A teljes indukció elve

Elmélet

Ez a bizonyítási módszer a *természetes számokkal kapcsolatos állítások igazolására* szolgál.

Legyen adott egy A állítás, amely természetes számokra vonatkozik. Azt kell igazolni, hogy az állítás minden olyan természetes számra igaz, mely nem kisebb egy kezdő értéknél.

A bizonyítás három lépésből áll:

1. Igazoljuk, hogy az állítás egy k kezdő értékre helyes.
2. Bebizonyítjuk (indukciós lépés), hogy ha az állítás valamely n természetes számra igaz, akkor ebből következik, hogy igaz a rákövetkező $(n+1)$ természetes számra is.
3. Levonjuk 1. és 2. igaz volta alapján a következtetést, hogy az A állítás bármely, a kezdő értéknél nem kisebb természetes számra igaz.

Feladatok

Igazolja teljes indukcióval az alábbi állításokat!

1. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \dfrac{n^3}{3}, \quad n \geq 1$ egész.
2. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + ... + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, \quad n \geq 1$ egész.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \dfrac{n}{4n+1}, \quad n \geq 1$ egész.
4. $\prod\limits_{k=2}^{n+1} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)^{n} = \dfrac{n+2}{2n+2}, \quad n \geq 2$ egész.
5. Bármely $x \geq 1$ esetén $(1+x)^n \geq 1 + x^n, \quad n \geq 1$ egész.
6. $1 + 2 + ... + n > \dfrac{n^2}{2}, \quad n \geq 1$ egész.
7. $1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n} > n, \quad n \geq 2$ egész.
8. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+k} = \dfrac{n}{n+1}, \quad n \geq 1$ egész.
9. $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6}\right) ... \left(1 - \dfrac{1}{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}\right) = \dfrac{n+2}{3n}, \quad n \geq 2$ egész.
10. Bármely $x \geq 1$ esetén $(1+x)^n \geq x^n + nx, \quad n \geq 2$ egész.