Sorok

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Legyen adva egy* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *valós sorozat. A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

végtelen összeget ***végtelen sor****nak nevezzük. Az*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

összeget a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sor* $n-$***edik részletösszeg****ének mondjuk. Ha az* $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sorozat konvergens, akkor a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *végtelen sort is konvergensnek mondjuk, az*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

véges határértéket pedig a ***sor összegé****nek nevezzük, és ugyancsak a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

szimbólummal jelöljük. Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

Ha az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sorozat divergens, akkor a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sort is divergensnek mondjuk.*

Theorem 2 (Tétel) ***Műveletek konvergens sorokkal.*** *Ha a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *és* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *sorok konvergensek és összegük* A *illetve* B, α *és* β *pedig valós számok, akkor a* $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$*sor is konvergens, és összege* $\alpha A + \beta B$, *azaz*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \alpha A + \beta B$$

Theorem 3 (Tétel) ***A konvergencia szükséges feltétele.***

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

sor konvergens, akkor

$$\lim_{nk\to\infty} a_k = 0$$

Definition 4 (Definíció) *A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

sort ***abszolút konvergens****nek mondjuk, ha a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

sor konvergens. Ha a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor ***feltételesen konvergens****nek nevezzük.*

A konvergens és abszolút konvergens sorok között a következő a kapcsolat.

Theorem 5 (Tétel) *Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

A tétel megfordítása nem igaz.

Konvergenciakritériumok

Elegendő feltételeket adunk végtelen sorok konvergenciájára vagy divergenciájára.

Theorem 6 (Tétel) ***Összehasonlító kritérium*** *Tekintsük a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

és

$$\sum_{k=l}^{\infty} b_k$$

pozitív tagúsorokat.

a. *Ha*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty,$$

akkor a kettő sor egyszerre konvergens vagy divergens.

b. *Ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

akkor a $\sum_{k=l}^{\infty} b_k$ *sor konvergenciájából következik a* $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ *sor konvergenciája.*

Theorem 7 (Tétel) ***Gyökkritérium*** *Tekintsük a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

sort.

a. *Ha van olyan* $0 < q < 1$ *és* $k \in \mathbb{N}$*, amelyekre*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \quad n \geq k,$$

akkor a sor abszolút konvergens.

b. *Ha végtelen sok $n-$re*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1,$$

akkor a sor divergens.

Theorem 8 (Tétel) ***Hányadoskritérium*** *Tekintsük a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

sort.

a. *Ha van olyan $0 < q < 1$ és $k \in \mathbb{N}$, amelyekre*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n \geq k,$$

akkor a sor abszolút konvergens.

b. *Ha végtelen sok $n-$re*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1,$$

akkor a sor divergens.

Definition 9 (Definíció) *Azt mondjuk, hogy a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

sor Leibniz-típusú, ha

1. *az $\{a_n\}$ sorozat jelváltó, azaz $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, $n \geq l$,*

2. *az $\{|a_n|\}$ sorozat csökkenő,*

3. $a_n \to 0$.

Theorem 10 (Tétel) ***Leibniz-kritérium*** *Ha a*

$$\sum_{k=l}^{\infty} a_k$$

sor Leibniz-típusú, akkor konvergens, és $\sum_{k=l}^{\infty} a_k - \sum_{k=l}^{n} a_k$ a 0 és a_{n+1} között van.

Feladatok

1. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+7},$$

$$(3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} \qquad (4)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1},$$

$$(5)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}, \qquad (6)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{7n^2+2n+5}{9n^2+7n+3}\right)^n,$$

$$(7)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+2)!}, \qquad (8)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!},$$

$$(9)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}, \qquad (10)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!},$$

$$(11)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n, \qquad (12)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

$$(13)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}, \qquad (14)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!},$$

$$(15)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n, \qquad (16)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$$

$$(17)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n, \qquad (18)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n!}$$

$$(19)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2}{n^3+2n+1} \qquad (20)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$$

2. Konvergens-e az alábbi sor? Abszolút konvergens-e?

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}, \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}, \qquad (c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}.$$

3. Adja meg az alábbi sor összegét!

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{7^n}, \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{6^n}, \qquad (3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}.$$

$$(4)\quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n} \qquad (5)\quad \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2n} \qquad (6)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{9^n}$$

$$(7)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} \qquad (8)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^{2n}} \qquad (9)\quad \sum_{n=4}^{\infty} \left(7^{-2n} + \frac{5}{3^{n+1}}\right)$$