6. Fourier-elmélet

6.1. Komplex trigonometrikus Fourier-sorok

Tekintsük az $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ Hilbert-teret, azaz azoknak a komplex értékű $f\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C}$ függvényeknek a halmazát, amelyek Lebesgue-mérhetők és négyzetesen integrálhatók $[0,2\pi]$-n, azaz $\int_0^{2\pi}|f|^2\,dm<\infty$. Mint azt már korábban láttuk, a skaláris szorzat definíciója ezen a téren

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi} f\cdot\overline{g}\,dm.$$

A továbbiakban ebben a fejezetben a Lebesgue-integrálokat is egyszerűen $\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$-vel jelöljük.

Tekintsük a $[0,2\pi]$ intervallumon definiált $t\mapsto e^{ikt}$ komplex értékű függvények rendszerét:

$$\tilde{S}\stackrel{\text{def}}{=}\left\{e^{ikt}\colon\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\right\} \tag{6.1}$$

Megmutatjuk, hogy $\tilde{S}$ ortogonális rendszer $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$-ben.

6.1. Állítás. *A (6.1) képlettel definiált $\tilde{S}$ függvényrendszer ortogonális rendszer az $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ Hilbert-térben.*

Bizonyítás: Legyen $k\neq\ell$, és tekintsük következő skaláris szorzatokat:

$$\begin{aligned}\langle e^{ikt},e^{i\ell t}\rangle &= \int_0^{2\pi} e^{ikt}\overline{e^{i\ell t}}dt=\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-i\ell t}dt=\int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)t}dt\\ &= \frac{1}{i(k-\ell)}\left[e^{i(k-\ell)t}\right]_{t=0}^{t=2\pi}=\frac{1}{i(k-\ell)}\left[e^{i(k-\ell)2\pi}-1\right]=0.\end{aligned}$$

Tehát $\tilde{S}$ egy ortogonális rendszert alkot $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$-ben. □

Számítsuk ki $\tilde{S}$ elemeinek normáit:

$$\|e^{ikt}\|_2=\sqrt{\langle e^{ikt},e^{ikt}\rangle}=\left(\int_0^{2\pi} e^{ikt}\overline{e^{ikt}}\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ikt}\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_0^{2\pi} dt\right)^{1/2}=\sqrt{2\pi}, \tag{6.2}$$

ha $k\in\mathbb{Z}$. Ezért definiáljuk az

$$S_{\mathbb{C}}\stackrel{\text{def}}{=}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\colon\ k=0,\pm1,\pm2,\dots\right\} \tag{6.3}$$

függvényrendszert. Ez már ortonormált rendszer lesz $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$-ben, sőt belátható, hogy maximális is:

6.2. Tétel. *A (6.3) képlettel definiált $S_{\mathbb{C}}$ halmazrendszer maximális ortonormált rendszer az $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ Hilbert-térben.*

Alkalmazható tehát az $S_{\mathbb{C}}$ függvényrendszerre az 5.114. Tétel, azaz például az $L_2([0,2\pi],\mathbb{C})$ tér elemeit az $S_{\mathbb{C}}$ rendszerre vonatkozó Fourier-sorba fejthetjük, és a Fourier-sor konvergál az L_2 normában az adott függvényhez. Az 5.114. Tétel jelölését használva:

$$f\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}.$$

Ennek megfelelően az $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ függvény *komplex trigonometrikus Fourier-során* az

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{6.4}$$

végtelen sort értjük, ahol a c_k *Fourier-együtthatók* képlete

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt. \tag{6.5}$$

Azt mondjuk, hogy a $t \in [0, 2\pi]$ pontban az f Fourier-sora konvergens, ha az

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

szimmetrikus részletösszegek sorozata konvergens, $n \to \infty$ esetén. Azt mondjuk, hogy az f függvény Fourier-sora *normában* (vagy *négyzetintegrálban*) *konvergál* az f függvényhez, ha

$$\|f - s_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t) - s_n(t)|^2 dt \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Világos az eddigiek alapján, hogy a négyzetintegrálban való konvergenciából nem következik a pontonkénti konvergencia.

A definícióból, a skaláris szorzat linearitásából és a konvergens sorok tulajdonságaiból rögtön következik, hogy a Fourier-sor számítása lineáris művelet az alábbi értelemben:

6.3. Állítás. *Legyen $f_1, f_2 \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Ekkor*

1. *az $f_1 + f_2$ függvény Fourier-sora az f_1 és f_2 függvények Fourier-sorainak összege,*

2. *az αf_1 függvény Fourier-sora az f_1 függvény Fourier-sorának α-szorosa.*

Az $S_{\mathbb{C}}$ halmazrendszer maximalitásából és az 5.114. Tételből rögtön következik az alábbi eredmény.

6.4. Tétel. *Legyen $S_{\mathbb{C}}$ a (6.3) képlettel definiált halmazrendszer. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

1. *Ha valamely $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ függvényre*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = 0, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

azaz az f függvény Fourier-együtthatói nullák, más szóval az f merőleges az $S_{\mathbb{C}}$ halmazra ($f \perp S_{\mathbb{C}}$), akkor $f(t) = 0$, m.m. $t \in [0, 2\pi]$-re.

