Primitív függvény, határozatlan integrál

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt f* ***primitív függvény****ének nevezzük az I intervallumon, ha F differenciálható $i-$n és itt $F_I' = f$.*

Theorem 2 (Tétel) *Ha az F az f függvény primitív függvénye az I intervallumon, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $F + c$ is primitív függvénye $f-$nek az I intervallumon, és $f-$nek bármely primitív függvény $I-$n $F + c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$.*

Definition 3 (Definíció) *Egy f valós függvény* ***határozatlan integrál****ján az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon f $I-$n vett primitív függvényeinek a halmazát értjük (ha nem üres). Jelölés: $\int f$ vagy $\int f(x)\, dx$. Az f függvényt integrandusznak nevezzük.*

Alapintegrálok

$\int f(x)\, dx$	$F(x) + C$
$\int x^a dx$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\int \dfrac{1}{x} dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$
$\int a^x dx$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\int \sin(x)\, dx$	$-\cos(x) + c$

$\int f(x)\, dx$	$F(x) + C$
$\int \cos(x)\, dx$	$\sin(x) + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2(x)} dx$	$tg(x) + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2(x)} dx$	$-ctg(x) + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin(x) + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx$	$arctg(x) + C$

$$c, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$$

Tulajdonságok

Theorem 4 (Linearitás) *Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Ha $f-$nek és $g-$nek primitív függvénye az $(a, b)-n$ F illetve G, továbbá $k \in \mathbb{R}$, akkor $(kf)-$nek primitív függvénye az $(a, b)-n$ kF, $(f + g)-$nek pedig $F + G$. Eszerint*

$$\int (kf) = k \int f,$$
$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

Theorem 5 (Lineáris helyettesítés) *Legyen $f-$nek primitív függvénye az $(\alpha, \beta)-n$ F, továbbá $g(x) = ax + b$ lineáris függvény, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és (γ, δ) olyan intervallum, hogy $g((\gamma, \delta)) \subset (\alpha, \beta)$. Ekkor az $f \circ g$ függvénynek a $(\gamma, \delta)-n$ primitív függvénye $\dfrac{1}{a}(F \circ g)$, azaz*

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c, \quad x \in (\gamma, \delta).$$

Parciális integrálás

Theorem 6 (Parciális integrálás) *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Ha f és g differenciálhatók $(a,b)-n$ és az fg' függvénynek van primitív függvénye $(a,b)-n$, akkor az $f'g$ függvénynek is van primitív függvénye $(a,b)-n$, és*

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx, \quad x \in (a,b).$$

Helyettesítéses integrálás

Theorem 7 (1. típusú helyettesítés) *Legyen g differenciálható és nem állandó $(a,b) \subset \mathbb{R}$ intervallumon. Ha F primitív függvénye $f-$nek a $g((a,b))$ intervallumon, akkor $F \circ g$ primitív függvénye $f-$nek az $(a,b)-n$, azaz*

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \left[\int f(u)\, du\right]_{u=g(x)} = F(g(x)) + c, \quad x \in (a,b).$$

Theorem 8 (2. típusú helyettesítés) *Legyen g differenciálható $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ intervallumon és g' sehol sem tűnik el $(\alpha,\beta)-n$. Ha F primitív függvénye $(f \circ g)\, g'-$nek az $(\alpha,\beta)-n$, akkor $F \circ g^{-1}$ primitív függvénye $f-$nek a $g((\alpha,\beta))$ intervallumon, azaz*

$$\begin{aligned}\int f(x)\, dx &= \left[\int f(g(u))\, g'(u)\, du\right]_{u=g^{-1}(x)} = \\ &= F\left(g^{-1}(x)\right) + c, \quad x \in g((\alpha,\beta)).\end{aligned}$$

Feladatok

1. Adja meg az alábbi primitív függvényeket!

(a)
$$\int x^4 \ln(x)\, dx,$$

(b)
$$\int \ln(x+1)\, dx,$$

(c)
$$\int x \sin(x)\, dx,$$

(d)
$$\int \frac{1}{x^3} \ln(x)\, dx,$$

(e)
$$\int x e^{5x} dx,$$

(f)
$$\int x \cos(3x)\, dx,$$

(g)
$$\int x \mathrm{arctg}(x)\, dx,$$

(h)

$$\int \frac{\sqrt{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

(i)

$$\int \left(1+x^2\right)^{10} x dx,$$

(j)

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x}dx,$$

(k)

$$\int \frac{1+\operatorname{tg}(x)}{\cos^2(x)}dx,$$

(l)

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}dx,$$

(m)

$$\int \frac{x^4}{3+x^5}dx,$$

(n)

$$\int \frac{1}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}}dx,$$

(o)

$$\int \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx,$$

(p)

$$\int x \sin\left(x^2+1\right) dx,$$

(q)

$$\int \frac{\cos(3\ln(x))}{x}dx,$$

(r)

$$\int \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx,$$

(s)

$$\int \frac{4x}{x^2+2x+5}dx,$$

(t)

$$\int \frac{x}{x^2+2x+10}dx,$$

(u)

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+10}dx,$$

(v)

$$\int \frac{x+1}{(x-2)(x+5)}dx,$$

(w)
$$\int \frac{x+1}{(x-2)(x+5)} dx,$$

(x)
$$\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} dx,$$

(y)
$$\int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)} dx,$$

(z)
$$\int \frac{2x+1}{(x-3)(x+2)} dx.$$

2. Adja meg az alábbi primitív függvényeket!

(a)
$$\int \frac{e^{3x}}{e^x-2} dx, \qquad e^x = t \text{ helyettesítés},$$

(b)
$$\int \frac{1}{1+x^{1/3}} dx, \qquad x^{1/3} = t \text{ helyettesítés},$$

(c)
$$\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}+5} dx, \qquad \sqrt{x} = t \text{ helyettesítés},$$

(d)
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+8} dx, \qquad e^x = t \text{ helyettesítés},$$

(e)
$$\int \frac{e^x+8}{e^{2x}+4} dx, \qquad e^x = t \text{ helyettesítés},$$

(f)
$$\int \sin\left(2\sqrt{x}\right) dx, \qquad \sqrt{x} = t \text{ helyettesítés}.$$