folytonos. Ha $\operatorname{Re} s > s_0$ akkor

$$\int_0^A |e^{-st}f(t)|\,dt \leq \int_0^A Me^{(s_0-\operatorname{Re} s)t}\,dt = M\frac{1}{s_0-\operatorname{Re} s}\left(e^{(s_0-\operatorname{Re} s)A}-1\right) \to \frac{M}{\operatorname{Re} s - s_0} < \infty,$$

$A \to +\infty$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az

$$\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A |e^{-st}f(t)|\,dt$$

határérték létezik és véges minden olyan $s \in \mathbb{C}$ esetén, amelyre $\operatorname{Re} s > s_0$. □

1.2. A Laplace-transzformált és fontosabb tulajdonságai

1.14. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ függvény *Laplace-transzformáltja létezik* az $s \in \mathbb{C}$ helyen, ha az

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

integrál létezik. Azt az $F \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függényt pedig, amelyet az

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \tag{1.1}$$

összefüggés definiált olyan $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre az integrál létezik, az f függvény *Laplace-transzformáltjának* nevezzük. Az f függvényt szokás az $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformált *generátorfüggvényének* hívni.

Az f függvény Laplace-transzformáltját a szakirodalomban az

$$\mathcal{L}\{f\}(s),\ \mathcal{L}[f](s),\ \mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ \mathcal{L}[f(t)](s),\ \mathcal{L}\{f(\cdot)\}(s),\ \mathcal{L}[f(\cdot)](s)$$

vagy az általunk már használt $F(s)$ szimbólumokkal jelölik.

Legyen Λ azoknak a $[0,\infty)$-n értelmezett valós vagy komplex értékű függvényeknek a halmaza, amelyek szakaszonként folytonosak és exponenciálisan korlátosak $[0,\infty)$-en, továbbá folytonosak 0-ban. Az 1.13. Tételből következik, hogy minden Λ függvényosztályhoz tartozó függvénynek létezik a Laplace-transzformáltja.

1.15. Tétel (Egisztencia tétel). *Ha $f \in \Lambda$, ahol f exponenciális korlátja $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$, akkor f Laplace-transzformáltja létezik az $\{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} s > s_0\}$ komplex félsíkon.*

A legkisebb olyan $s_0 \in \mathbb{R}$ számot, amelyre az f függvény Laplace-transzformáltja létezik az $\{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} s > s_0\}$ komplex félsíkon, a Laplace-transzformált *konvergencia abszcisszájának* nevezzük.

A Laplace-transzformációt úgy is felfoghatjuk, mint egy leképezést: bármely $f \in \Lambda$ függvényhez hozzárendelhetjük az $\mathcal{L}\{f\} = F \in (\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ Laplace-transzformált függvényt, amely értelmezve van minden olyan $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. A következő tétel mutatja, hogy ez a leképezés lineáris a következő értelemben:

1.16. Tétel (linearitás). *Ha $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ és $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ két olyan függvény, amelynek létezik a Laplace-transzformáltja az $s \in \mathbb{C}$ helyen, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{C}$ konstansok esetén az $af + bg$ függvény Laplace-transzformáltja is létezik az s helyen és*

$$\mathcal{L}\{af + bg\}(s) = a\mathcal{L}\{f\}(s) + b\mathcal{L}\{g\}(s).$$

Bizonyítás: Feltételünk szerint

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad \text{és} \qquad \mathcal{L}\{g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt$$

egyaránt létezik. Így

$$a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(af(t) + bg(t)\right)\, dt,$$

a kívánt összefüggés teljesül. □

1.17. Példa. Számítsuk ki az $f(t) \equiv 1,\ (t \ge 0)$. függvény Laplace-transzformáltját!

Ekkor $f \in \Lambda$, ugyanis $|f(t)| \le 1e^{0t}$, $t \ge 0$, és így

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{-s}\left(e^{-sA} - 1\right) = \frac{1}{s},$$

ha $\operatorname{Re} s > 0$. □

1.18. Példa. Számítsuk ki az $f(t) = e^{zt},\ (t \ge 0),\ z \in \mathbb{C}$ függvény Laplace-transzformáltját!

Ekkor $f \in \Lambda$, ugyanis $|f(t)| \le e^{(\operatorname{Re} z)t}$, $t \ge 0$, és így

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{zt}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{zt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-z)t}\, dt = \frac{1}{s-z},$$

ha $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} z$, azaz $\operatorname{Re}(s-z) > 0$. □

1.19. Példa. Legyen $\beta \in \mathbb{R}$ rögzített, és számítsuk ki a $t \mapsto \cos\beta t$ és $t \mapsto \sin\beta t$ függvények Laplace-transzformáltját!

Az Euler-formula szerint

$$e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t \qquad \text{és} \qquad e^{-i\beta t} = \cos\beta t - i\sin\beta t,$$

és ezek segítségével a cos és sin függvények

$$\cos\beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin\beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$$

alakba írhatók át tetszőleges t-re. Így

$$\mathcal{L}\left\{\cos\beta t\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{i\beta t} + \frac{1}{2}e^{-i\beta t}\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-i\beta} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+i\beta} = \frac{s}{(s-i\beta)(s+i\beta)} = \frac{s}{s^2+\beta^2},$$

ha $\operatorname{Re} s > 0$.

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\sin\beta t\right\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

□

Az alkalmazásokban fontosak a Laplace-transzformált alábbi tulajdonságai.

1.20. Tétel (Csillapítási tétel). *Legyen* $f \in \Lambda$, $F = \mathcal{L}\{f\}$, $z \in \mathbb{C}$. *Ekkor a*

$$[0,\infty) \ni t \mapsto e^{-zt} f(t) \in \mathbb{C}$$

függvény is a Λ *osztályba tartozik, és*

$$\mathcal{L}\{e^{-zt}f(t)\}(s) = F(s+z),$$

minden olyan esetben, amikor $\operatorname{Re} s$ *elég nagy.*

Bizonyítás: Mivel $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eleme a Λ halmaznak, ezért f és vele együtt a $[0,\infty) \ni t \mapsto e^{-zt}f(t)$ függvény is szakaszonként folytonos $[0,\infty)$-en (itt felhasználtuk, hogy az exponenciális függvény folytonos a $[0,\infty)$-en). Továbbá feltételünk szerint vannak olyan $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \qquad t \ge 0,$$

és így

$$|e^{-zt}f(t)| \le e^{(-\operatorname{Re} z)t} \cdot Me^{\alpha t} = Me^{(\alpha - \operatorname{Re} z)t}, \qquad t \ge 0.$$

Tehát a $[0,\infty) \in t \mapsto e^{-zt}f(t)$ függvény szintén eleme a Λ függvényosztálynak, és így

$$\mathcal{L}\{e^{-zt}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-zt}f(t)\,dt$$

létezik, ha $\operatorname{Re} s > \alpha - \operatorname{Re} z$. Másrészt

$$\mathcal{L}\{e^{-zt}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-(s+z)t}f(t)\,dt = \mathcal{L}\{f\}(s+z)$$

minden olyan esetben, amikor $\operatorname{Re} s > \alpha - \operatorname{Re} z$. □

1.21. Példa. A csillapítási tételt alkalmazva kapjuk az

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\}(s) = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \qquad \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\beta t\}(s) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

azonosságokat. □

A következő tétel egy adott függvény és differenciálhányadosának Laplace-transzformáltja között mutat meg összefüggést.