2. *Az f függvény Fourier-sora négyzetesen konvergál az f függvényhez, azaz*

$$\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \right|^2 dt \to 0, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

3. *Teljesül a Parseval-azonosság, azaz*

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \left(= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \right).$$

Bizonyítás nélkül tekintsük az alábbi fontos eredményt.

6.5. Tétel (Riesz–Fisher-tétel). *Tetszőleges olyan* $\gamma_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *konstansokhoz, amelyekre*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$$

teljesül, létezik olyan $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ *függvény, hogy*

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt (= c_k)$$

azaz $\gamma_0, \gamma_{\pm 1}, \gamma_{\pm 2}, \ldots$ *az* f *függvény Fourier-együtthatói, és*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt}$$

négyzetintegrálban konvergál f*-hez.*

A Riesz–Fisher-tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha egy $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ függvényhez hozzárendeljük a Fourier-együtthatóinak $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (két irányban végtelen) sorozatát, akkor egy lineáris izomorfiát kapunk a $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ és a négyzetesen összegezhető két irányban végtelen sorozatok vektortere között. Ha ebben a térben egy $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sorozat normáját a

$$\|(c_k)\| = \sqrt{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

képlettel értelmezzük, akkor a fenti lineáris izomorfia izometria is lesz a Parseval-formula miatt.

6.6. Megjegyzés. Ha f és g két 2π szerint periodikus függvény, akkor

$$\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt,$$

ezért az $S_{\mathbb{C}}$ függvényrendszer az $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ Hilbert-téren is maximális ortonormált, továbbá az $S_{\mathbb{C}}$-re vonatkozó Fourier-sor az $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ Hilbert-téren is (6.4) alakú lesz, ahol a c_k Fourier-együtthatókat a

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

képlettel számoljuk ki.

6.7. Megjegyzés. Az előbbi meggondolást általánosíthatjuk. Ha f és g két 2π szerint periodikus függvény, akkor az $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)$ és $\tilde{g}(t) = g\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)$ összetett függvények $(b - a)$ szerint periodikus függvények lesznek, és

$$\int_a^b \tilde{f}(t)\overline{\tilde{g}(t)}\, dt = \int_a^b f\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) \overline{g\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)}\, dt = \frac{b-a}{2\pi} \int_{\frac{2\pi a}{b-a}}^{\frac{2\pi b}{b-a}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{b-a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

speciálisan,

$$\|\tilde{f}\|^2_{L_2([a,b],\mathbb{C})} = \frac{b-a}{2\pi} \|f\|^2_{L_2([0,2\pi],\mathbb{C})}.$$

Ezért az $S_{\mathbb{C}}$ halmaz elemeit a $\sqrt{\frac{2\pi}{b-a}}$ együtthatóval megszorozva és új változót bevezetve tekintsük az $[a,b]$ intervallomon értelmezett $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t}$ függvényekből álló

$$S_{[a,b]} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t} \colon\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

függvényrendszert. Ez maximális ortonormált rendszer lesz az $L_2([a,b],\mathbb{C})$ Hilbert-téren. Egy $f \in L_2([a,b],\mathbb{C})$ függvény Fourier-során ezért az

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{b-a}t}$$

végtelen sort értjük, ahol a c_k Fourier-együtthatók képlete

$$c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-ik\frac{2\pi}{b-a}t}\, dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

A 6.4. Tétel értelemszerűen kiterjeszthető $L_2([a,b],\mathbb{C})$-re.

6.2. Valós trigonometrikus Fourier-sorok

Tekintsük az $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ Hilbert-teret. Legyen

$$S^* \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots\}$$

a $[-\pi,\pi]$-n értelmezett függvények halmaza. Megmutatjuk, hogy az S^* halmaz ortogonális rendszer $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$-ben.

6.8. Állítás. *Az S^* függvényhalmaz ortogonális rendszer az $L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ Hilbert-térben.*

Bizonyítás: Az állítás direkt módon is könnyen belátható, de most mi az S^* ortogonalitását az előző szakaszban bevezetett $\tilde{S}$ függvényhalmaz ortogonalitását felhasználva indokoljuk.

Legyen $k \in \mathbb{N}$. A

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

Euler-képletek értelmében $\sin kx$ és $\cos kx$ lineáris kombinációja az e^{ikx} és e^{-ikx} függvényeknek. Ez persze fordítva is teljesül, az e^{ikx} és e^{-ikx} függvények is felírhatók $\sin kx$ és $\cos kx$ lineáris kombinációjaként. Ezért az 5.105. Állítás szerint, ha egy függvény ortogonális az e^{ikx} és e^{-ikx} függvényekre, akkor ortogonális a $\sin kx$ és $\cos kx$ függvényekre is. Ezért a 6.6. Megjegyzést alkalmazva kapjuk, $\sin kx$ és $\cos kx$ is ortogonális bármely $e^{i\ell x}$ függvényre, ahol $|\ell| \neq k$. De ekkor a fentiekből következik, hogy $\sin kx$ és $\cos kx$ ortogonális bármely $\sin \ell x$ és $\cos \ell x$ függvényre, valamint a konstans 1 függvényre is. Most már csak azt kell belátni, hogy $\sin kx$ és $\cos kx$ egymásra is ortogonális. A 6.1. Állítás és (6.2) alapján kapjuk

