Az R^n vektortér

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Rendezett szám n-esek

- Rendezett szám n-esek:
  - $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
  - $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, a rendezett szám n-es komponensei
- R^n : a valós számokból képezett rendezett szám n-esek halmaza
- Két rendezett szám n-es egyenlő, ha a megfelelő komponenseik megegyeznek.

Műveletek rendezett n-esekkel

- Alapműveletek:
  - Két rendezett n-es összege:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in R^n$, akkor

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots\ , a_n + b_n).$$

  - Egy rendezett n-es λ-szorosa:

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ és $\lambda \in R$, akkor

$$\lambda \cdot \underline{a} = (\lambda \cdot a_1,\ \lambda \cdot a_2,\ \ldots\ , \lambda \cdot a_n)\ .$$

- Két rendezett n-es különbsége: (származtatott művelet)

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-1) \cdot \underline{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \ldots\ , a_n - b_n).$$

Az alapműveletek tulajdonságai

- Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c} \in R^n$ tetszőleges rendezett n-esek, valamint $\lambda, \mu \in R$ tetszőleges valós számok. Ekkor:

1. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ (asszociativitás)
2. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (kommutativitás)
3. Létezik olyan $\underline{o} \in R^n$ rendezett n-es, hogy bármely $\underline{a} \in R^n$ esetén $\underline{a} + \underline{o} = \underline{a}$. (nullelem létezése)
4. Bármely $\underline{a} \in R^n$ esetén létezik olyan $\underline{a}' \in R^n$, hogy $\underline{a} + \underline{a}' = \underline{o}$, ahol $\underline{a}' = (-1) \cdot \underline{a}$, az $\underline{a}$ ellentettje. (ellentett létezése)
5. $(\lambda + \mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a}$
6. $\lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b}$
7. $\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{a}$
8. $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$

Az R^n vektortér

Megjegyzés:

- Mivel az $(R^n, +, \cdot)$ algebrai struktúrában teljesül a vektorterekre jellemző előző nyolc alaptulajdonság (vektortér-axiómák), ezért R^n-t n-dimenziós valós vektortérnek vagy n-dimenziós euklideszi vektortérnek nevezzük, R^n elemeit n-dimenziós vektoroknak hívjuk.

Lineáris kombináció

- Vektorok lineáris kombinációja

  Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ n-dimenziós vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ skalárok.

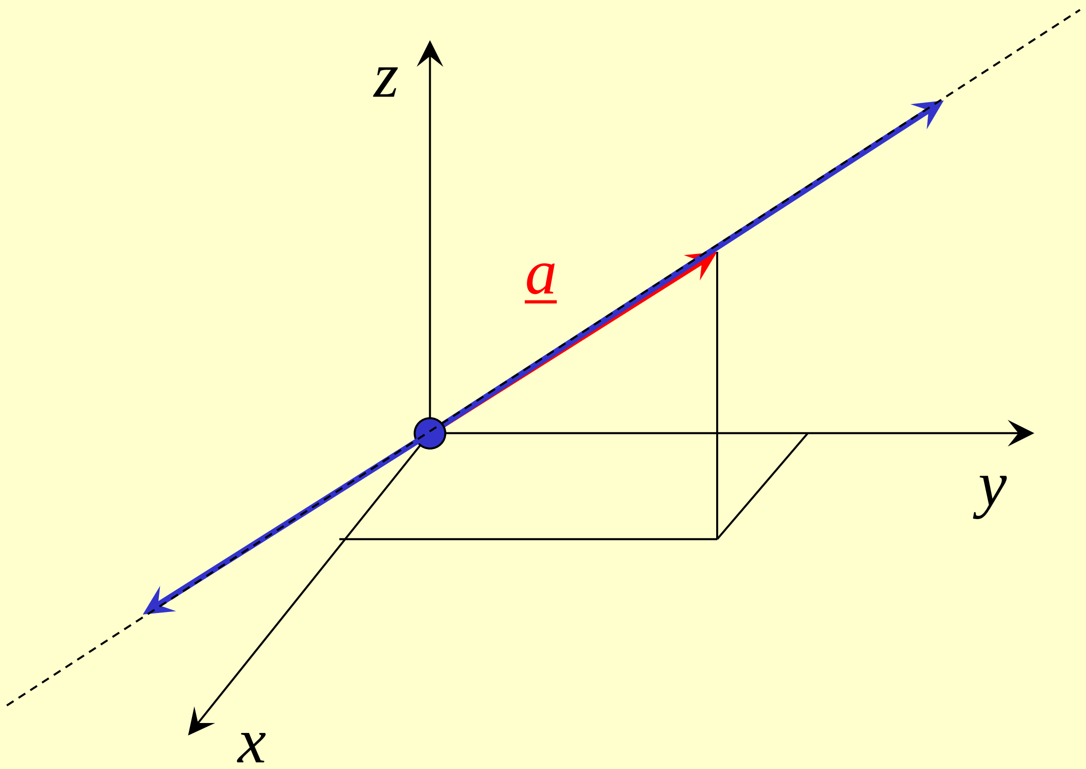
  Ekkor a $\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k \in R^n$ vektort az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