1.22. Tétel. *Legyen* $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *olyan függvény, amely differenciálható, és deriváltjával együtt a* Λ *függvényosztályba tartozik. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0),$$

minden $s \in \mathbb{C}$ *-re, amely valós része elegendően nagy.*

Bizonyítás: Mivel $f, f' \in \Lambda$ ezért ezeknek a függvényeknek létezik a Laplace-transzformáltjuk minden olyan $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. Másrészt $f \in \Lambda$ -ból következik, hogy

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \qquad t \ge 0,$$

valamely $M > 0$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ állandókkal, és így

$$|e^{-sA}f(A)| \le Me^{-(\operatorname{Re} s-\alpha)A} \to 0, \quad \text{ha} \quad A \to +\infty \quad \text{és} \quad \operatorname{Re} s > \alpha.$$

Legyen $s \in \mathbb{C}$ tetszőlegesen rögzített úgy, hogy $\operatorname{Re} s > \alpha$ és

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

létezik. Tetszőleges $A > 0$ esetén a parciális integrálás szabálya szerint

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt = e^{-sA}f(A) - f(0) + \int_0^A se^{-st} f(t)\,dt,$$

amiből a $A \to +\infty$ határátmenettel kapjuk a

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

összefüggést. Ezzel a tételt bizonyítottuk. □

Az 1.22. Tétel következményeként könnyen beláthatók a következő állítások.

1.23. Következmény. *Ha* $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$, *és* $f, f', f'', \dots, f^{(n)} \in \Lambda$, *akkor*

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0), \qquad \textit{ha } \operatorname{Re} s \textit{ elég nagy},$$

illetve tetszőleges pozitív egész n*-re*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \qquad \textit{ha } \operatorname{Re} s \textit{ elég nagy.}$$

Bizonyítás: Az előző tétel alapján

$$\mathcal{L}\left\{f'\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{f\right\}(s) - f(0).$$

Másrészt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f''\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{(f')'\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{f'\right\}(s) - f'(0) \\ &= s(s\mathcal{L}\left\{f\right\}(s) - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\left\{f\right\}(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

A második állítás teljes indukcióval igazolható. □

Eddig mindig arról az esetről beszéltünk, amikor egy időtartományban ismert (azon kívül 0-nak definiált) függvény Laplace-transzformáltját kerestük. Az alkalmazásokban azonban sokszor van szükségünk a fordított feladat megoldására:

Adott egy $F \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex függvény, amely minden olyan $s \in \mathbb{C}$ -re definiálva van amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. Keresünk egy olyan $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvényt, amelyre $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ teljesül minden olyan s-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. Ha találunk egy ilyen f függvényt, akkor azt az F függvény *inverz Laplace-transzformáltjának* nevezzük, és $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$-fel jelöljük. Kérdés persze, hogy az inverz Laplace-transzformáció egyértelműen definiált-e, azaz lehet-e az f-től különböző g függvényt találni úgy, hogy

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) = F(s)$$

teljesüljön minden olyan s-re, amely valós része elegendően nagy. Ha például f és g definíciója csak véges sok pontban különbözik, akkor a Riemann-integrálјuk azonos lesz, és ezért $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$, azaz ekkor az inverz művelet nem egyértelműen definiált. A következő tétel értelmében (amelyet nem bizonyítunk) ha az $\mathcal{L}\{f\} = F$ egyenletnek adott F-re van folytonos f megoldása, akkor az egyértelmű. Ekkor az $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ jelölésen ennek az egyenletnek a folytonos megoldását értjük.

1.24. Tétel (Unicitás tétel). *Ha $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ és $g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ két olyan folytonos függvény amelyek elemei a Λ függvényosztálynak, és Laplace-transzformáltjaikra teljesül*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$$

minden $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ *elegendően nagy, akkor*

$$f(t) = g(t), \qquad t \geq 0.$$

A Laplace-transzformált linearitásából rögtön következik:

1.25. Tétel. *Az inverz Laplace-transzformáció lineáris, azaz ha $F = \mathcal{L}\{f\}$, $G = \mathcal{L}\{g\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, akkor*

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF + bG\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G\}.$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{L}\{a\mathcal{L}^{-1}\{F\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G\}\} = \mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\} = aF + bG.$$

□

1.26. Példa. Számítsuk ki az

$$F(s) = \frac{19 - 2s}{s^2 + s - 6}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

Parciális törtekre bontva kapjuk

$$F(s) = \frac{19-2s}{s^2+s-6} = \frac{3}{s-2} - \frac{5}{s+3},$$

ezért az inverz Laplace-transzformált linearitását alkalmazva

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t) - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t) = 3e^{2t} - 5e^{-3t}.$$

□

1.27. Példa. Számítsuk ki az

$$F(s) = \frac{3s-1}{s^2+4s+13}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját!

A tört nevezője most nem alakítható szorzattá, így teljes négyzetté alakítással kezdjük:

$$F(s) = \frac{3s-1}{s^2+4s+13} = \frac{3s-1}{(s+2)^2+9} = \frac{3(s+2)-7}{(s+2)^2+9} = 3\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{7}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

ezért az inverz Laplace-transzformált linearitását, a csillapítási tételt és a cos és sin függvényekre vonatkozó azonosságokat alkalmazva

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\}(t) - \frac{7}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\}(t) = 3e^{-2t}\cos 3t - \frac{7}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

□

A Laplace-tanszformált fontos alkalmazását teszi lehetővé a következő tétel, amelyet itt nem bizonyítunk.