$$\begin{aligned}
\langle \cos kx, \sin kx \rangle &= \left\langle \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4\bar{i}} \Big(\langle e^{ikx}, e^{ikx} \rangle - \langle e^{ikx}, e^{-ikx} \rangle + \langle e^{-ikx}, e^{ikx} \rangle - \langle e^{-ikx}, e^{-ikx} \rangle \Big) \\
&= \frac{1}{4\bar{i}} \Big(2\pi - 0 + 0 - 2\pi \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítás teljes. □

Számítsuk ki S^* elemeinek normáját. Legyen $k \neq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|\cos kx\|_2 &= \left(\left\langle \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}, \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \right\rangle\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle e^{ikx}, e^{ikx}\rangle + \langle e^{ikx}, e^{-ikx}\rangle + \langle e^{-ikx}, e^{ikx}\rangle + \langle e^{-ikx}, e^{-ikx}\rangle\Big)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(2\pi + 0 + 0 + 2\pi\Big)^{1/2} \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Hasolóan kapjuk, hogy

$$\|\sin kx\|_2 = \left(\left\langle \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}, \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i} \right\rangle\right)^{1/2} = \sqrt{\pi},$$

valamint a konstans 1 függvény normája

$$\|1\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Kaptuk tehát a következő eredményt:

6.9. Állítás. *Az*

$$S_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\} \tag{6.6}$$

függvényrendszer ortonormált rendszer az $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ Hilbert-térben.

Az 5.114. Tétel szerint az $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ tér elemeit az $S_{\mathbb{R}}$ rendszerre vonatkozó Fourier-sorba fejthetjük, és a Fourier-sor konvergál az L_2 normában az adott függvényhez. Az 5.114. Tétel jelölését használva:

$$f(x) \sim \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}.$$

Ennek megfelelően az $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ *valós trigonometrikus Fourier-során* az

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\Big) \tag{6.7}$$

végtelen sort értjük, ahol az $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ *Fourier-együtthatók* képlete

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots \tag{6.8}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \ldots. \tag{6.9}$$

Az 5.114. Tételből rögtön következik a 6.4. Tétel valós Fourier-sorokra vonatkozó alakja.

6.10. Tétel. *Legyen $S_{\mathbb{R}}$ a (6.6) képlettel definiált halmazrendszer. Ekkor*

1. *Ha valamely $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ függvényre*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

azaz az f függvény összes Fourier-együtthatója nulla, más szóval az f merőleges az $S_{\mathbb{R}}$ halmazra, akkor $f(x) = 0$, m.m. $x \in [-\pi, \pi]$-re.

2. *Az f függvény Fourier-sora négyzetintegrálban konvergál az f függvényhez, azaz*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx \to 0, \qquad n \to \infty.$$

3. *Parseval-azonosság:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

A Riesz–Fisher-tétel valós Fourier-sorokra vonatkozó alakja:

6.11. Tétel (Riesz-Fischer). *Tetszőlegesen előírt a_0, a_k, b_k $(k \geq 1)$ valós számokhoz, amelyekre*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) < \infty,$$

van olyan $f \in L_2\left([-\pi, \pi], \mathbb{R}\right)$ függvény, hogy $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, b_1, \ldots, b_k, \ldots$ az f függvénynek az $S_{\mathbb{R}}$ rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói.

A 6.7. Megjegyzésnek megfelelően egy tetszőleges $[-L, L]$ halmazon értelmezett valós függvénynek értelmezhetjük a Fourier-sorát.

6.12. Megjegyzés. Tekintsük a $[-L, L]$ intervallumon értelmezett

$$S_{\mathbb{R},L} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\cos\frac{\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin\frac{\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\cos\frac{2\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin\frac{2\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \ldots, \frac{\cos\frac{k\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin\frac{k\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \ldots \right\}$$

függvényrendszert. Ez maximális ortonormált rendszer lesz az $L_2([-L, L], \mathbb{R})$ Hilbert-térben. Egy $f \in L_2([-L, L], \mathbb{R})$ függvény Fourier-során az

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \tag{6.10}$$

végtelen sort értjük, ahol az a_k, b_k Fourier-együtthatók képlete

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} \, dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy valós függvényekre a komplex trigonometrikus Fourier-sor egybeesik a valós trigonometrikus Fourier-sorral.

