Skaláris szorzat az R^n vektortérben

Összeállította: dr. Leitold Adrien

egyetemi docens

Vektorok skaláris szorzata

- Két R^n-beli vektor skaláris szorzata:

Legyen $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ két R^n-beli vektor. Ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzatán (skalárszorzatán) az alábbi számot értjük:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$$

Jelölés: $\underline{a} \cdot \underline{b}$, $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$

A skaláris szorzat alaptulajdonságai

- A skaláris szorzat alaptulajdonságai:

  Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in R^n$ és $\lambda \in R$. Ekkor:

1. $\langle \underline{a}, \underline{b}+\underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle + \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$

   $\langle \underline{a}, \lambda \cdot \underline{b} \rangle = \lambda \cdot \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$

   $\langle \underline{a}+\underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle + \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$

   $\langle \lambda \cdot \underline{a}, \underline{b} \rangle = \lambda \cdot \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ bilineáris

2. $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle$ szimmetrikus

3. $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle \geq 0$ és $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{o}$

   pozitív definit

Vektorok hossza

- Egy R^n-beli vektor hossza (normája):
  Legyen $\underline{x} \in R^n$. Ekkor az $\underline{x}$ vektor hossza (normája):
  $$\sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$
  Jelölés: $|\underline{x}|$, $\|\underline{x}\|$

- Megjegyzések: Legyen $\underline{x} \in R^n$ és $\lambda \in R$.

1. A fenti definíció és a skaláris szorzat pozitív definitsége miatt $\|\underline{x}\| \geq 0$ és $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{o}$.
2. Igazolható, hogy $\|\lambda \cdot \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|$.

- Egy $\underline{x} \in R^n$ vektort egységre normáltnak (egységvektornak) nevezünk, ha $\|\underline{x}\| = 1$.
- Igazolható, hogy bármely $\underline{x} \in R^n$, $\underline{x} \neq \underline{o}$ esetén az $\frac{1}{\|\underline{x}\|} \cdot \underline{x}$ vektor egységre normált.

Nevezetes egyenlőtlenségek

- Cauchy-Bunyakovszkij- Schwarz egyenlőtlenség:

  Legyen $\underline{x}$ és $\underline{y}$ két tetszőleges R^n-beli vektor. Ekkor:

  $$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$, azaz

  $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$,

  és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\underline{x} \parallel \underline{y}$.

- Minkowsky (vagy háromszög) egyenlőtlenség:

  Legyen $\underline{x}$ és $\underline{y}$ két tetszőleges R^n-beli vektor. Ekkor:

  $$\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$$.

Két vektor szöge

- Két R^n-beli vektor szöge

  Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két, nullvektortól különböző R^n-beli vektor. Ekkor azt a $\varphi\in[0,\pi]$ szöget, melyre
  $$\cos\varphi = \frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|}$$
  teljesül, az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szögének nevezzük.

- Speciális esetek: Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in R^n$, $\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{o}$.
  - Ha $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$, akkor $\varphi = \pi/2$.
  - Ha $\underline{a} = \lambda\cdot\underline{b}$, akkor
    - $\lambda>0$ esetén $\varphi = 0$, ilyenkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egyirányú,
    - $\lambda<0$ esetén $\varphi = \pi$, ilyenkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ ellentétes.

További állítások

1. Legyenek $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$, $\underline{x}, \underline{y} \neq \underline{o}$, jelölje φ az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok szögét. Ekkor:

   $\| \underline{x}-\underline{y} \|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - 2\cdot\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cdot cos\varphi$ „cosinus-tétel”

2. Legyenek $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$, $\underline{x}, \underline{y} \neq \underline{o}$, jelölje φ az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok szögét és legyen $\varphi = \pi/2$. Ekkor:

   $\| \underline{x}-\underline{y} \|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2$ „Pitagorasz-tétel”

3. Legyenek $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$, $\underline{x}, \underline{y} \neq \underline{o}$. Ekkor:

   $\| \underline{x}-\underline{y} \|^2 + \| \underline{x}+\underline{y} \|^2 = 2\cdot\|\underline{x}\|^2 + 2\cdot\|\underline{y}\|^2$

   „paralelogramma-szabály”

Ortogonalitás

1. Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két R^n-beli vektor. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokat ortogonálisaknak nevezzük, ha skaláris szorzatuk nulla.
2. Egy $H \subseteq R^n$ vektorhalmaz ortogonális, ha páronként ortogonális, nullvektortól különböző vektorok alkotják.
3. Egy $H \subseteq R^n$ vektorhalmaz ortonormált, ha ortogonális és vektorai egységre normáltak.