1.28. Tétel. *Legyen* $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, amely a* $[0,\infty)$*-en* n*-szer differenciálható* ($n \in \mathbb{N}$)*, és eleget tesz az*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = g(t), \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

differenciálegyenletnek, ahol $a_0, ..., a_{n-1}$ *adott konstansok és a* $g:\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *függvény a* Λ *függvényosztály eleme. Továbbá* x *kielégíti az*

$$x(0) = u_0,\ x'(0) = u_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \tag{1.3}$$

kezdeti feltételeket adott $u_0, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$ *értékekkel. Ekkor az* x *függvény folytonos és exponenciálisan korlátos a* $[0,\infty)$*-en, és így eleme* Λ*-nak, továbbá* $x', x'', \ldots, x^{(n)} \in \Lambda$ *is teljesül.*

Az (1.2)-(1.3) alakú, ú.n. kezdeti érték feladatok megoldhatók Laplace-transzformált segítségével. A módszert a következő példán mutatjuk be.

1.29. Példa. Tekinstük az

$$x'' - 4x = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot.

Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját:

$$\mathcal{L}\{x''\} - 4\mathcal{L}\{x\} = 0.$$

Használva az $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$ jelölést valamint a második derivált Laplace-transzformáltjára vonatkozó azonosságot, kapjuk

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) - 4X(s) = 0.$$

A kezdeti értékeket használva

$$(s^2 - 4)X(s) = s,$$

azaz

$$X(s) = \frac{s}{s^2 - 4}.$$

Inverz Laplace-transzformáltat számolva megkapjuk a kezdeti érték feladat megoldását

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\right\} = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

□

1.3. A Laplace-transzformált további tulajdonságai

1.30. Lemma. *Ha az $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ függvény a Λ osztályba tartozik, akkor tetszőleges pozitív k-ra a $[0,\infty) \ni t \mapsto t^k f(t)$ függvény is a Λ osztályba tartozik, és a Laplace-transzformáltja létezik minden olyan $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy.*

Bizonyítás: Mivel f a Λ osztályba tartozik, ezért f a $[0,\infty)$-en szakaszonként folytonos, és van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, $M > 0$, hogy

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}, \qquad t \ge 0.$$

Másrészt a $[0,\infty) \ni t \to t^k$ függvény folytonos, továbbá

$$t^k \le M_1 e^{\varepsilon t}, \qquad t \ge 0,$$

ahol $\varepsilon > 0$ valamely rögzített valós szám és

$$M_1 = \sup_{t \ge 0}\left\{e^{-\varepsilon t} t^k\right\} < \infty.$$

($M_1 < \infty$, ugyanis az exponenciális függvény gyorsabban nő mint a hatványfüggvény.) Így

$$|t^k f(t)| \le M_1 e^{\varepsilon t} M e^{\alpha t}, \qquad t \ge 0,$$

azaz

$$|t^k f(t)| \le M_2 e^{\alpha_2 t}, \qquad t \ge 0,$$

ahol $M_2 = M_1 M$ és $\alpha_2 = \alpha + \varepsilon$.

Másrészt a $[0,\infty) \ni t \to t^k$ függvény folytonos, és így a $[0,\infty) \ni t \mapsto t^k f(t)$ függvénynek csak ott lehet szakadása, ahol f-nek van. Ez azt jelenti, hogy a $[0,\infty) \ni t \mapsto t^k f(t)$ függvény is szakaszonként folytonos $[0,\infty)$-n. Ezzel a lemma bizonyítása teljes. □

1.31. Tétel. *Ha az $f:\ [0,\infty)\to\mathbb{C}$ függvény a Λ osztályba tartozik, akkor van olyan $s_0\in\mathbb{R}$, hogy az*

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt,\qquad s\in(s_0,\infty)$$

függvény az s változója szerint akárhányszor differenciálható (s_0,∞)-en, és tetszőleges k pozitív egész számra

$$F^{(k)}(s)=(-1)^k\int_0^\infty e^{-st}t^kf(t)\,dt,\qquad s\in(s_0,\infty).$$

Bizonyítás: Elsőnek megmutatjuk, hogy

$$F'(s)=-\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt,$$

utána pedig teljes indukcióval haladunk tovább.

Mivel $f\in\Lambda$, így van olyan $M>0$ és $\alpha\in\mathbb{R}$, hogy $|f(t)|\le Me^{\alpha t}$, $(t\ge 0)$. Legyen $s_0>\alpha$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor az 1.30. Lemma bizonyításából következik, hogy $\mathcal{L}\{tf(t)\}$ és $\mathcal{L}\{f\}$ is létezik minden $\operatorname{Re}s>s_0$-ra. Rögzítsünk egy ilyen s-t, és tekintsük a következő differenciahányadost:

$$\frac{F(s+h)-F(s)}{h}=\frac{\int_0^\infty e^{-(s+h)t}f(t)\,dt-\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt}{h}=\int_0^\infty\frac{e^{-ht}-1}{ht}e^{-st}tf(t)\,dt,$$

$h\neq 0$-ra. Másrészt

$$\begin{aligned}\left|e^{-ht}-1+ht\right| &= \left|\sum_{n=0}^\infty\frac{(-ht)^n}{n!}-1+ht\right|=\left|\sum_{n=2}^\infty\frac{(-ht)^n}{n!}\right|\\ &= (-ht)^2\left|\sum_{n=2}^\infty\frac{(-ht)^{n-2}}{(n-2)!}\frac{(n-2)!}{n!}\right|\le(|h|\,t)^2\,e^{+|h|t},\qquad t\ge 0,\end{aligned}$$

ugyanis

$$\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-1)n}\le 1,\qquad n\ge 2.$$

Így

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h}+\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt\right| &\le \int_0^\infty\left|\frac{e^{-ht}-1}{ht}+1\right||tf(t)||e^{-st}|\,dt\\ &\le \int_0^\infty|h|t^2e^{|h|t}|f(t)||e^{-st}|\,dt.\end{aligned}$$

Legyen $|h|<s_0-\alpha$. Ekkor $\operatorname{Re}s>|h|+\alpha$, és parciális integrálással kiszámítható, hogy

$$\int_0^\infty t^2e^{-(\operatorname{Re}s-|h|-\alpha)t}dt=\frac{2}{(\operatorname{Re}s-|h|-\alpha)^3}<\infty,$$

és ezért

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h}+\int_0^\infty te^{-st}f(t)\,dt\right| &\le |h|\int_0^\infty t^2|f(t)||e^{-st}|e^{|h|t}\,dt\\ &\le |h|M\int_0^\infty t^2e^{-(\operatorname{Re}s-|h|-\alpha)t}\,dt\to 0,\quad\text{ha}\quad h\to 0.\end{aligned}$$