- Triviális lineáris kombináció

  Ha a lineáris kombinációban az összes skalár nulla, akkor triviális lineáris kombinációról beszélünk.

  Triviális lineáris kombináció eredménye (bármilyen $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok esetén) mindig nullvektor.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 1.



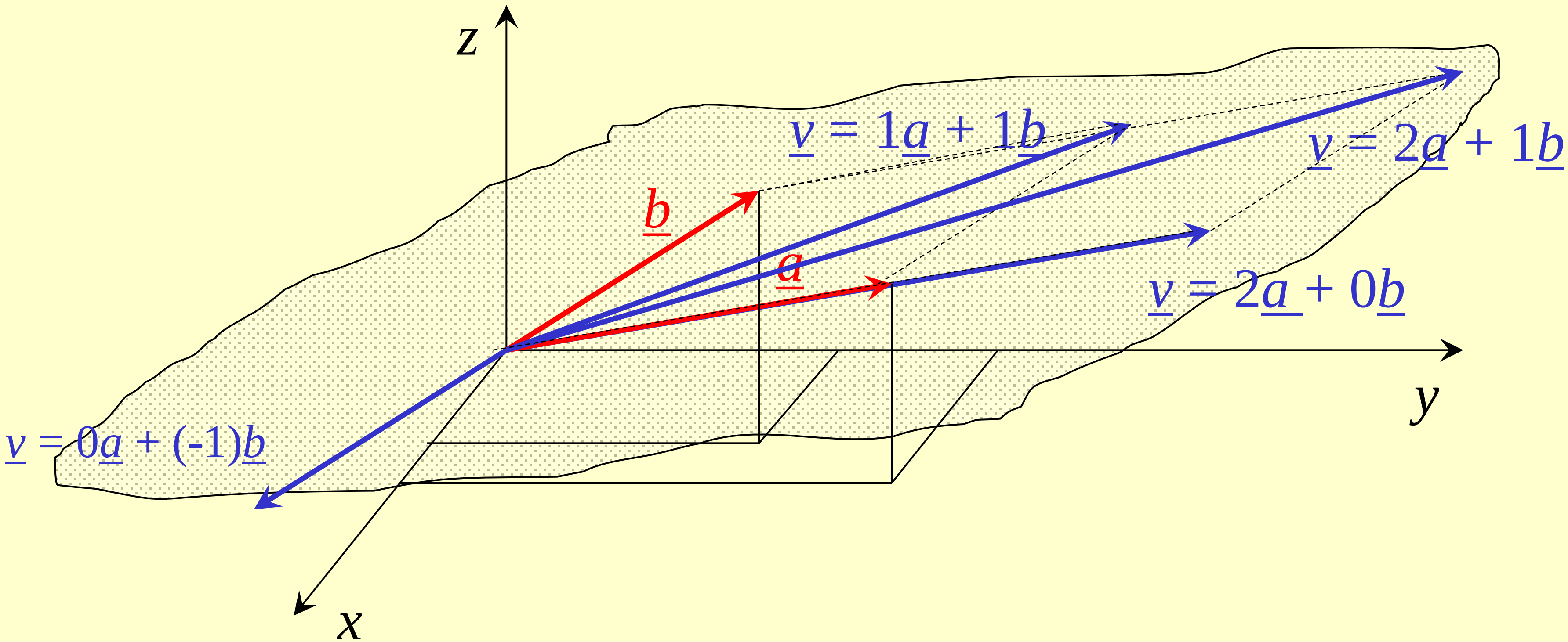
$\underline{v} = 2\underline{a}$

$\underline{v} = 0\underline{a}$

$\underline{v} = -1\underline{a}$

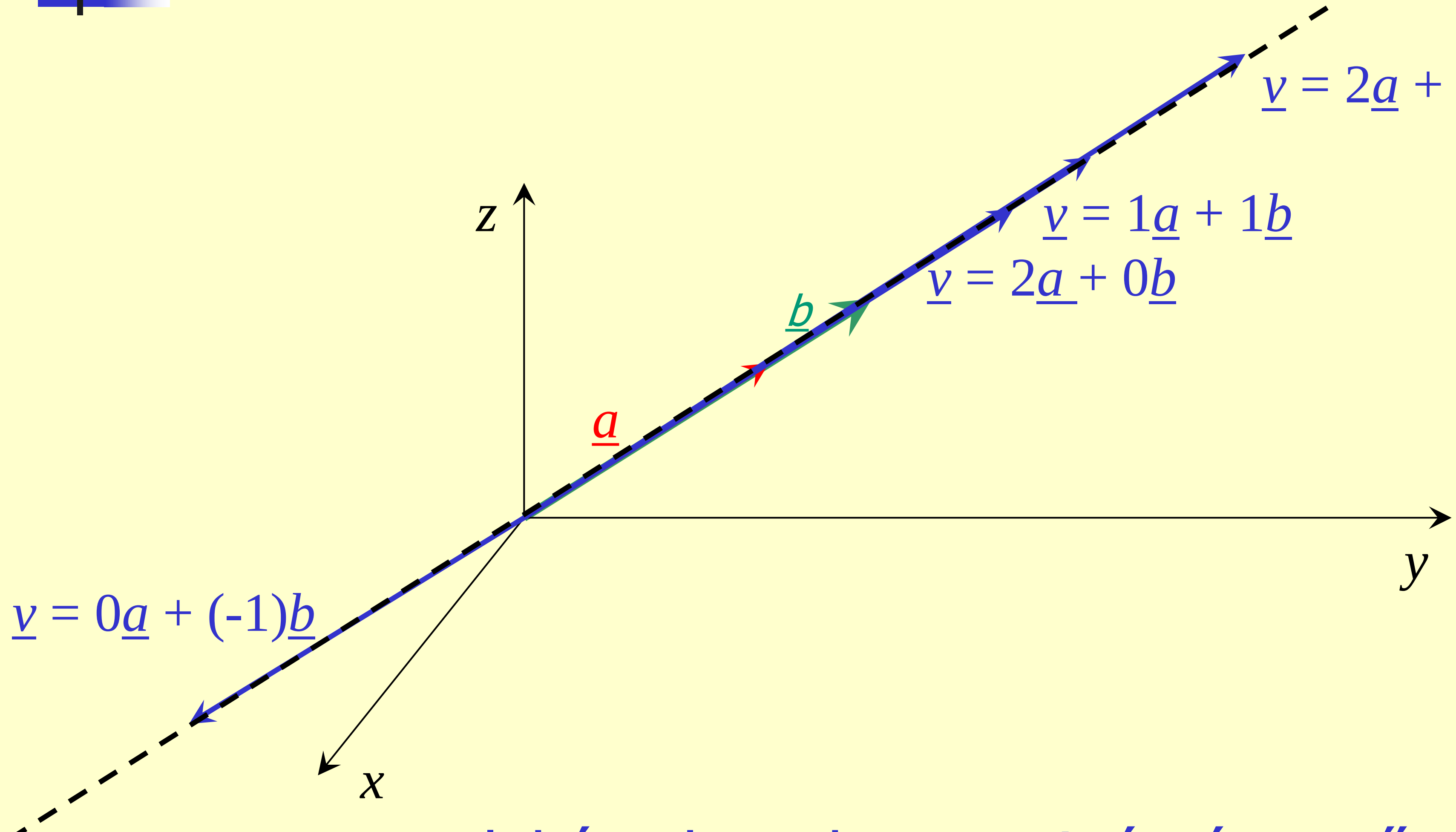
A $\underline{v} = \lambda \cdot \underline{a}$ alakú vektorok egy origón átmenő $\underline{a}$ irányvektorú egyenesre esnek.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 2.