6.13. Állítás. *Legyen $f \in L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Ekkor f-nek az $S_{\mathbb{C}}$ és az $S_{\mathbb{R}}$ rendszerekre vonatkozó Fourier-sora megegyezik.*

Bizonyítás:

Legyen $f \in L_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ valós függvény, és legyenek a c_k, a_k és b_k konstansok a (6.5), (6.8) és (6.9) képletekkel definiálva. Ekkor az f komplex Fourier-sora

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}\right).$$

Másrészt az Euler-azonosság alapján

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du$$

és

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{iku}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du = \overline{c_k},$$

így

$$c_{-k}e^{-ikx} = \overline{c_k}\,\overline{e^{ikx}} = \overline{c_k e^{ikx}}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Ezt felhasználva

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ikx} + \overline{c_k e^{ikx}}\right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(c_k e^{ikx}\right).$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re}\left(c_k e^{ikx}\right) &= 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du\right)(\cos kx + i\sin kx)\right]\\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du\right)\cos kx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du\right)\sin kx\\
&= a_k\cos kx + b_k\sin kx,
\end{aligned}$$

továbbá

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Ezért

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right).$$

□

Azt mondjuk, hogy az f függvény Fourier-sora *tiszta szinuszos sor*, ha csak szinuszos tagokat tartalmaz, azaz $a_k = 0$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$-re. Ha pedig f Fourier-sora csak koszinuszos tagokat tartalmaz, azaz $b_k = 0$ minden $k = 1, 2, \ldots$-re, akkor azt mondjuk, hogy a Fourier-sor *tiszta koszinuszos sor.*

6.14. Állítás. *Legyen $f \in L_2([-L,L],\mathbb{R})$.*

1. *Ha f páratlan függvény, akkor a Fourier-sora tiszta szinuszos sor.*
2. *Ha f páros függvény, akkor a Fourier-sora tiszta koszinuszos sor.*

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy f páratlan. Ekkor az $f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}$ függvény is páratlan, ezért

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \dots.$$

2. Ha f páros, akkor az $f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}$ függvény lesz páratlan, ezért

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = 0, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

□

6.15. Példa. Tekintsük a 2π szerint periodikus $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x) = x, \qquad \text{ha} \quad -\pi \le x < \pi.$$

Fejtsük f-et Fourier-sorba!

Vegyük észre, hogy f páratlan függvény, így csak a szinuszos tagok együtthatóit kell kiszámolni:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx.$$

Parciális integrálással kapjuk

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx &= \left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx \\
&= \left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\pi\frac{\cos k\pi}{k} + (-\pi)\frac{\cos(-k\pi)}{k} + \frac{1}{k^2}\sin k\pi - \frac{1}{k^2}\sin(-k\pi) \\
&= -\frac{2\pi}{k}\cos k\pi.
\end{aligned}$$

Tehát

$$b_k = -\frac{2}{k}\cos k\pi = -\frac{2}{k}(-1)^k, \qquad k = 1, 2, \dots\ ,$$

és így

$$f(x) \sim 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right).$$

□

6.16. Példa. Tekintsük most a $2L$ szerint periodikus $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x) = x, \qquad \text{ha} \quad -L \le x < L.$$

Az előző példához hasonló módon végigszámítható, hogy

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = -\frac{2L}{k\pi}(-1)^k, \qquad k = 1, 2, \dots\ ,$$

így

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{L}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{L}}{3} - \frac{\sin\frac{4\pi x}{L}}{4} + \cdots\right).$$

Ezt az eredményt megkaphatjuk úgy is, hogy definiáljuk a

$$g(t) = f\left(\frac{L}{\pi}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor g 2π szerint periodikus és $g(t) = \frac{L}{\pi}t$, ha $t \in [-\pi, \pi)$, így az előző példából is megkapható a sorfejtés. □

6.17. Példa. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2α szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) = \sin x, \qquad -\alpha < x < \alpha,$$

ahol α olyan valós szám, amelyre $\alpha > 0$ és $\alpha \neq k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$. Mivel f páratlan függvény, a Fourier-sora csak szinuszos tagokat tartalmaz, amelyek együtthatói $b_k = b_k(\alpha)$ és

$$\begin{aligned}
b_k(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin x \sin\frac{k\pi x}{\alpha}\,dx \\
&= \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\Big(\frac{k\pi}{\alpha} - 1\Big)x - \cos\Big(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\Big)x\,dx \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{\alpha} - 1\right)x}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\right)x}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1}\right]_{x=-\alpha}^{x=\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sin(k\pi - \alpha)}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin(k\pi + \alpha)}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sin k\pi \cos\alpha - \cos k\pi \sin\alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin k\pi \cos\alpha + \cos k\pi \sin\alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{(-1)^k \sin\alpha}{1 - \frac{k\pi}{\alpha}} - \frac{(-1)^k \sin\alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1}\right) \\
&= \frac{(-1)^k \sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{k\pi}{\alpha} + 1 - 1 + \frac{k\pi}{\alpha}}{\left(1 - \frac{k\pi}{\alpha}\right)\left(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\right)} \\
&= (-1)^k \sin\alpha \frac{2k\pi}{\alpha^2 - (k\pi)^2}.
\end{aligned}$$