Tehát az F függvény differenciálható s szerint bármely $s \in (s_0, \infty)$-re, továbbá

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\, dt, \qquad s \in (s_0, \infty).$$

Legyen

$$G(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\, dt, \qquad s \in (s_0, \infty).$$

Mivel ez egy Λ függvényosztályba tartozó $g(t) = tf(t)$ függvény Laplace-transzformáltja, G az s változója szerint differenciálható és

$$G'(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^2 f(t)\, dt, \qquad s \in (s_0, \infty).$$

Másrészt

$$F''(s) = G'(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^2 f(t)\, dt, \qquad s \in (s_0, \infty).$$

Ebből az előző lépést megismételve, teljes indukcióval kapjuk az állítást. □

Megjegyezzük, hogy az előbbi tétel bizonyítása szó szerint megismételhető arra az esetre is, amikor F-et valamint a deriváltjait is komplex függvényként tekintjük. (Komplex függvények differenciálásával majd a **??**. Fejezetben foglalkozunk.) Ezért kapjuk a következő eredményt:

1.32. Következmény. *Legyen $f \in \Lambda$, s_0 a konvergencia abszcisszája az $F = \mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformáltnak. Ekkor*

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \mathcal{L}\{t^k f(t)\}(s), \qquad \operatorname{Re} s > s_0.$$

Az előző eredmény alkalmazásaként kapjuk a következő fontos összefüggést:

1.33. Tétel. *Tetszőleges k nemnegatív egészre*

$$\mathcal{L}\left\{t^k\right\}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}, \qquad \operatorname{Re} s > 0. \tag{1.4}$$

Bizonyítás: Az (1.4) összefüggés $k = 0$ -ra igaz, ugyanis korábban megmutattuk, hogy

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \qquad \operatorname{Re} s > 0,$$

Legyen $F = \mathcal{L}\{1\}$, és alkalmazzuk az 1.32. Következtményt, amelynek értelmében

$$(-1)^k \mathcal{L}\{t^k\}(s) = F^k(s) = \frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^k \frac{k!}{s^{k+1}}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

amiből következik (1.4). □

Bizonyítás nélkül tekintsük a Laplace-transzformált néhány egyéb tulajdonságát.

1.34. Tétel (Hasonlósági tétel). *Legyen $f \in \Lambda$, $\alpha \neq 0$. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(s) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\{f\}\left(\frac{s}{\alpha}\right),$$

minden $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy.

1.35. Tétel. *Legyen $f \in \Lambda$. Ekkor*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}(s),$$

minden $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy.

1.36. Tétel. *Legyen az $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény szakaszonként folytonos és p-periodikus. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st} f(t)\,dt.$$

minden $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre $\operatorname{Re} s > 0$.

1.37. Tétel (Kezdeti- és végérték tétel). *Legyen $f, f' \in \Lambda$.*

(a) Legyen $s \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\{f\}(s) = f(0).$$

(b) Tegyük fel, hogy $\mathcal{L}\{f\}(s)$ értelmezve van $\operatorname{Re} s > 0$-ra. Ekkor

$$\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}\{f\}(s) = \lim_{t\to\infty} f(t),$$

feltéve, hogy a határértékek léteznek.

1.4. Az egységugrás függvény és a négyszögjel Laplace-transzformáltja

Az alkalmazásokban fontos szerepet játszik az úgynevezett *Heaviside-függvény* vagy *egységugrás függvény*, amelyet $c \in [0,\infty)$-re a

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < c, \\ 1, & c \le t \end{cases}$$

képlettel definiálunk. Világos, hogy a H_c függvény szakaszonként folytonos és exponenciálisan korlátos $[0,\infty)$-en. Így $\mathcal{L}\{H_c\}(s)$ létezik ha $\operatorname{Re} s > 0$ és $c \ge 0$, továbbá

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{H_c\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} H_c(t)\,dt = \int_0^c e^{-st}\cdot 0\,dt + \int_c^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt \\ &= \lim_{A\to+\infty}\int_c^A e^{-st}dt = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{-s}\left(e^{-sA}-e^{-sc}\right) = \frac{1}{-s}\left(-e^{-sc}\right), \qquad \operatorname{Re} s > 0.\end{aligned}$$

Tehát kapjuk a következő állítást.

1.38. Tétel. *Legyen $c \ge 0$. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{H_c\}(s) = \frac{e^{-sc}}{s}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

Megjegyezzük, hogy ha H_c definíciójában a $t = c$ pontban másképp definiáljuk a függvény értékét, pl. úgy, hogy balról folytonos legyen, a Laplace-transzformáltjának az értéke nem változik.

Adott egy $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ függvény és $c > 0$ konstans, akkor definiáljuk a

$$g_c(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & 0 \le t < c, \\ f(t-c), & t \ge c \end{cases}$$

függvényt. Ez nem más, mint az f függvény eltoltja jobbra c egységgel, úgy, hogy negatív t-re konstans 0-val terjesztjük ki az f függvény definícióját. A Heaviside függvény segítségével a g_c függvény a

$$g_c(t) = H_c(t)f(t-c), \qquad t \ge 0$$

alakban is felírható, feltéve, hogy f értelmezését (tetszőleges módon) kiterjesztjük a $[-c, 0]$ intervallumra is.

1.39. Tétel (Eltolási tétel). *Ha $f \in \Lambda$, $c \ge 0$, akkor*

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\}(s) = e^{-sc}\mathcal{L}\{f\}(s), \qquad \textit{ha } \operatorname{Re} s \ \textit{ elegendően nagy.}$$

Bizonyítás: Az világos, hogy $g_c \in \Lambda$, így $\mathcal{L}\{g_c\}$ létezik, és

$$\int_0^\infty e^{-st} g_c(t)\,dt = \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+c)} f(u)\,du = e^{-sc}\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du,$$

ha $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. □

Legyen $a, b \ge 0$. Az *egységnyi négyszögjel* alatt olyan függvényt értünk, amely egy adott $[a, b]$ intervallumon kívül nulla és az intervallumon az értéke 1. Képletben kifejezve:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & a \le t < b \\ 0, & b \le t \end{cases}$$

Itt jobbról folytonos függvényként definiáltuk az egységnyi négyszögjel függvényt, de bárhogy is definiáljuk a szakadási pontokban a függvény értékét, ugyanaz lesz a Laplace-transzformáltja. Világos, hogy $f(t) = H_a(t) - H_b(t)$, így

