Lineáris leképezések

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Lineáris leképezés fogalma

- Lineáris leképezés:

  Az $A : R^m \to R^n$ típusú fv.-t lineáris leképezésnek nevezzük, ha bármely $\underline{x}, \underline{y} \in R^m, \quad \lambda \in R$ esetén:

  $A(\underline{x}+\underline{y}) = A(\underline{x}) + A(\underline{y})$ additív

  $A(\lambda \underline{x}) = \lambda \cdot A(\underline{x})$ homogén

- Megjegyzések:
  - Ha speciálisan $m = n$, akkor lineáris transzformációról beszélünk.
  - Ha az A leképezés $R^m \to R^n$ típusú, akkor $dom\,(A) = R^m, \quad im\,(A) \subseteq R^n$.

Lineáris leképezések tulajdonságai (Állítások)

- Bármely lineáris leképezés nullvektorhoz nullvektort rendel .
- Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in R^m$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in R$, akkor

$$A(\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k) = \lambda_1 \cdot A(\underline{v}_1) + \ldots + \lambda_k \cdot A(\underline{v}_k)$$

- Legyen $A: R^m \to R^n$ lin. leképezés, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ bázis R^m-ben. Ekkor bármely $\underline{x} \in R^m$ esetén az $A(\underline{x})$ képvektorra:

ha $\underline{x} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{b}_m$, akkor

$$A(\underline{x}) = \lambda_1 A(\underline{b}_1) + \ldots + \lambda_m A(\underline{b}_m) \text{ ,}$$

azaz a képvektort egyértelműen meghatározzák a bázisvektorok képei.

Magtér, képtér

- Lineáris leképezés magtere:

  Legyen $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés. Az A leképezés magtere olyan R^m-beli vektorokból áll, amelyekhez A az R^n nullvektorát rendeli:

  $$ker(A) = \left\{ \underline{x} \in R^m \middle| \, A(\underline{x}) = \underline{o} \right\}$$

  Megjegyzés: Minden lineáris leképezés magtere tartalmazza a nullvektort.

- Lineáris leképezés képtere: a képvektorok halmaza.

  $$im(A) = \left\{ A(\underline{x}) \in R^n \middle| \, \underline{x} \in R^m \right\}$$

  Megjegyzés: Igazolható, hogy minden lineáris leképezésnél a magtér altér R^m-ben, a képtér altér R^n-ben.

Lineáris leképezés mátrixa

- Lineáris leképezés mátrixa:

  Legyen $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés, $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_m$ a kanonikus bázis R^m-ben. Az A lin. leképezés (kanonikus bázisokra vonatkozó) mátrixán azt az n x m-es mátrixot értjük, amelynek oszlopvektorai az $A(\underline{e}_1),\ldots, A(\underline{e}_m)$ képvektorok.

  Jel.: $M(A),\ \mathbf{A}$

- Megjegyzés:

  Az $\underline{x} \in R^m$ vektor képe az $M(A)\cdot\underline{x}$ mátrixszorzással is megkapható, ahol $\underline{x}$-et oszlopvektorként írjuk fel.

Műveletek lineáris leképezésekkel

- Lineáris leképezések összege:

  Legyenek $A : R^m \to R^n, \quad B : R^m \to R^n$ lineáris leképezések.

  Az A és B összege:

  $(A+B)(\underline{x}) = A(\underline{x}) + B(\underline{x})$, minden R^m-beli $\underline{x}$-re.

- Igazolhatóak az alábbiak:
  - Az $A+B$ leképezés is lineáris.
  - $M(A+B) = M(A) + M(B)$

Műveletek lineáris leképezésekkel (folyt.)

- Lineáris leképezés skalárszorosa:

  Legyen $A : R^m \to R^n, \lambda \in R$.

  Ekkor az A leképezés λ-szorosa:

  $(\lambda \cdot A)(\underline{x}) = \lambda \cdot A(\underline{x})$, minden R^m-beli $\underline{x}$-re.

- Igazolhatóak az alábbiak:
  - A $\lambda \cdot A$ leképezés is lineáris.
  - $M(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot M(A)$

Műveletek lineáris leképezésekkel (folyt.)

