Sorozatok

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Az $a \in \mathbb{R}$ számot $\{a_n\}$ sorozat **határértéké**nek (limeszének) nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. Jelölés: $a_n \to a$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

Definition 2 (Definíció) *Az $\{a_n\}$ sorozatot **konvergens**nek mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy $a_n \to a$. Azokat a sorozatokat, amelyek nem konvergensek, **divergens**nek nevezzük.*

A fenti definíciót szokás a következő formában is felírni:

$$a_n \to a$$

akkor és csakis akkor, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Definition 3 (Definíció) *Az $\{a_n\}$ sorozatot **konvergens**nek mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $|a_n - a| < \varepsilon$ egyenlőtlenség majdnem minden n esetén teljesül. A "majdnem minden" azt jelenti, hogy végessok n kivételével mindig teljesül az állítás.*

Definition 4 (Definíció) *Az $\{a_n\}$ sorozatot **konvergens**nek mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy a bármely pozitív sugarú szimmetrikus valamely tagtól kezdve a sorozat minden tagja beleesik.*

Definition 5 (Definíció) *Az $\{a_n\}$ sorozatot **konvergens**nek mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy a bármely környezetébe a sorozat majdnem minden tagja beleesik.*

A fenti definíciók mind egyenértékűek, sőt még más velük ekvivalens definíció is adható.

Theorem 6 (Tétel) ***Nevezetes sorozatok határértéke***

Konstans sorozat önmagához tart, azaz $c \to c$,

$$\frac{1}{n} \to 0,$$

mértani sorozat

$$q^n \to \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ \infty, & q > 1, \\ \text{nincs határértéke, ha } q \leq -1. \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a} \to 1, \quad a > 0,$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1,$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \to e^a.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal, végtelen határértékkel

Theorem 7 (Tétel) *Ha* $a_n \to a$ *és* $b_n \to b$ *,ahol* $a, b \in \mathbb{R}$, *akkor*

$$\begin{aligned} a_n \pm b_n &\to a \pm b, \\ a_n \cdot b_n &\to a \cdot b, \end{aligned}$$

ha $b_n, b \neq 0$ *minden* $n-$*re, akkor további feltételek mellett*

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

Theorem 8 (Tétel) *Ha* $a_n \to \infty$, *akkor*

$$-a_n \to -\infty.$$

Theorem 9 (Tétel) *Ha* $a_n \to \infty$, *akkor*

$$\frac{1}{a_n} \to 0.$$

Theorem 10 (Tétel) *Ha* $a_n \to 0$ *és* $a_n > 0$ *véges számú kivétellel, akkor*

$$\frac{1}{a_n} \to \infty,$$

Theorem 11 (Tétel) *Ha* $a_n \to 0$ *és* $a_n < 0$ *véges számú kivétellel, akkor*

$$\frac{1}{a_n} \to -\infty.$$

Theorem 12 (Tétel) *Bármely monoton és korlátos sorozat konvergens.*

Theorem 13 (Tétel) *Ha* $a_n \to a$ *és* $\{b_n\}$ *sorozat korlátos, akkor* $a_n b_n \to 0$.

Theorem 14 (Tétel) *Ha* $a_n \to a$ *és* $b_n \to b$ *,ahol* $a, b \in \mathbb{R}$ *továbbá* $a_n \leq b_n$ *véges számú kivétellel, akkor* $a \leq b$.

Theorem 15 (Tétel) *Ha* $a_n \to \infty$ $(b_n \to -\infty)$ *továbbá* $a_n \leq b_n$ *véges számú kivétellel, akkor* $b_n \to \infty$ $(a_n \to -\infty)$.

Theorem 16 (Tétel) ***Rendőr-elv*** *Ha* $a_n \to a$ *és* $c_n \to a$ *,ahol* $a \in \mathbb{R}$ *továbá* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *véges számú kivétellel, akkor* $b_n \to a$.

Feladatok

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

$(a)\quad \dfrac{n^{201}+1}{n^{32}-2\cdot n^{67}}$ $\qquad (b)\quad 65^n-2\cdot 39^n$

$(c)\quad \dfrac{2^n+1}{2^n-2\cdot 5^n}$ $\qquad (d)\quad \sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+6}$

$(e)\quad \sqrt{n^5+3n-1}-\sqrt{n^5-n^2+6}$ $\qquad (f)\quad \sqrt{n^2+6n}-n$

$(g)\quad \sqrt[n]{65^n+2\cdot 39^n}$ $\qquad (h)\quad \sqrt[n]{n^5+3n+1}$

$(i)\quad \sqrt[n]{n^2-1}$ $\qquad (j)\quad \sqrt[n]{4^n-2^n+1}$

$(k)\quad \left(\dfrac{n+7}{n-3}\right)^n$ $\qquad (l)\quad \left(\dfrac{4n-9}{4n+3}\right)^n$

2. A definíció felhasználásával igazolja, hogy

   (a) $\dfrac{n+2}{2n-1}\to\dfrac{1}{2}$,

   (b) $\dfrac{7n+8}{5n+3}\to\dfrac{7}{5}$,

   (c) $n^2+2n\to\infty$.