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{H_a\} - \mathcal{L}\{H_b\} = \frac{1}{s}e^{-sa} - \frac{1}{s}e^{-sb} = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}.$$

1.40. Példa. Tekintsük az

$$x'' - 2x' - 3x = f(t), \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot, ahol

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t^2 - 1, & 1 \le t < 4, \\ 0, & 4 \le t. \end{cases}$$

A Laplace-transzformált módszer alkalmazásához számítsuk ki először az f függvény Laplace-transzformáltját. Ehhez először fejezzük ki f-et Heaviside-függvényt használva:

$$f(t) = (H_1(t) - H_4(t))(t^2 - 1).$$

Az eltolási tétel használatához alakítsuk át a függvény képletét a megfelelő módon:

$$f(t) = H_1(t)(t^2-1) - H_4(t)(t^2-1) = H_1(t)\Big((t-1)^2+2(t-1)\Big) - H_4(t)\Big((t-4)^2+8(t-4)+15\Big).$$

Ekkor a csillapítási tétel szerint

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\}(s) &= \mathcal{L}\Big\{H_1(t)\Big((t-1)^2+2(t-1)\Big)\Big\} - \mathcal{L}\Big\{H_4(t)\Big((t-4)^2+8(t-4)+15\Big)\Big\}\\ &= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+2\frac{1}{s^2}\right) - e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+8\frac{1}{s^2}+15\frac{1}{s}\right).\end{aligned}$$

Így az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját véve

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - 2sX(s) + 2x(0) - 3X(s) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+2\frac{1}{s^2}\right) - e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+8\frac{1}{s^2}+15\frac{1}{s}\right),$$

azaz

$$(s^2-2s-3)X(s) = s-2+e^{-s}\frac{2s+2}{s^3} - e^{-4s}\frac{15s^2+8s+2}{s^3},$$

és így

$$X(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s-3)} + e^{-s}\frac{2s+2}{s^3(s+1)(s-3)} - e^{-4s}\frac{15s^2+8s+2}{s^3(s+1)(s-3)}.$$

Már csak inverz Laplace-transzformáltat kell számolni! Jelölje $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ külön-külön a tagok inverze Laplace-transzformáltjait.

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s+1)(s-3)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-3}\right\}(t) = \frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{3t}.$$

A második taghoz először tekintsük:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+2}{s^3(s+1)(s-3)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{27}\frac{1}{s-3}-\frac{2}{3}\frac{1}{s^3}-\frac{2}{9}\frac{1}{s^2}-\frac{2}{27}\frac{1}{s}\right\}(t) = \frac{2}{27}e^{3t}-\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t-\frac{2}{27}.$$

Az eltolási tétel szerint

$$x_2(t) = H_1(t)\left(\frac{2}{27}e^{3(t-1)}-\frac{1}{3}(t-1)^2-\frac{2}{9}(t-1)-\frac{2}{27}\right).$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{15s^2+8s+2}{s^3(s+1)(s-3)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{161}{108}\frac{1}{s-3}-\frac{2}{3}\frac{1}{s^3}-\frac{20}{9}\frac{1}{s^2}-\frac{101}{27}\frac{1}{s}\right\}(t)\\ &= \frac{9}{4}e^{-t}+\frac{161}{108}e^{3t}-\frac{1}{3}t^2-\frac{20}{9}t-\frac{101}{27},\end{aligned}$$

ezért az eltolási tétel szerint

$$x_3(t) = H_4(t)\left(\frac{9}{4}e^{-(t-4)}+\frac{161}{108}e^{3(t-4)}-\frac{1}{3}(t-4)^2-\frac{20}{9}(t-4)-\frac{101}{27}\right).$$

A feladat megoldása ezután $x(t) = x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$. □

1.5. A Dirac-delta függvény és Laplace-transzformáltja

Számos alkalmazásban fellépnek impulzív jelenségek, például pillanatnyi erőhatás egy mechanikai modellben, vagy pillanatnyi feszültségváltozás egy elektromos áramkörben. Ilyen impulzív hatás modellezésére gyakran használják az ú.n. *Dirac-delta függvényt* vagy más néven a *Dirac-impulzus függvényt*, amelynek szokásos jele $\delta(t)$.

Tegyük fel például, hogy egy mechanikai modellben egy kis ideig konstans erő hat, amelynek az impulzusa, azaz az integrálja az adott időintervallumon egységnyi nagyságú. Tegyük fel, hogy ez az időintervallum az origóra nézve szimmetrikus, legyen ez $[-h, h]$ $(h > 0)$, azaz az erő képlete

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & -h \leq t \leq h, \\ 0, & |t| > h, \end{cases}$$

és így a teljes impulzusa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\, dt = \int_{-h}^{h} \delta_h(t)\, dt = 1.$$

Ahogy h csökken, az egységnyi impulzussal rendelkező erőhatás egyre inkább a 0 kis környezetére korlátozódik, de egyre nagyobb lesz. Nyilván teljesül, hogy

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\, dt = \lim_{h\to 0+} \int_{-h}^{h} \delta_h(t)\, dt = 1.$$

Természetes az idealizált impulzív erőhatást δ_h határértékeként definiálni, hogy ha $h \to 0+$, azaz legyen δ a δ_h függvény pontonkénti határértéke, ha $h \to 0+$. Ekkor

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Másrészt elvárjuk azt is, hogy a Dirac-delta függvénynek is egységnyi impulzusa legyen az egész számegyenesen, azaz az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{1.6}$$

azonosság teljesüljön. Természetesen valós függvény nem veheti fel a ∞ értéket, és ha egy pont kivételével azonosan nulla, akkor integrálja is 0 kell legyen, azaz egy „hagyományos” függvény nem teljesítheti az (1.5) és (1.6) azonosságokat.

Ha (1.6) teljesül, akkor ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0+} \delta_h(t)\, dt$$

is teljesülne, ami tudjuk, hogy pontonkénti konvergencia esetében általában nem teljesül. A Dirac-delta függvénytől viszont azt is megköveteljük, hogy

$$\lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0+} f(t)\delta_h(t)\, dt$$

teljesüljön minden f folytonos függvényre is. Ekkor az integrálokra vonatkozó középérték tétel szerint minden h-ra létezik olyan $\xi_h \in [-h, h]$, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\, dt = \lim_{h\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_h(t)\, dt = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(t)\, dt = \lim_{h\to 0+} f(\xi_h).$$

De $\xi_h \to 0$, így f folytonossága miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\, dt = f(0). \tag{1.7}$$

A Dirac-delta függvényen tehát egy olyan δ „függvényt” értünk, amely rendelkezik az (1.5), (1.6) és (1.7) tulajdonságokkal. Megmutatható mélyebb matematikai eszközöket használva, hogy van olyan, ú.n. általánosított függvény vagy más szóval disztribúció, amely rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Ennek precíz tárgyalása azonban messze meghaladja ennek a jegyzetnek a kereteit.