Megjegyzések:

1. $\underline{a}$ és $\underline{b}$ ortogonális $\Leftrightarrow$ $\varphi = \pi/2$ vagy $\underline{a} = \underline{o}$ vagy $\underline{b} = \underline{o}$.
2. R^n-ben a kanonikus bázis ortonormált.
3. Igazolható, hogy ha a $H \subseteq R^n$ vektorhalmaz ortogonális, akkor H lineárisan független.
4. Legyen $B=\{\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n\}$ ortonormált bázis R^n-ben. Ekkor egy $\underline{x} \in R^n$ vektor B bázisra vonatkozó i-edik koordinátája: $\langle \underline{x}\,,\,\underline{b}_i \rangle$

Fourier-együttható

Legyen $\underline{v} \in R^n$, $\underline{v} \neq \underline{o}$ rögzített vektor. Ekkor igazolható, hogy bármely $\underline{x} \in R^n$ vektor esetén egyértelműen létezik egy olyan $\alpha \in R$ szám, amelyre az $\underline{x} - \alpha \cdot \underline{v}$ vektor és a $\underline{v}$ vektor ortogonális. Mégpedig:

$$\alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{v} \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

Ezt az α számot az $\underline{x}$ vektor $\underline{v}$ vektorra vonatkozó Fourier-együtthatójának nevezzük.

Megjegyzés: Ekkor az $\alpha \cdot \underline{v}$ vektor az $\underline{x}$ vektor $\underline{v}$ irányába eső merőleges vetületvektora.

Ortogonális komplementer

Legyen $S \subseteq R^n$, $S \neq \emptyset$.

1. Az $\underline{x} \in R^n$ vektort S-re ortogonálisnak hívjuk, ha $\underline{x}$ ortogonális az S vektorhalmaz minden vektorára.
2. Az S vektorhalmaz ortogonális komplementere az S-re ortogonális vektorok összessége:

$$S^{\perp} = \{\underline{x} \in R^n \mid \text{bármely } \underline{s} \in S \text{ esetén } \langle \underline{x}, \underline{s} \rangle = 0\} \quad .$$

Megjegyzés:

Igazolható, hogy bármely $S \subseteq R^n$, $S \neq \emptyset$ vektorhalmaz esetén $S^{\perp}$ altér R^n–ben.

Az ortogonális felbontás tétele

Legyen H altér az R^n vektortérben. Ekkor:

1. R^n direkt összege a H és $H^\perp$ altereknek:

$$R^n = H \oplus H^\perp.$$

2. Legyen $\underline{x} \in R^n$, $\underline{x} = \underline{h} + \underline{h}^\perp$, ahol $\underline{h} \in H$ és $\underline{h}^\perp \in H^\perp$.
   Ekkor: $$\|\underline{x}\|^2 = \|\underline{h}\|^2 + \|\underline{h}^\perp\|^2 .$$

3. A $H^\perp$ altér ortogonális komplementere H, azaz:

$$H^{\perp\perp} = H .$$

Az ortogonális projekció

Legyen H altér az R^n vektortérben.

Tekintsük a következő leképezést:

$$\pi :\ R^n \to R^n,\ \underline{x} \mapsto \underline{h},$$

ahol $\underline{x} = \underline{h} + \underline{h}^{\perp}$ és $\underline{h} \in H$, $\underline{h}^{\perp} \in H^{\perp}$.

A fenti leképezést a H altérre való ortogonális projekciónak (merőleges vetítésnek) nevezzük.

A $\pi(\underline{x})$ vektort az $\underline{x}$ vektor H altérre eső ortogonális vetületvektorának hívjuk.

Az ortogonális projekció tulajdonságai

Az előző definíció jelöléseit megtartva a π ortogonális projekció tulajdonságai:

1. π lineáris transzformáció
2. $\pi \circ \pi = \pi$
3. $\pi|_H = id|_H$, $\pi|_{H^\perp} = o$ (azonosan nulla leképezés)
4. Bármely $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ esetén: $\langle \pi(\underline{x}), \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \pi(\underline{y}) \rangle$
5. Bessel-egyenlőtlenség: $\|\pi(\underline{x})\| \leq \|\underline{x}\|$
6. A legjobb approximáció tétele: bármely $\underline{x} \in R^n$ esetén a $\pi(\underline{x})$ vetületvektor az $\underline{x}$-hez legközelebb eső H-beli vektor, azaz: bármely $\underline{y} \in H$-ra $\|\underline{x} - \pi(\underline{x})\| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\|$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\underline{y} = \pi(\underline{x})$.