- Lineáris leképezések összetétele (kompozíciója):

  Legyenek $A: R^m \to R^n$ és $B: R^\ell \to R^m$ lin. leképezések. Ekkor az $A \circ B: R^\ell \to R^n$ leképezés is lineáris.

- Igazolható:

$$M(A \circ B) = M(A) \cdot M(B)$$

- Megjegyzés:

  A fentiek alapján lineáris leképezések és mátrixok között kölcsönösen egyértelmű, művelettartó megfeleltetés létesíthető.

Speciális lineáris leképezések

- Identikus leképezés:

$$id_{R^n} : R^n \to R^n \,,\ \underline{x} \mapsto \underline{x} \qquad \text{mátrixa}: \ M(id_{R^n}) = E_{n\times n}$$

- k-adik projekció (vetítő) függvény:

$$pr_k : \ R^n \to R \,,\ (x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) \mapsto x_k \qquad \text{mátrixa}: \ M(pr_k) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0\dots1\dots0 \end{bmatrix} \\ \text{k -}^{\uparrow}\text{ adik} \end{array}$$

- k-adik injekció (beágyazó) függvény:

$$in_k : \ R \to R^n \ , \quad x \mapsto (0,\dots,0,x,0,\dots,0) \qquad \text{mátrixa}: M(in_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \text{k} - \text{adik} \\ \\ \\ \end{array}$$

Lineáris leképezés rangja

- Lineáris leképezés rangja: Az $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés rangján a képtér dimenzióját értjük:

$$r(A) = dim(im(A))$$

- Igazolható, hogy minden $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezésre:

$$r(A) = r(M(A))$$

Lineáris leképezésekre vonatkozó további állítások

- Az $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés injektív (invertálható) $\Leftrightarrow$ $ker(A) = \{\underline{o}\}$.
- Bármely $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés esetén lineárisan összefüggő vektorok képvektorai is lineárisan összefüggőek.
- Az $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés injektív (invertálható) $\Leftrightarrow$ lineárisan független vektorok képvektorai is lineárisan függetlenek.
- Az $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés ráképezés $\Leftrightarrow$ generátorrendszer képe is generátorrendszer.
- Az $A: R^m \to R^n$ lineáris leképezés bijektív $\Leftrightarrow$ bázis képe is bázis.

Lineáris transzformáció determinánsa

- Az $A: R^n \rightarrow R^n$ lineáris transzformáció determinánsán mátrixának determinánsát értjük:

$$det\,(A) = det\,(M(A)) \quad .$$

- Megjegyzés: Lineáris transzformáció mátrixa mindig négyzetes!

Lineáris transzformáció invertálhatósága

- Lin. transzformáció invertálhatóságának feltétele:
  - Az $A : R^n \to R^n$ lin. transzformáció invertálható $\Leftrightarrow$ az A lin. transzformáció mátrixa invertálható.
  - Az $A : R^n \to R^n$ lin. transzformáció invertálható $\Leftrightarrow$ $det\,(A) = det\,(M\,(A)\,) \neq 0.$
- Ha az $A : R^n \to R^n$ lin. transzformáció invertálható, akkor az inverz transzformáció is lineáris és az inverz transzformáció mátrixa:

$$M\,(A^{-1}) = (M\,(A)\,)^{-1}\ .$$

Lin. transzformáció sajátértéke, sajátvektora, sajátaltere

1. Legyen $A: R^n \to R^n$ típusú lineáris transzformáció. Az A lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük a $\lambda \in R$ számot, ha van olyan $\underline{v} \in R^n$, $\underline{v} \neq \underline{o}$ vektor, amelyre $A(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$ teljesül.

   Ekkor a $\underline{v} \in R^n$ vektort a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük.
2. Az $A: R^n \to R^n$ lineáris transzformáció sajátalterét olyan $\underline{v} \in R^n$ vektorok alkotják, amelyekre $A(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$ teljesül Jel.: $H(\lambda)$.
3. A $H(\lambda)$ sajátaltér dimenzióját a λ sajátérték geometriai multiplicitásának nevezzük.

Lin. transzformáció sajátértéke, sajátvektora, sajátaltere (folyt.)