Az alkalmazásokban általában a Dirac-delta függvény eltoltjai szerepelnek. Legyen $c > 0$, és tekintsük a $\delta(t-c)$ függvényt. Ez a c pontra koncentrálódó Dirac-impulzus függvény, amelyre teljesül, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-c)\,dt = f(c) \tag{1.8}$$

minden f folytonos függvény esetén. Ennek Laplace-transzformáltja is rögtön megkapható az (1.8) formulát alkalmazva:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-c)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t-c)\,dt = e^{-sc}.$$

1.41. Példa. Tekintsük az

$$x'' + 2x' + 4x = \delta(t-1), \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot.

Laplace-transzformálva az egyenletet kapjuk, hogy

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 2sX(s) - 2x(0) + 4X(s) = e^{-s},$$

azaz a kezdeti feltételeket használva

$$(s^2 + 2s + 4)X(s) = e^{-s},$$

és így

$$X(s) = e^{-s}\frac{1}{(s+2)^2}.$$

Számítsuk ki először a csillapítási tételt használva

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}(t) = te^{-2t}.$$

Ezért az eltolási tétel szerint

$$x(t) = H_1(t)(t-1)e^{-2(t-1)} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ (t-1)e^{-2(t-1)}, & 1 \le t. \end{cases}$$

□

1.6. Konvolúciós integrál és annak Laplace-transzformáltja

Egy szabályozási rendszer általános esetben inputból (bemenet), jele I, és outputból (kimenet), jele O, és egy, a kettőt összekötő átvitelből áll. Az $I(t)$ input és az $O(t)$ output közötti összefüggés megadható például a következő konvolúciós integrállal:

$$O(t) = \int_0^t I(u)g(t-u)\,du, \quad t \ge 0,$$

ahol a $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény az ú.n. súlyfüggvény.

1.42. Definíció. Két tetszőleges $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvényre, amelyek lokálisan Riemann-integrálhatók, az

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\, du, \quad t \geq 0$$

integrál létezik. Ezt az integrált az f és g függvények *konvolúciójának* nevezzük.

Ezzel a fogalommal élve tehát azt mondhatjuk, hogy az előző szabályozási rendszerben a kimenetet a rendszerre jellemző súlyfüggvény és az input függvény konvolúciója adja meg. Ez a szabály igaz minden lineáris szabályozó kör esetére.

A konvolúció definíciójából könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok:

1.43. Állítás. *Legyen $f, g, h : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvények lokálisan integrálhatók. A definíció alapján az f és g konvolúciója értelmezve van $[0, \infty)$-en, és a következők teljesülnek:*

(i) a konvolúció kommutatív, azaz $f * g = g * f$, $\forall f, g$-re,

(ii) a konvolúció asszociatív, azaz $(f * g) * h = f * (g * h)$, $\forall f, g, h$-ra,

(iii) a konvolúció disztributív az összeadásra nézve, azaz $(f + g) * h = f * h + g * h$, $\forall f, g, h$-ra,

(iv) $f * O = 0$, $\forall f$-re, ahol $O(t) \equiv 0$ az azonosan 0 függvény.

1.44. Lemma. *Ha $f, g \in \Lambda$, akkor $f * g \in \Lambda$.*

Bizonyítás: Mivel $f, g \in \Lambda$ ezért

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha_1 t} \quad \text{és} \quad |g(t)| \leq M_2 e^{\alpha_2 t}, \quad t \geq 0,$$

bizonyos $M_1, M_2 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ konstansokkal, ahol az általánosság megszorítása nélkül azt is feltehetjük, hogy $\alpha_2 > \alpha_1$. Ekkor $t \geq 0$-ra teljesül

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &= \left| \int_0^t f(t-u)g(u)du \right| \leq \int_0^t |f(t-u)|\, |g(u)|\, du \\ &\leq \int_0^t M_1 e^{\alpha_1 (t-u)} M_2 e^{\alpha_2 u} du = M_1 \cdot M_2 e^{\alpha_1 t} \int_0^t e^{(\alpha_2 - \alpha_1)u} du \\ &= M_1 M_2 e^{\alpha_1 t} \frac{e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{M_1 M_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(e^{\alpha_2 t} - e^{\alpha_1 t} \right) \leq \frac{M_1 M_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot e^{\alpha_2 t}. \end{aligned}$$

Megmutatható, hogy $f * g$ is szakaszonként folytonos lesz, ezért $f * g \in \Lambda$. □

1.45. Tétel (Konvolúciós tétel). *Tetszőleges $f, g \in \Lambda$ függvényekre*

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s), \qquad \textit{ha } \operatorname{Re} s \textit{ elegendően nagy.}$$

Bizonyítás: Az 1.30. és az 1.44. Lemmák alapján $\mathcal{L}\{f*g\}(s)$ létezik, ha $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy. Továbbá az integrálás sorrendjét felcserélve a kettős integrálban kapjuk

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}\left(\int_0^t f(t-u)g(u)du\right)dt &= \lim_{T\to+\infty}\int_0^T \left(\int_0^t e^{-st}f(t-u)g(u)du\right)dt \\
&= \lim_{T\to+\infty}\int_0^T \left(\int_u^T e^{-st}f(t-u)g(u)dt\right)du \\
&= \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-st}f(t-u)dt\right)g(u)du \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(v+u)}f(v)dv\right)g(u)du \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv\right)e^{-su}g(u)du \\
&= \int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv\cdot\int_0^\infty e^{-su}g(u)du,
\end{aligned}$$

azaz a tétel állítása teljesül. □

1.7. Alkalmazások

1.46. Példa. Adott $b,\omega\in\mathbb{R}$. Keressük azt az $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt, amelyre a következő teljesül:

$$x''(t)+x(t)=b\sin\omega t,\qquad t\geq 0,$$

és

$$x(0)=1,\qquad x'(0)=0.$$

Az 1.28. Tétel alapján $x,x',x''\in\Lambda$, ezért az egyenlet két oldalának Laplace-transzformáltját véve (elegendő nagy $\operatorname{Re} s$-re), és a Laplace-transzformált tulajdonságait alkalmazva kapjuk

$$\mathcal{L}\{x''\}(s)+\mathcal{L}\{x\}(s)=\mathcal{L}\{b\sin\omega t\}(s),$$

így

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=b\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

ahol megint $X(s)=\mathcal{L}\{x\}(s)$. Használva az $x(0)=1$ és $x'(0)=0$ megadott értékeket kapjuk, hogy

$$X(s)=b\frac{1}{s^2+1}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{s}{s^2+1},$$