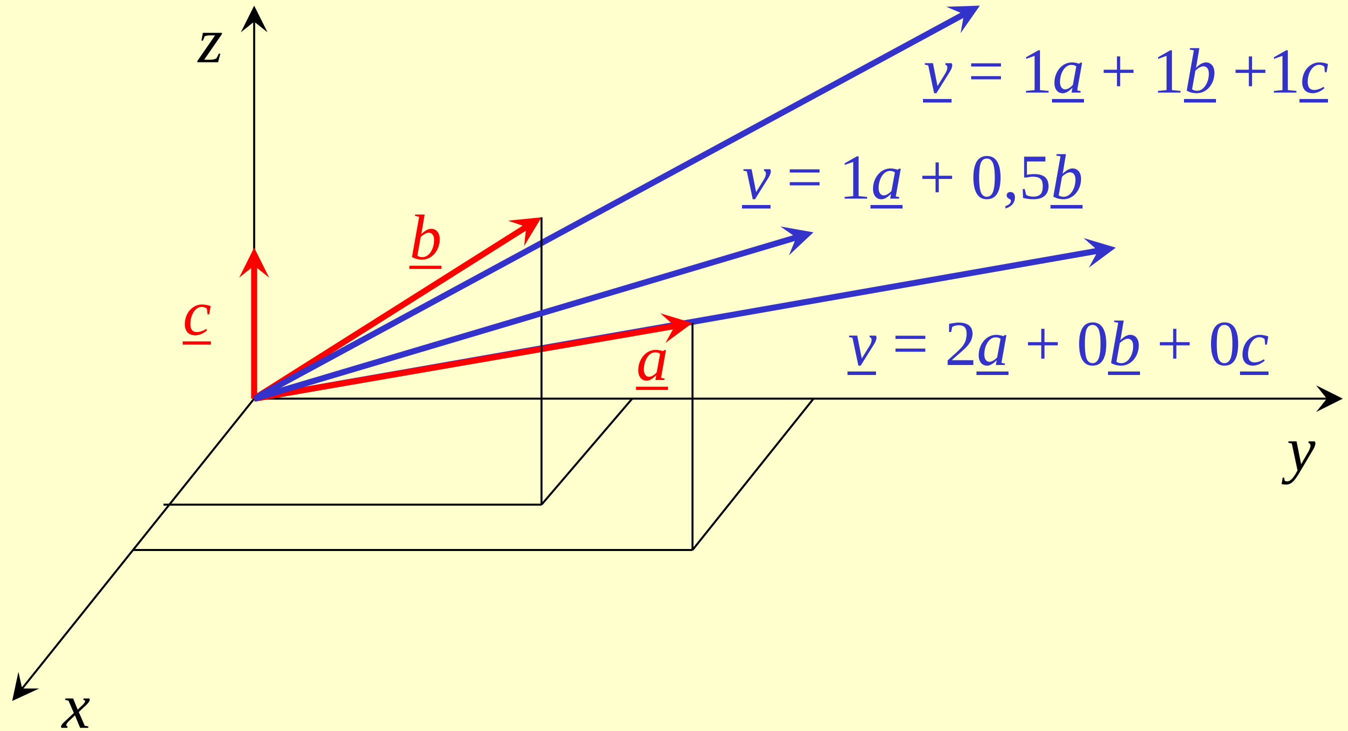
A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b}$ alakú vektorok egy origón átmenő $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített síkra esnek.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 3.



