A közgazdaságtan matematikai alapjai
I. zárthelyi dolgozat
2008. október 28. - „A" csoport

Beugró feladatok Adja meg az alábbi függvények deriváltját!

a

$$f'(x) = (-16x^{17} + 5x^{12} - 6x^3)' = -(16 * 17)x^{16} + (5 * 12)x^{11} - (6 * 3)x^2$$

b

$$f'(x) = (e^x \sin(x))' = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

c

$$f'(x) = ((\ln\ (\mathrm{x}) + 1)^{2008})' = 2008(\ln\ (\mathrm{x}) + 1)^{2007} * \frac{1}{x}$$

1. **Feladat.** Adja meg $f \circ g$-t, ha

$$f: \quad]0; 7] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\ (\mathrm{x})$$

és

$$g: \quad]-2; 1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x + 6$$

Megoldás

$$0 < g(x) \leq 7$$
$$0 < 2x + 6 \leq 7$$
$$-6 < 2x \leq 1$$
$$-3 < x \leq \frac{1}{2}$$

$D_{f \circ g} =]-2; 1] \quad \cap \quad]-3; \frac{1}{2}] \quad = \quad]-2; \frac{1}{2}]$

A függvény: $f \circ g = \ln\ (2x + 6)$.

2. **Feladat.** Melyik konvergens az alábbi sorozatok közül, ha konvergens, akkor számolja a határértékét?

a.) $a_n = \dfrac{-2n^3 - n - 1}{n^5 + 4n^3 - 7n} = \dfrac{n^5(\frac{-2}{n^2} - \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^5})}{n^5(1 + \frac{4}{n^4} - \frac{7}{n^5})} \to 0$

b.) $b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{n + 2 - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \to 0$

c.) $c_n = \left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^n = \left(\dfrac{n(1 + \frac{3}{n})}{n(1 - \frac{1}{n})}\right)^n = \dfrac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{e^3}{e^{-1}} = e^4$

3. **Feladat.** Határozza meg az alábbi sorozat határértékét! Keressen ϵ -hoz küszöbszámot!

$$a_n = \frac{2n - 1}{7n - 5}$$

Megoldás

$$a_n = \frac{2n - 1}{7n - 5} = \frac{n(2 - \frac{1}{n})}{n(7 - \frac{5}{n})} \to \frac{2}{7}$$

$$\left| \frac{2n - 1}{7n - 5} - \frac{2}{7} \right| < \epsilon$$

$$\left|\frac{14n-7}{49n-35}-\frac{14n-10}{49n-35}\right|<\epsilon$$
$$\left|\frac{3}{49n-35}\right|<\epsilon$$
$$\frac{3}{49n-35}<\epsilon$$
$$3<\epsilon*49n-35*\epsilon$$
$$3+35*\epsilon<\epsilon*49n$$
$$\frac{3+35*\epsilon}{49*\epsilon}<n$$

4. **Feladat.** Invertálható-e az $f(x)$ függvény? Ha igen, akkor adja meg a függvény inverzét!

$$f:\quad]-1;\infty[\to\mathbb{R},\quad f(x)=1+2x+x^2$$

Megoldás
Invertálhatóság:

$$1+2x_1+x_1^2\neq 1+2x_2+x_2^2$$
$$(1+x_1)^2\neq(1+x_2)^2$$
$$|1+x_1|\neq|1+x_2|$$
$$1+x_1\neq 1+x_2$$
$$x_1\neq x_2$$

Inverz függvény:

$$y=1+2x+x^2$$
$$y=(1+x)^2$$
$$\sqrt{y}=|1+x|$$
$$\sqrt{y}=1+x$$
$$\sqrt{y}-1=x$$

Értelmezési tartomány
A függvény szigorúan monoton növekedő az értelmezési tartomány minden pontjában. Ezért
$$f(-1)=1+2*(-1)+(-1)^2=0$$
Emellett a függvény végtelenbe tart, ha x tart a végtelenbe.

$$f^{-1}(x):\quad]0;\infty[\to\mathbb{R},\quad f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$$

5. **Feladat.** Adja meg az alábbi függvényhatárértékeket, ha léteznek!

a.) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{5}{4}$

b.) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}=$
$\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}=\dfrac{1}{12\sqrt{3}}$

6. **Feladat.** Írja fel az alábbi függvény $(2;3)$ pontjához húzott érintőjének egyenletét!

$$f(x) = 2x - \frac{2}{x}$$

Megoldás

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$$

$$f'(2) = 2 + \frac{2}{2^2} = 2,5$$

Az érintő egyenlete:

$$y = 2,5(x-2) + 3$$