és így az 1.45. Tétel szerint

$$x(t)=b\int_0^t\sin(t-u)\sin\omega u\,du+\cos t,\qquad t\geq 0.$$

Tegyük fel először, hogy $\omega\neq\pm1$. Ekkor az integrált a

$$\sin(t-u)\sin\omega u=\frac{1}{2}\Big(\cos(t-u-\omega u)-\cos(t-u+\omega u)\Big)$$

azonosságot felhasználva számítjuk ki a következőképpen:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{b}{2}\int_0^t \Big(\cos(t-(1+\omega)u) - \cos(t-(1-\omega)u)\Big)du + \cos t \\
&= \frac{b}{2}\left(\left[\frac{\sin(t-(1+\omega)u)}{-1-\omega}\right]_{u=0}^{u=t} + \left[\frac{\sin(t-(1-\omega)u)}{-1+\omega}\right]_{u=0}^{u=t}\right) + \cos t \\
&= \frac{b}{2}\left(\frac{\sin\omega t + \sin t}{1+\omega} + \frac{\sin\omega t - \sin t}{-1+\omega}\right) + \cos t \\
&= \frac{b}{1-\omega^2}(\sin t - \omega\sin\omega t) + \cos t, \qquad t \geq 0, \quad \omega \neq \pm 1.
\end{aligned}$$

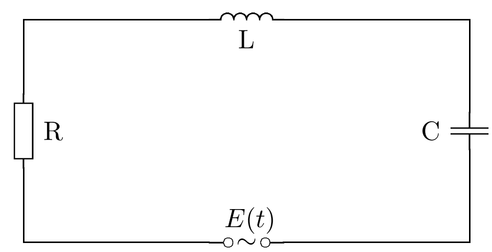
Ha $\omega = 1$, akkor

$$x(t) = \frac{b}{2}\int_0^t \Big(\cos(t-2u) - \cos t\Big)du + \cos t = \frac{b}{2}(\sin t + t\cos t) + \cos t, \qquad t \geq 0.$$

Ha $\omega = -1$, akkor $b\sin(-t) = -b\sin t$, így ez visszavezethető az előző esetre. □

1.47. Példa. Soros RLC áramkör

Ha egy váltakozóáramú áramforráshoz sorosan egy R ohmos ellenállást, egy L induktivitású tekercset és egy C kapacitású kondenzátort kapcsolunk, akkor az ú.n. soros RLC áramkört kapjuk:



Tegyük fel, hogy R, L, C konstans értékek. Jelölje a t időpontban $E(t)$ az áramforrás által az áramkörbe juttatott „külső” feszültséget, $I(t)$ az áramkörben folyó áramerősséget, $Q(t)$ a kondenzátor töltését. Ekkor a tekercs két vége között $L\frac{dI}{dt}$ önindukciós feszültség, a kondenzátoron pedig Q/C feszültség lép fel, ezért Kirchoff második törvénye alapján

$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI.$$

Ebből az $I = \frac{dQ}{dt} = Q'$ összefüggést alkalmazva kapjuk, hogy

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{1.9}$$

Az egyenlethez rendelt kezdeti értékek:

$$Q(0) = Q_0, \qquad Q'(0) = I(0) = I_0. \tag{1.10}$$

Ha $E(t)$ differenciálható, akkor az egyenlet mindkét oldalát deriválva kapjuk az áramerősségre vonatkozó egyenletet:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t).$$

Ekkor $I'(0)$-t az (1.9) egyenlet segítségével fejezhetjük ki:

$$I(0) = I_0, \qquad I'(0) = \frac{1}{L}\left(E(t_0) - RI_0 - \frac{1}{C}Q_0\right).$$

Oldjuk meg az (1.9)-(1.10) kezdeti érték feladatot. Az (1.9) egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját véve kapjuk

$$Ls^2\mathcal{L}\{Q\}(s) - LsQ(0) - LQ'(0) + Rs\mathcal{L}\{Q\}(s) - RQ(0) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\{Q\}(s) = \mathcal{L}\{E\}(s).$$

Ebből kapjuk

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Phi(s) + \Psi(s),$$

ahol

$$\Phi(s) = \frac{(Ls+R)Q_0 + LI_0}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}, \qquad \Psi(s) = \frac{\mathcal{L}\{E\}(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}},$$

és így

$$Q(t) = \phi(t) + \psi(t),$$

ahol $\mathcal{L}\{\phi(t)\}(s) = \Phi(s)$ és $\mathcal{L}\{\psi(t)\}(s) = \Psi(s)$. Vegyük észre, hogy $\phi(t)$ az

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = 0, \qquad y(0) = Q_0, \quad y'(0) = I_0$$

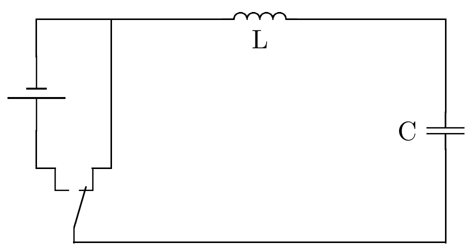
feladat megoldása, és $\psi(t)$ pedig az

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = E(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

feladat megoldása.

Most tekintsük az (1.9)-(1.10) feladat speciális eseteit.

1. eset: Tegyük fel, hogy áramkörben levő elemek ellenállása 0-nak tekinthető (ú.n. LC kör), azaz $R = 0$, és nincs külső feszültség a rendszeren ($E(t) = 0$), azaz feltöltjük egy teleppel a kondenzátort, majd a telepet lekapcsoljuk az áramkörből:



Számítsuk ki az (1.9)-(1.10) kezdeti érték feladat megoldását. Ahogy azt már láttuk,

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Phi(s) = \frac{L(sQ_0 + I_0)}{Ls^2 + \frac{1}{C}}.$$

Vezessük be az

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

jelölést. Ezt a jelölést használva kapjuk

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = Q_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2} + \frac{I_0}{\omega_0}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2},$$

és ezért

$$Q(t) = \phi(t) = Q_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Ekkor tehát a rendszer egy ω_0 frekvenciájú szabadrezgést végez. (Az ω_0 számot a rendszer *sajátfrekvenciájának* nevezzük.)

