Sorozatok

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Az $a \in \mathbb{R}$ számot $\{a_n\}$ sorozat* ***határértéké****nek (limeszének) nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. Jelölés: $a_n \to a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Definition 2 (Definíció) *Az $\{a_n\}$ sorozatot* ***konvergens****nek mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy $a_n \to a$. Azokat a sorozatokat, amelyek nem konvergensek,* ***divergens****nek nevezzük.*

A fenti definíciót szokás a következő formában is felírni:

$$a_n \to a$$

akkor és csakis akkor, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Definition 3 (Definíció) *Az $\{a_n\}$ sorozatot* ***konvergens****nek mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $|a_n - a| < \varepsilon$ egyenlőtlenség majdnem minden n esetén teljesül. A "majdnem minden" azt jelenti, hogy végessok n kivételével mindig teljesül az állítás.*

Definition 4 (Definíció) *Az $\{a_n\}$ sorozatot* ***konvergens****nek mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy a bármely pozitív sugarú szimmetrikus valamely tagtól kezdve a sorozat minden tagja beleesik.*

Definition 5 (Definíció) *Az $\{a_n\}$ sorozatot* ***konvergens****nek mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy a bármely környezetébe a sorozat majdnem minden tagja beleesik.*

A fenti definíciók mind egyenértékűek, sőt még más velük ekvivalens definíció is adható.

Theorem 6 (Tétel) ***Nevezetes sorozatok határértéke***

Konstans sorozat önmagához tart, azaz $c \to c$,

$$\frac{1}{n} \to 0,$$

mértani sorozat

$$q^n \to \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ \infty, & q > 1, \\ \textit{nincs határértéke, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a} \to 1, \quad a > 0,$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1,$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \to e^a.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal, végtelen határértékkel

Theorem 7 (Tétel) *Ha* $a_n \to a$ *és* $b_n \to b$ *,ahol* $a, b \in \mathbb{R}$, *akkor*

$$\begin{aligned} a_n \pm b_n &\to a \pm b, \\ a_n \cdot b_n &\to a \cdot b, \end{aligned}$$

ha $b_n, b \neq 0$ *minden* $n-$*re, akkor további feltételek mellett*

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

Theorem 8 (Tétel) *Ha* $a_n \to \infty$, *akkor*

$$-a_n \to -\infty.$$

Theorem 9 (Tétel) *Ha* $a_n \to \infty$, *akkor*

$$\frac{1}{a_n} \to 0.$$

Theorem 10 (Tétel) *Ha* $a_n \to 0$ *és* $a_n > 0$ *véges számú kivétellel, akkor*

$$\frac{1}{a_n} \to \infty,$$

Theorem 11 (Tétel) *Ha* $a_n \to 0$ *és* $a_n < 0$ *véges számú kivétellel, akkor*

$$\frac{1}{a_n} \to -\infty.$$

Theorem 12 (Tétel) *Bármely monoton és korlátos sorozat konvergens.*

Theorem 13 (Tétel) *Ha* $a_n \to a$ *és* $\{b_n\}$ *sorozat korlátos, akkor* $a_n b_n \to 0$.

Theorem 14 (Tétel) *Ha* $a_n \to a$ *és* $b_n \to b$ *,ahol* $a, b \in \mathbb{R}$ *továbbá* $a_n \leq b_n$ *véges számú kivétellel, akkor* $a \leq b$.

Theorem 15 (Tétel) *Ha* $a_n \to \infty$ $(b_n \to -\infty)$ *továbbá* $a_n \leq b_n$ *véges számú kivétellel, akkor* $b_n \to \infty$ $(a_n \to -\infty)$.

Theorem 16 (Tétel) ***Rendőr-elv*** *Ha* $a_n \to a$ *és* $c_n \to a$ *,ahol* $a \in \mathbb{R}$ *továbá* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *véges számú kivétellel, akkor* $b_n \to a$.

Feladatok

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $\dfrac{n^{201}+1}{n^{32}-2\cdot n^{67}}$ (b) $65^n - 2\cdot 39^n$

(c) $\dfrac{5\cdot 3^n - 4^n}{2^{2n}+3^n}$ (d) $n-\sqrt{n^2-5n}$

(e) $\sqrt{n-2\sqrt{n}}-\sqrt{n}$ (f) $\sqrt{n^2+6n}-n$

(g) $\sqrt[n]{n^2+2n}$ (h) $\sqrt[n]{3n-n\cos(n)}$

(i) $\sqrt[n]{n^2+2n}$ (j) $\sqrt[n]{2n+\sin(n)}$

(k) $\left(\dfrac{n+7}{n-3}\right)^n$ (l) $\left(1-\dfrac{12}{4n+3}\right)^n$

(m) $\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{2n+1}$ (n) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$

2. A definíció felhasználásával igazolja, hogy

$$(a)\ \frac{n+2}{2n-1}\to\frac{1}{2},\qquad (b)\ 1-n^2\to-\infty,\qquad (c)\ \left(\frac{1}{5}\right)^n\to 0.$$

3. Milyen x valós számok esetén konvergens a $\left(\lg^n(x+1)\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat?

4. Adja meg az összes olyan $x\geq 1$ számot, amelyre az $\left(\left(\sqrt{x-1}-2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens!

5. Igazolja, hogy az alábbi sorozatoknak nincs határértéke!

(a) $\dfrac{(-1)^n n^2 + n}{2n^2 + 1}$

(b) $(-1)^n \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

(c) $\dfrac{n}{n^{(-1)^n} + 1}$

(d) $\dfrac{4^{n+(-1)^n} + 3^n}{4^n + 5}$

(e) $\dfrac{4^n \left(1 + (-1)^n\right) + 2^n}{4^n + 3^n}$

(f) $(n+2)^{(-1)^n}$