- Megjegyzések:

1. A $H(\lambda)$ sajátaltér vektorai a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok és a nullvektor.
2. Igazolható, hogy a $H(\lambda)$ sajátaltér (ahogy az elnevezés is mutatja) altér R^n–ben.

- Állítás:

Egy lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai lineárisan függetlenek.

- Következmény:

Egy $A: R^n \to R^n$ lineáris transzformációnak legfeljebb n darab különböző sajátértéke lehet.

Négyzetes mátrix sajátértéke, sajátvektora

Legyen A $n\times n$-es mátrix. Az A mátrix sajátértékének nevezzük a $\lambda\in R$ számot, ha van olyan $\underline{v}$ $n\times 1$-es oszlopvektor, ahol $\underline{v}\neq\underline{o}$, és amelyre $A\cdot\underline{v} = \lambda\cdot\underline{v}$ teljesül.

Ekkor a $\underline{v}$ oszlopvektort a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor-nak nevezzük.

Megjegyzés:

1. $\underline{v}$ pontosan akkor λ sajátértékhez tartozó sajátvektora az A négyzetes mátrixnak, ha nemtriviális megoldása az $(A-\lambda\cdot E)\cdot\underline{x}=\underline{o}$ homogén egyenletrendszernek.

2. Az $(A-\lambda\cdot E)\cdot\underline{x} = \underline{o}$ homogén egyenletrendszernek pontosan ak-kor van triviálistól különböző megoldása, ha $det(A-\lambda\cdot E) = 0$.

Karakterisztikus polinom, karakterisztikus egyenlet

1. Legyen A $n \times n$-es mátrix. Az A négyzetes mátrix karakterisztikus polinomján a $P(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E)$ polinomot, karakterisztikus egyenletén a $P(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E) = 0$ egyenletet értjük.

2. Lineáris transzformáció karakterisztikus polinomján mátrixának karakterisztikus polinomját értjük.

   Lineáris transzformáció karakterisztikus egyenletén mátrixának karakterisztikus egyenletét értjük.

Megjegyzések:

1. Ha A $n \times n$-es mátrix, akkor a karakterisztikus polinom λ-ra nézve n-ed fokú polinom, míg a karakterisztikus egyenlet n-ed fokú algebrai egyenlet.
2. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei.
3. A λ sajátérték algebrai multiplicitása az a szám, amely megmutatja, hogy λ hányszoros gyöke a $P(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletnek.
4. Igazolható, hogy egy λ sajátérték geometriai multiplicitása mindig kisebb vagy egyenlő, mint az algebrai multiplicitás.

Összefoglalás:
A sajátértékek, sajátvektorok meghatározása

Adott: $A: R^n \to R^n$ lineáris transzformáció.

1. Felírjuk az A lin. transzformáció mátrixát. $\Rightarrow A_{n\times n}$
2. Felírjuk a karakterisztikus egyenletet: $P(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E) = 0$
3. Megoldjuk a karakterisztikus egyenletet. $\Rightarrow \lambda$ sajátértékek
   λ hányszoros gyöke a karakterisztikus egyenletnek? $\Rightarrow$ algebrai multiplicitás
4. Minden λ sajátérték esetén az ismert λ sajátértékkel felírjuk az $(A - \lambda \cdot E) \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszert és bázis-transzformációval megoldjuk azt. $\Rightarrow M$ megoldáshalmaz
5. A λ sajátértékű sajátvektorok összessége: $M \setminus \{\underline{o}\}$
6. A λ sajátértékű sajátaltér: $H(\lambda) = M$
7. A λ sajátérték geometriai multiplicitása: $dim\,(H(\lambda))$

Cayley-Hamilton tétel

- Minden lineáris transzformáció illetve négyzetes mátrix gyöke a saját karakterisztikus egyenletének. Azaz:

1. Legyen $A: R^n \to R^n$ lineáris transzformáció, melynek a karakterisztikus egyenlete: $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

   Ekkor: $P(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 id_{R^n} = O$,

   ahol $O: R^n \to R^n,\ \underline{x} \mapsto \underline{o}$ az azonosan nulla leképezés.

2. Legyen A $n \times n$-es mátrix, melynek a karakterisztikus egyenlete: $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

   Ekkor: $P(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 E = O$,

   ahol O az $n \times n$-es nullmátrix.