Lineáris egyenletrendszerek

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Lineáris egyenletrendszerek általános alakja

- Általános (részletes) alak:

$$a_{11}\cdot x_1+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1$$
$$a_{21}\cdot x_1+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\cdot x_1+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m$$

m egyenlet
n ismeretlen: $x_1, \ldots, x_n$

- Jelölések:

$$\underline{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\ \underline{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix},\ \ldots,\ \underline{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix},\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Lin. egyenletrendszerek általános alakja (folyt.)

- Tömörebb alak:

$$\underline{a}_1 \cdot x_1 + \underline{a}_2 \cdot x_2 + \ldots + \underline{a}_n \cdot x_n = \underline{b}$$

- Jelölések:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$ együtthatómátrix, $$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Tömör alak:

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek

- Homogén egyenletrendszer:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert homogénnek nevezzük, ha $\underline{b} = \underline{o}$.

- Inhomogén egyenletrendszer:

Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert inhomogénnek nevezzük, ha $\underline{b} \neq \underline{o}$.

- Megjegyzések:
  - Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, az $\underline{x} = \underline{o}$ megoldásvektort triviális megoldásnak nevezzük.
  - Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszert konzisztensnek nevezzük, ha megoldható, inkonzisztensnek, ha nem oldható meg.

A megoldhatóság feltétele (állítások)

- Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele:

1. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lin. egyenletrendszer megoldható $\Leftrightarrow$ a $\underline{b}$ vektor előáll az A együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjával.
2. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lin. egyenletrendszer megoldható $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,([A,\underline{b}])$, ahol $[A,\underline{b}]$ az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$[A,\underline{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m \times (n+1)}.$$

Lin. egyenletrendszer megoldása

- Lin. egyenletrendszer megoldása :

Tegyük fel, hogy az $A\cdot\underline{x} = \underline{b}$ lin. egyenletrendszer megoldható, azaz $\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,([A,\underline{b}]) = k$.

Jelölje $B_{m\times k}$ az A együtthatómátrix k db lin. független oszlopvektorából felépülő mátrixot, továbbá $R_{m\times(n-k)}$ az A együtthatómátrix maradék n-k db oszlopvektorából felépülő mátrixot. A megfelelő indexű ismeretlenek alkossák az $\underline{x}_B$ és $\underline{x}_R$ vektorokat. Ekkor:

$$B\cdot\underline{x}_B + R\cdot\underline{x}_R = \underline{b}$$

Lin. egyenletrendszer megoldása (folyt.)

Mivel a B oszlopvektorai az A együtthatómátrix oszlopvektorainak egy maximális lin. független részhalmazát képezik, így az R oszlopvektorai és a $\underline{b}$ vektor előállnak a B oszlopvektorainak lineáris kombinációjával. Ezért van olyan D mátrix és $\underline{d}$ vektor, melyekre:

$R = B \cdot D$ és $\underline{b} = B \cdot \underline{d}$, ahol:

- a D mátrix az R oszlopvektorainak a B oszlopvektoraira vonatkozó koordinátáit tartalmazza,
- a $\underline{d}$ vektor a $\underline{b}$ vektornak a B oszlopvektoraira vonatkozó koordinátáit tartalmazza.

Így:

$B \cdot \underline{x}_B + B \cdot D \cdot \underline{x}_R = B \cdot \underline{d}$, ebből: $B(\underline{x}_B + D \cdot \underline{x}_R - \underline{d}) = \underline{o}$.

Lin. egyenletrendszer „megoldó képlete”

Innen, mivel B oszlopvektorai lin. függetlenek:

$$\underline{x}_B + D \cdot \underline{x}_R - \underline{d} = \underline{o}$$, azaz:

$$\boxed{\underline{x}_B = \underline{d} - D \cdot \underline{x}_R}$$ „megoldó képlet”

- $\underline{x}_B$: a kötött ismeretlenek vektora
- $\underline{x}_R$: a szabad ismeretlenek vektora

A szabad ismeretlenek számát az egyenletrendszer szabadsági fokának hívjuk.

Megoldásvektorok száma

- Homogén lin. egyenletrendszer megoldásvektorainak számára vonatkozó állítások:

1. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek csak triviális megoldása van $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A) = n$, ahol n az ismeretlenek száma.
2. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek van triviálistól különböző megoldása is $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A) < n$, ahol n az ismeretlenek száma.

Megjegyzés: ebben az esetben az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van.

Homogén-inhomogén egyenletrendszer-pár

- Homogén-inhomogén egyenletrendszer megoldás-halmazai közötti kapcsolat:

  Tekintsük az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ és $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ homogén-inhomogén egyenletrendszer-párt. Jelölje

  - M_0 a homogén egyenletrendszer megoldáshal-mazát,
  - M az inhomogén egyenletrendszer megoldáshal-mazát,
  - $\underline{x}_0$ az inhomogén egyenletrendszer egy rögzített megoldásvektorát.

  Ekkor: $M = M_0 + \{\underline{x}_0\}$.

Lineáris egyenletrendszerek: összefoglalás

Megoldásvektorok száma	Homogén lin. e.r. $A_{m\times n}\cdot\underline{x} = \underline{o}$	Inhomogén lin. e.r. $A_{m\times n}\cdot\underline{x} = \underline{b}$
Nincs megoldás (Az e. r. nem oldható meg.)	-------	$\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A,\underline{b}])$ $M = \emptyset$
1 db. megoldásvektor (Az e.r. egyértelműen megoldható.)	$\mathrm{r}(A) = n$ $M_0 = \{\underline{o}\}$	$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A,\underline{b}]) = n$ $M = \{\underline{x}_0\}$
Végtelen sok megoldásvektor	$\mathrm{r}(A) < n$ M_0	$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A,\underline{b}]) < n$ $M = M_0+\{\underline{x}_0\}$

A Cramer-szabály

Tekintsük az $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lin. egyenletrendszert, ahol az A együtthatómátrix négyzetes: $A = [\underline{a}_1 \;\; \underline{a}_2 \;\; \ldots \;\; \underline{a}_\mathrm{n}]_{n\times n}$.

Legyen

- $D = \det(A)$,
- $D_1 = \det([\underline{b} \;\; \underline{a}_2 \;\; \ldots \;\; \underline{a}_\mathrm{n}])$,
- $D_2 = \det([\underline{a}_1 \;\; \underline{b} \;\; \ldots \;\; \underline{a}_\mathrm{n}])$,

  …
- $D_n = \det([\underline{a}_1 \;\; \underline{a}_2 \;\; \ldots \;\; \underline{b}])$.

Ekkor:

$$D \cdot x_k = D_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

A Cramer-szabály következményei

- Következmények:

1. Ha $D \neq 0$, akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható és a megoldásvektor k-adik komponense: $x_k = D_k / D, \quad k = 1, \ldots, n.$
2. Ha $D=0$ és valamely k-ra $D_k \neq 0$, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.
3. Ha $D=D_1= \ldots =D_n= 0$ és $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A,\underline{b}])$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van.

   (Ebben az esetben a megoldásvektorok előállítására a Cramer-szabály nem alkalmas.)

A Cramer-szabály következményei (folyt.)

4. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek csak triviális megoldása van $\Leftrightarrow D \neq 0$.
5. Az $A \cdot \underline{x} = \underline{o}$ homogén lin. egyenletrendszernek létezik triviálistól különböző megoldása is $\Leftrightarrow D = 0$.

   (Ebben az esetben az egyenletrendszernek végtelen sok megoldásvektora van, de ezeket a Cramer-szabállyal nem tudjuk előállítani.)