Tehát az f függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim 2\pi \sin\alpha \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\alpha^2 - (k\pi)^2} \sin kx.$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\alpha \to \pi$. Ekkor $k = 1$-re a L'Hospital-szabályt alkalmazva kapjuk

$$\lim_{\alpha\to\pi} b_1(\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi} \frac{-2\pi \sin\alpha}{\alpha^2 - \pi^2} = \lim_{\alpha\to\pi} \frac{-2\pi\cos\alpha}{2\alpha} = 1,$$

egyébként pedig

$$\lim_{\alpha\to\pi} b_k(\alpha) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots .$$

Tehát a Fourier-sor együtthatói tartanak a 2π periodikus $\sin x$ függvény Fourier-sorának együtthatóihoz. □

6.3. Valós Fourier-sorok pontonkénti konvergenciája

6.18. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény *szakaszonként folytonosan differenciálható*, ha bármely korlátos $[a, b]$ intervallumon szakaszonként folytonosan differenciálható (a 3.118. Definíció értelmében).

Bizonyítás nélkül tekintsük a következő eredményt, amely a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájára vonatkozik.

6.19. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, $2L$ szerint periodikus függvény. Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ pontban az f függvény $S_{\mathbb{R},L}$ rendszerre vonatkozó (6.10) Fourier-sora konvergál az*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

határértékhez. Speciálisan, ha f folytonos az x pontban, akkor a Fourier-sora x-ben konvergál az $f(x)$ függvényértékhez.

Ha egy $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ függvény Fourier-sorának pontonkénti konvergenciáját vizsgáljuk, akkor először periodikusan kiterjesztjük f-et $\mathbb{R}$-re, és a kiterjesztett függvényre alkalmazzuk a tételt. Megjegyezzük, hogy a periodikus kiterjesztés csak akkor lehetséges, ha $f(-\pi) = f(\pi)$. Egyébként vagy az $f(-\pi)$ vagy az $f(\pi)$ függvényértéket használjuk a periodikus kiterjesztéshez, azaz a kiterjeszett függvény egy pontben nem egyezik meg az eredeti függvénnyel. Viszont a két függvény Fourier-együtthatói, és így a Fourier-sora is megegyezik.

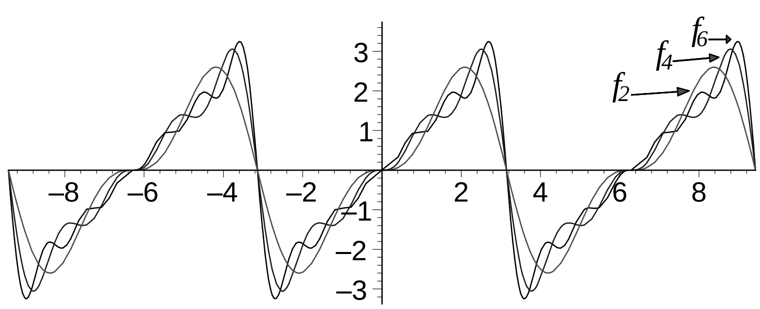
6.20. Példa. Tekintsük újra a 6.15. Példában kiszámított Fourier-sort. Az előbbi tételt alkalmazva kapjuk, hogy a Fourier-sor pontonként konvergens, és

$$2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi \text{ és } x = \pi. \end{cases}$$

A Fourier-sor n-edik részletösszegét jelölje

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right).$$

A következő ábrán az f_2, f_4 és f_6 közelítő összegek grafikonja látható. Ebből is érzékelhető a Fourier-sor konvergenciája. □



Az $f_2(x)$, $f_4(x)$ és $f_6(x)$ részletösszegek grafikonja.

A Fourier-sorok egyik legfontosabb alkalmazási területe a parciális differenciálegyenletek elméletében található, ahol bizonyos feladatokat a megoldások Fourier-sorba fejtésével oldunk meg. Az egyik kulcs kérdés a módszer alkalmazásánál, mikor lehet differenciálni a Fourier-sort, ill. a végtelen összeg deriváltját tagonkénti differenciálással kiszámolni. Erre ad választ a következő tétel, amit szintén bizonyítás nélkül közlünk.

6.21. Tétel. *Legyen $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ folytonos, szakaszonként folytonosan differenciálható, továbbá*

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

Ekkor az f függvény Fourier-sora abszolút és egyenletesen konvergál a $[-\pi,\pi]$ intervallumon az f függvényhez, azaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\Big),$$

ahol a_k, b_k a (6.8) és (6.9) képletekkel definiált Fourier-együtthatók. Továbbá, f' Fourier-sorát f Fourier-sorának tagonkénti differenciálásával megkaphatjuk, azaz

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\Big(-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx\Big).$$

Minden olyan x pontban, ahol $f''(x)$ létezik, az előző reláció egyenlőséggel helyettesíthető.

A 6.19. és 6.21. Tételeket nyilvánvaló módon terjeszthetjük ki arra az esetre, amikor az f függvény a $[-L, L]$ szimmetrikus intervallumon definiált.

