Függvényhatárérték (L'Hospital szabály)

Elmélet

Theorem 1 (L'Hospital szabály) *Legyen* $a \in \bar{\mathbb{R}}$. *Tegyük fel, hogy vagy*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

vagy

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty.$$

Ha valamely $b \in \bar{\mathbb{R}}$ *esetén*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b,$$

akkor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértéket!

   (a)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x)-x}{\cos(x)-1},$$

   (b)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x}{\arcsin(x)-x},$$

   (c)
   $$\lim_{x\to 0+}\arcsin(x)\operatorname{ctg}(x),$$

   (d)
   $$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(2x)\right),$$

   (e)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x)}},$$

   (f)
   $$\lim_{x\to\infty}(2x+1)^{\frac{1}{\ln(x)}},$$

   (g)
   $$\lim_{x\to\infty}(e^x+1)^{\frac{1}{2x}},$$

   (h)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(2x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln(x)}},$$

   (i)
   $$\lim_{x\to 0}(\sin(3x)+1)^{\frac{1}{2x}},$$

   (j)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$