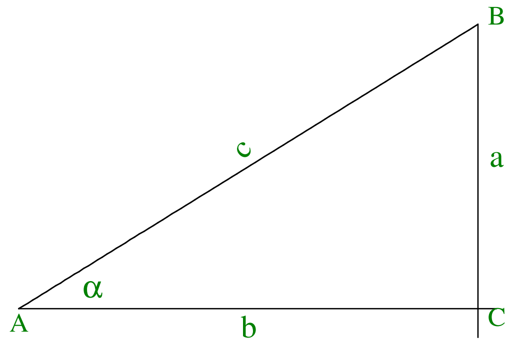
Trigonometria

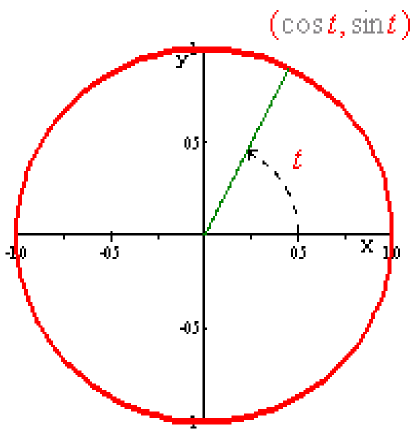
szögfüggvények

I. A hegyesszögek szögfüggfényeit a derékszögű háromszögek oldalainak arányaival is definiálhatjuk.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad tg\alpha = \frac{a}{b}; \quad ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

II.



$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

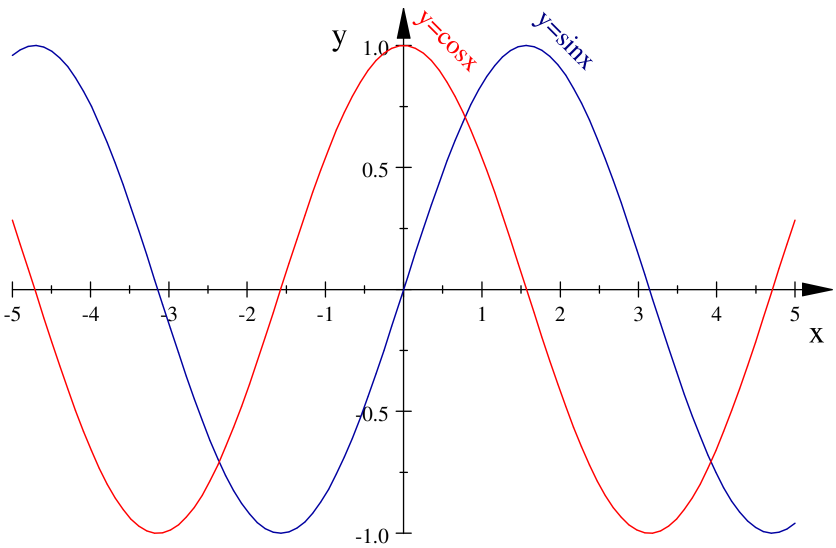
nevezetes szögek szögfüggvényértékei

$$\sin\tfrac{\pi}{6} = \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} \qquad tg\tfrac{\pi}{6} = ctg\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}$$

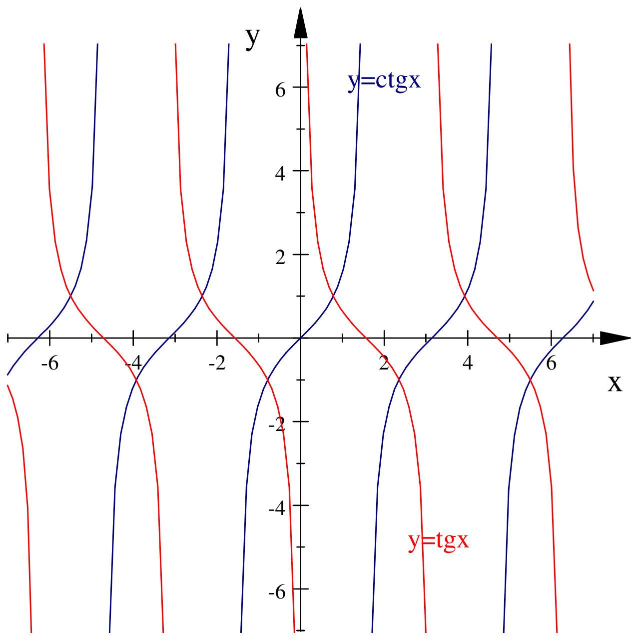
$$\sin\tfrac{\pi}{3} = \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\tfrac{\pi}{3} = ctg\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sin\tfrac{\pi}{4} = \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\tfrac{\pi}{4} = ctg\tfrac{\pi}{4} = 1$$

trigonometrikus függvények



$y = \sin x$ és $y = \cos x$



$y = tgx$ és $y = ctgx$

néhány összegzési tétel (bővebben ld. Négyjegyű függvénytáblázatok)

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$; $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$; $ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$; $\cos\alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x+y) + \frac{1}{2}\sin(x-y)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Feladatok

1. Rendezze növekvő sorrendbe a következő számokat!

   a. $\sin 50^\circ$ $\sin 100^\circ$ $\sin 150^\circ$ $\sin 200^\circ$ $\sin 250^\circ$ $\sin 300^\circ$ $\sin 350^\circ$ $\sin 400^\circ$

   b. $\cos 1^\circ$ $\cos 2^\circ$ $\cos 3^\circ$ $\cos 4^\circ$ $\cos 5^\circ$ $\cos 6^\circ$

2. Egy egyenlő szárú háromszög magassága kétszerese az alapjának. Számítsuk ki a két szár által bezárt szög koszinuszát és tangensét!

3. Derékszögű-e az a háromszög, melyben a szokásos jelölésekkel

   $a = 4cm,\ b = 3cm,\ \gamma = 77^\circ$

4. A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmethető az alábbi kifejezés?

$$\sqrt{1 - \lg \sin x}$$

5. A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmethető az alábbi kifejezés?

$$\sqrt{\lg(1 + \cos x)}$$

6. Mekkora $\sin 2x$ értéke, ha $\cos x = \frac{3}{5}$?

7. Mekkora $ctgx + ctgy$ értéke, ha $\sin x + 2\sin y = 3$?

8. Mekkora $\cos 2x$ értéke, ha $(tgx \cdot \cos x)^2 = 0,72$?

9. Mekkora $ctg4x$ értéke, ha $\sin 2x = \cos 2x$?

10. Mekkora $\sin x$ értéke, ha $tgx = \frac{5}{8}$?

11. A

$$\lg \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

kifejezés értelmezhető

a. minden valós számra;

b. minden valós számra, kivéve π páratlan számú többszöröseit;

c. minden valós számra, kivéve π egész számú többszöröseit;

d. minden valós számra, kivéve az $x = \pi$ és az $x = -\pi$ értékeket.

Döntse el, hogy melyik állítás igaz, és indokolja meg!

12. A

$$\sqrt{\frac{\sin x - 1}{\cos x}}$$

kifejezés értelmezhető

a. minden valós számra;

b. minden nempozitív valós számra;

c. a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ intervallumokon;

d. a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^+$ intervallumokon.

Döntse el, hogy melyik állítás igaz, és indokolja meg!