6.4. Tiszta koszinuszos és szinuszos Fourier-sorok

Ebben a szakaszban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet Fourier-sorba fejteni egy $[0, L]$ alakú intervallumon definiált függvényt. Egy természetes ötlet erre az, hogy kiterjesztjük a függvényt a $[-L, L]$ intervallumra, és a kiterjesztett függvénynek számítjuk ki a Fourier-sorát. Ekkor a 6.19. Tételben megadott feltételek teljesülése esetében a Fourier-sor konvergál a kiterjeszett függvényhez, ill. $[0, L]$-re leszűkítve a Fourier-sor értelmezési tartományát, az eredeti függvényhez.

Két speciális esetet vizsgálunk: páros ill. páratlan függvényként terjesztjük ki a függvényt.

Tekintsük először a páros kiterjesztés esetét. Legyen $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ adott, és legyen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-L, 0) \\ f(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{f}$ Fourier-sora a 6.14. Állítás szerint tiszta koszinuszos sor, így a Fourier-sorában minden $b_k = 0$. Az a_k Fourier-együtthatókat az

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0} \tilde{f}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx + \int_{0}^{L} \tilde{f}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx\right)$$

képlettel számíthatjuk ki. Mivel $\tilde{f}(x)\cos\frac{k\pi x}{L}$ két páros függvény szorzata, ezért maga is páros függvény, így a fenti két integrál megegyezik, tehát

$$a_k = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.11}$$

Most tekintsük azt az esetet, hogy páratlan módon terjesztjük ki f-et a $[-L, 0]$ intervallumra, azaz legyen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-L, 0], \\ 0, & x = 0, \\ f(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{f}$ páratlan periodikus függvény, ezért a Fourier-sora tiszta szinuszos sor lesz, azaz minden $a_k = 0$. A b_k együtthatókat az előző esethez hasonló levezetéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx \\ &= \frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0} \tilde{f}(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx + \int_{0}^{L} \tilde{f}(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx\right) \\ &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Az előző levezetésből rögtön következik az alábbi eredmény. Ha a kiterjeszett függvény páros, akkor annak Fourier-sora tiszta koszinuszos sor lesz,

6.22. Állítás. *Az*

$$S_{\cos} \stackrel{\text{def}}{=} \{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \ldots\}$$

és az

$$S_{\sin} \stackrel{\text{def}}{=} \{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots\}$$

rendszerek egyaránt teljes ortogonális rendszert alkotnak a $[0, \pi]$ *intervallumon.*

6.23. Példa. Számítsuk ki a $[0, \pi]$ intervallumra megszorított $\sin x$ függvény tiszta koszinuszos sorát, azaz az $S_{\cos}$ függvényrendszerre vonatkozó Fourier-sorát! A (6.11) képletet és trigonometrikus azonosságokat alkalmazva kapjuk $k \neq 1$-re, hogy

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(1+k)x + \sin(1-k)x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+k)x}{1+k} - \frac{\cos(1-k)x}{1-k}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{1+k}-1}{1+k} - \frac{(-1)^{1-k}-1}{1-k}\right) \\ &= \frac{(-1)^k+1}{\pi}\left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k}\right) \\ &= \frac{(-1)^k+1}{\pi}\cdot\frac{2}{1-k^2}. \end{aligned}$$

$k = 1$-re kapjuk

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = 0.$$

A 6.19. Tétel szerint a Fourier-sor minden pontban konvergál a függvényhez, tehát kapjuk, hogy

$$\sin x = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{2}{1-2^2}\cos 2x + \frac{2}{1-4^2}\cos 4x + \frac{2}{1-6^2}\cos 6x + \cdots\right), \qquad x \in [0, \pi].$$

Megjegyezzük, hogy a $\sin x$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora természetesen önmaga (azaz $b_1 = 1$ és $b_k = 0$ minden $k > 1$-re). □

6.24. Példa. Számítsuk ki az $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sorát! A (6.12) képlet szerint

$$b_k = \frac{2}{5}\int_0^5 \sin\frac{k\pi x}{5}\,dx = \frac{2}{5}\left[-\frac{\cos\frac{k\pi x}{5}}{\frac{k\pi}{5}}\right]_0^5 = \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k), \qquad k = 1,2,\ldots,$$

ezért

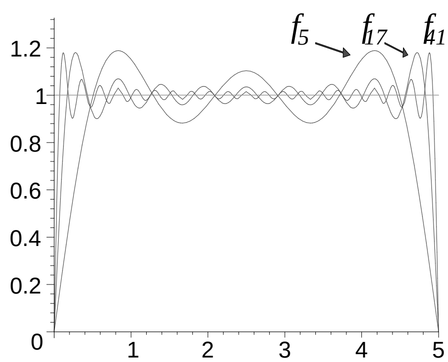
$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{5} + \cdots\right), \qquad x \in (0,5).$$

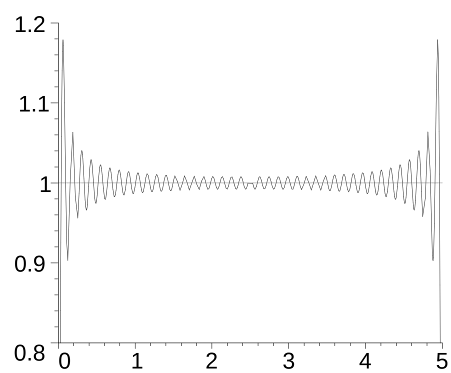
$x = 0$ és $x = 5$-re a Fourier-sor összege 0. Ha $x = 5/2$-et helyettesítünk be az előző egyenletbe, akkor kapjuk a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

ú.n., Euler-összefüggést.