2. eset: Tegyük fel, hogy $R = 0$, $Q_0 = 0$, $I_0 = 0$, és $E(t) = E_0 \cos \omega t$ külső feszültség hat a rendszerre, ahol $\omega \neq \omega_0$, $E_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Psi(s) = \frac{E_0}{L\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

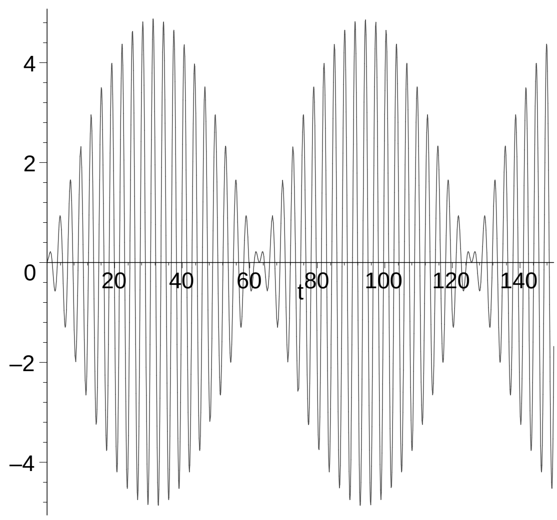
és ezért

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \psi(t) \\
&= \frac{E_0}{L\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t-u)) \cos \omega u \, du \\
&= \frac{E_0}{2L\omega_0} \int_0^t \Big(\sin(\omega_0(t-u)+\omega u) + \sin(\omega_0(t-u)-\omega u) \Big) du \\
&= \frac{E_0}{2L\omega_0} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0 - \omega} + \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0 + \omega} \right) \\
&= \frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \\
&= \frac{2E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}.
\end{aligned}$$

Ha $|\omega_0 - \omega|$ kicsi, akkor $\omega_0 + \omega > |\omega_0 - \omega|$, és így a megoldás utóbbi képletét úgy is tekinthetjük, hogy az egy gyorsan oszcilláló függvény, $\sin \frac{(\omega_0+\omega)t}{2}$, amelynek az amplitúdója,

$$\frac{2E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}$$

lassan oszcillál. Ezt a jelenséget *lebegésnek* hívják, amely tehát akkor figyelhető meg, ha a külső erő frekvenciája közel megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával. Egy ilyen megoldás grafikonja látható a következő ábrán.



$L = 2$, $C = 1/8$, $E_0 = 1$, $\omega_0 = 2$, $\omega = 2.1$.

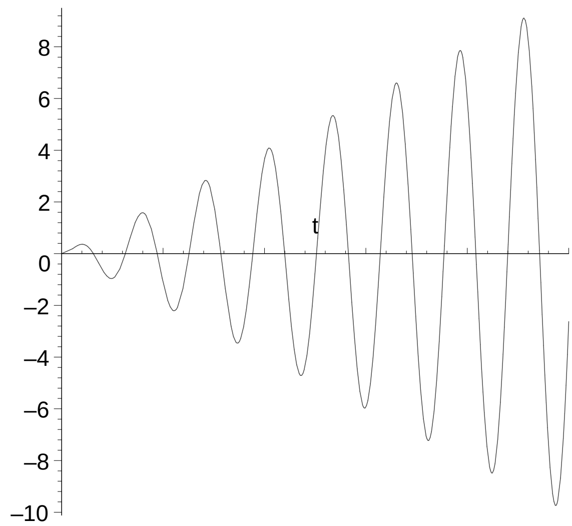
3. eset: Tegyük fel, hogy $R = 0$, $Q_0 = 0$, $I_0 = 0$, és $E(t) = E_0 \cos \omega_0 t$, azaz a rendszer sajátfrekvenciájával megegyező frekvenciájú külső erő hat a rezgőkörre. Ekkor

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Psi(s) = \frac{E_0}{L\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2},$$

és ezért

$$\begin{aligned} Q(t) &= \psi(t) \\ &= \frac{E_0}{L\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0(t-u)) \cos \omega_0 u \, du \\ &= \frac{E_0}{2L\omega_0} \int_0^t \Big(\sin(\omega_0(t-u) + \omega_0 u) + \sin(\omega_0(t-u) - \omega_0 u) \Big) du \\ &= \frac{E_0}{2L\omega_0} t \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Ebben az esetben tehát egy olyan oszcilláló megoldást kaptunk, amelynek amplitúdója tart végtelenbe, ha $t \to \infty$. Ezt a jelenséget *rezonanciának* hívják.



$L = 1$, $C = 1/25$, $E_0 = 1$, $\omega_0 = 5$.

4. eset: Tegyük fel, hogy $R = 0$, $Q_0 \in \mathbb{R}$, $I_0 \in \mathbb{R}$, és $E(t) = E_0 \cos \omega t$ külső feszültség hat a rendszerre, ahol $\omega \neq \omega_0$, $E_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor a megoldás az 1. és 2. esetben kiszámított két függvény összege lesz:

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

□

A következő példa azt illusztrálja, hogy a Laplace-transzformáció módszere alkalmazható konstans együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldására is.

1.48. Példa. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y + e^t, \qquad x(0) = 2, \\ y' &= x + 6y - e^t, \qquad y(0) = -1 \end{aligned}$$

rendszert!

Vegyük mindkét egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, és használjuk az $X = \mathcal{L}\{x\}$ és $Y = \mathcal{L}\{y\}$ jelöléseket:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= 3X(s) - 2Y(s) + \frac{1}{s-1} \\ sY(s) - y(0) &= X(s) + 6Y(s) - \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket használva

$$\begin{aligned} (s-3)X(s) + 2Y(s) &= 2 + \frac{1}{s-1} \\ -X(s) + (s-6)Y(s) &= -1 - \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s^2 - 11s + 6}{(s-4)(s-5)(s-1)} \\ Y(s) &= -\frac{s^2 - 5s + 1}{(s-4)(s-5)(s-1)}, \end{aligned}$$

és így parciális törtekre bontva

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 11s + 6}{(s-4)(s-5)(s-1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + 2\frac{1}{s-4} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-5}\right\} \\ &= -\frac{1}{4}e^{t} + 2e^{4t} + \frac{1}{4}e^{5t} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 - 5s + 1}{(s-4)(s-5)(s-1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-4} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-5}\right\} \\ &= \frac{1}{4}e^{t} - e^{4t} - \frac{1}{4}e^{5t}. \end{aligned}$$

□