Jelölje f_n a Fourier-sor n-edik részletösszegét, azaz $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{5}$. A bal oldali ábrán az $f_5(x)$, $f_{17}(x)$ és $f_{41}(x)$ részletösszegek grafikonjai, a jobb oldalin pedig az $f_{81}(x)$ részletösszeg grafikonjának kinagyított része látható.





Az ábra azt igazolja, hogy a részletösszegek n növekedésével egyre jobban közelítik a konstans 1 függvény grafikonját. Viszont ez a határérték nem egyenletes, az intervallum két végpontjához közel a Fourier-sor részletösszegeinek maximuma kb. 1.18 körüli értéket vesz fel. Numerikusan ellenőrizhetjük, hogy ez a maximum n növelésével nem változik, csak azt a részletösszeg függvény egyre közelebb veszi fel az intervallum végpontjához. Hasonló viselkedés figyelhető meg nem folytonos függvények véges Fourier-féle közelítő összegeinél. Ezt a jelenséget *Gibbs-jelenségnek* hívjuk.

Az f függvény tiszta koszinuszos Fourier-sora 1, azaz $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ minden $k = 1,2,\ldots$-ra. □

6.5. Fourier-transzformált és Fourier-integrál

Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, amely nem szükségszerűen periodikus.

Legyen $L > 0$ állandó, $g_L : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ olyan $2L$ periodikus függvény, amelyre $g_L(x) = f(x)$, $-L < x < L$. Írjuk fel g_L komplex Fourier-sorát. A g_L függvény Fourier-együtthatói

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g_L(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}\,dt,$$

és ezért

$$g_L(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g_L(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}\,dt\right)e^{in\frac{\pi}{L}x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mivel $g_L(x) = f(x)$ ha $-L < x < L$, így a 6.19. Tétel szerint

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}\,dt\right)e^{in\frac{\pi}{L}x}, \qquad x \in (-L, L)\,.$$

Legyen

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Ekkor $\Delta\lambda_n \overset{\text{def}}{=} \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L}$. Ezzel a jelöléssel az előbbi egyenlet az

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\lambda_n t}\,dt\right)e^{i\lambda_n x}\Delta\lambda_n, \qquad x \in (-L, L)$$

alakban írható fel. Ez minden L-re teljesül, ezért

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\lambda_n t}\,dt\right)e^{i\lambda_n x}\Delta\lambda_n, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.13}$$

Definiáljuk az

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \tag{6.14}$$

függvényt, amelyet az f függvény *Fourier-transzformáltjának* vagy *komplex Fourier-integráljának* nevezünk. Ezzel a jelöléssel kapjuk a (6.13) egyenletből, formálisan először a zárójelen belül elvégezve a határátmenetet, hogy

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\lambda_n)e^{i\lambda_n x}\Delta\lambda_n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A jobb oldali összeg egy improprius integrál Riemann-féle közelítő összege, ahol a $\{\lambda_n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ osztópontokat használjuk a számegyenes felosztásához, így kapjuk, hogy

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.15}$$

A (6.14) és (6.15) képletet együtt a *Fourier-féle inverziós formuláknak* nevezzük.

Hangsúlyozni kell, hogy a fenti levezetés csak formális számolás volt. A képletek precízen is levezethetők a következő feltétel mellett:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty.$$

Azon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvények lineáris terét, amelyek abszolút értéke az egész számegyenesen végesen Lebesgue-integrálható, azaz amelyekre a fenti egyenlőtlenség teljesül, $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$-vel jelöljük. Ezzel a jelöléssel a következőképpen foglalhatjuk össze az eredményünket.

6.25. Tétel. *Legyen $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvény. Ekkor érvényes az ún.* Fourier-féle integrálformula*:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor az f valós függvény, azaz $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ekkor a Fourier-féle integrálformulán a következő átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right) e^{i\lambda x}\, d\lambda \\ &\quad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)}\, dt \right) d\lambda \\ &\quad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)}\, dt \right) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)}\, dt \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Használva az $u = -\lambda$ ($du = -d\lambda$) helyettesítést az első integrálban, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right) e^{i\lambda x}\, d\lambda \\ &\quad = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iu(x-t)}\, dt \right) du + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)}\, dt \right) d\lambda \\ &\quad = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(e^{-i\lambda(x-t)} + e^{i\lambda(x-t)} \right) dt \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Mivel $e^{-i\lambda(x-t)} + e^{i\lambda(x-t)} = 2\cos\lambda(x-t)$, f valós függvény, ezért

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda.$$

Ez a valós *Fourier-féle integrálformula.* A jobb oldalon álló integrálban a cos függvényt kifejtve kapjuk a következő állítást.

6.26. Következmény. *Legyen $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvény. Ekkor*

$$\int_{0}^{\infty} \Big(A(\lambda) \cos\lambda x + B(\lambda) \sin\lambda x \Big) d\lambda = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.16}$$

ahol

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\lambda t\, dt \qquad \textit{és} \qquad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\lambda t\, dt. \tag{6.17}$$

A (6.16) egyenlet bal oldalán álló integrált *valós Fourier-integrálnak* nevezzük.

6.27. Példa. Írjuk fel az

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases} -3, & x\in[-2,0],\\ 5, & x\in(0,4],\\ 0, & x<-2 \text{ vagy } x>4.\end{cases}$$

függvény Fourier-integrálját!

A (6.17) képletek szerint

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-2}^{0} -3\cos\lambda t\,dt+\int_0^4 5\cos\lambda t\,dt\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-3\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right]_{-2}^{0}+\left[5\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right]_0^4\right)\\ &= \frac{-3\sin 2\lambda+5\sin 4\lambda}{\pi\lambda}.\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy $A(\lambda)$ folytonosan kiterjeszthető $\lambda=0$-ra is, hiszen létezik a

$$\lim_{\lambda\to 0}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{-3\sin 2\lambda}{\pi\lambda}+\frac{5\sin 4\lambda}{\pi\lambda}\right)=\frac{-6+20}{\pi}=\frac{14}{\pi}$$

határérték. $B(\lambda)$ hasonlóan számítható:

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-2}^{0} -3\sin\lambda t\,dt+\int_0^4 5\sin\lambda t\,dt\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[3\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\right]_{-2}^{0}+\left[-5\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\right]_0^4\right)\\ &= \frac{8-3\cos 2\lambda-5\cos 4\lambda}{\pi\lambda}.\end{aligned}$$

Megmutatható, hogy $\lim_{\lambda\to 0}B(\lambda)=0$. A 6.26. Következmény szerint

$$\int_0^\infty\left(\frac{-3\sin 2\lambda+5\sin 4\lambda}{\pi\lambda}\cos\lambda x+\frac{8-3\cos 2\lambda-5\cos 4\lambda}{\pi\lambda}\sin\lambda x\right)d\lambda=\begin{cases} 0, & x<-2,\\ -3/2, & x=-2,\\ -3, & x\in(-2,0),\\ 1, & x=0,\\ 5, & x\in(0,4),\\ 5/2, & x=4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

□

Az f függvény Fourier-transzformáltjára használjuk az $\mathcal{F}(f)(\lambda)=F(\lambda)$ jelölést is. A következő tételben összefoglaljuk a Fourier-transzformált néhány fontosabb tulajdonságát.

6.28. Tétel. *Legyen $f,g\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ és $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Ekkor*

1. $\mathcal{F}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathcal{F}(f)+\beta\mathcal{F}(g)$.
2. *Ha f differenciálható és $f'\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, akkor* $\mathcal{F}(f')(\lambda)=i\lambda\mathcal{F}(f)(\lambda)$.
3. $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$, *ahol*

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\,dt$$

az f és g konvolúciója.

6.6. Alkalmazások

Tegyük fel, hogy f Fourier-transzformáltja a $[-L, L]$ intervallumon kívül azonosan nulla, azaz

$$F(\lambda) = 0, \qquad |\lambda| > L. \tag{6.18}$$

6.29. Tétel (Mintavételi tétel). *Tegyük fel, hogy $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvény folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható, amelyre (6.18) teljesül. Ekkor f-et meghatározzák a*

$$0, \pm\frac{\pi}{L}, \pm\frac{2\pi}{L}, \dots$$

pontokban felvett értékei:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n\pi}{L}\Big) \frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi}, \qquad x \neq \frac{n\pi}{L},\ (n \in \mathbb{Z}).$$

Bizonyítás: A Fourier-féle inverziós formulát és a (6.18) feltételt alkalmazva

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} F(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.19}$$

Az $F(\lambda)$ függvény a $(-L, L)$ intervallumon felírható Fourier-sora összegeként:

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi\lambda}{L}}, \qquad \lambda \in (-L, L),$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} F(\lambda) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}}\, d\lambda.$$

A (6.19) összefüggést alkalmazva kapjuk, hogy

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} f\left(\frac{-n\pi}{L}\right).$$

Ezt visszahelyettesítve F Fourier-sorába kapjuk

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{-n\pi}{L}\right) e^{i\frac{n\pi\lambda}{L}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n\pi}{L}\Big) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}}. \end{aligned}$$

Ezért a (6.19) formula szerint $x \neq \frac{n\pi}{L}$-re

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n\pi}{L}\Big) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}} e^{i\lambda x}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n\pi}{L}\Big) \int_{-L}^{L} e^{i\lambda\left(-\frac{n\pi}{L}+x\right)}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n\pi}{L}\Big) \frac{e^{i(Lx-n\pi)} - e^{-i(Lx-n\pi)}}{i(xL - n\pi)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n\pi}{L}\Big) \frac{\sin(Lx - n\pi)}{xL - n\pi}. \end{aligned}$$

□