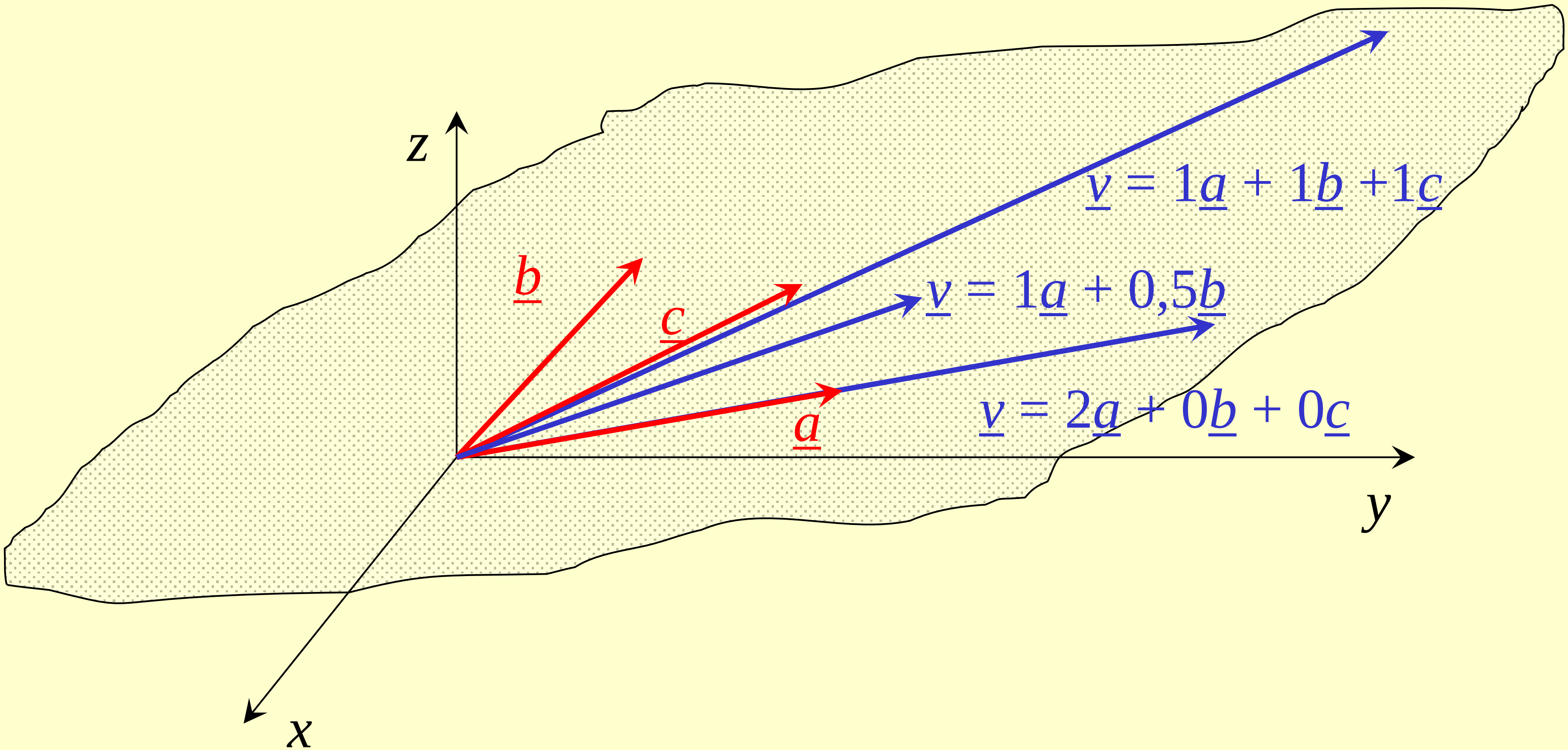
A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b}$ alakú vektorok egy origón átmenő egyenesre esnek, amelynek az irányvektora az $\underline{a}$ vagy a $\underline{b}$ vektor.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 4.



A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} + \lambda_3 \cdot \underline{c}$ alakú vektorok kitöltik a teljes teret.

Lineáris kombináció geometriai szemléltetése 5.



A $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} + \lambda_3 \cdot \underline{c}$ alakú vektorok az origón átmenő $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített síkra esnek.

Lineáris függetlenség és összefüggőség

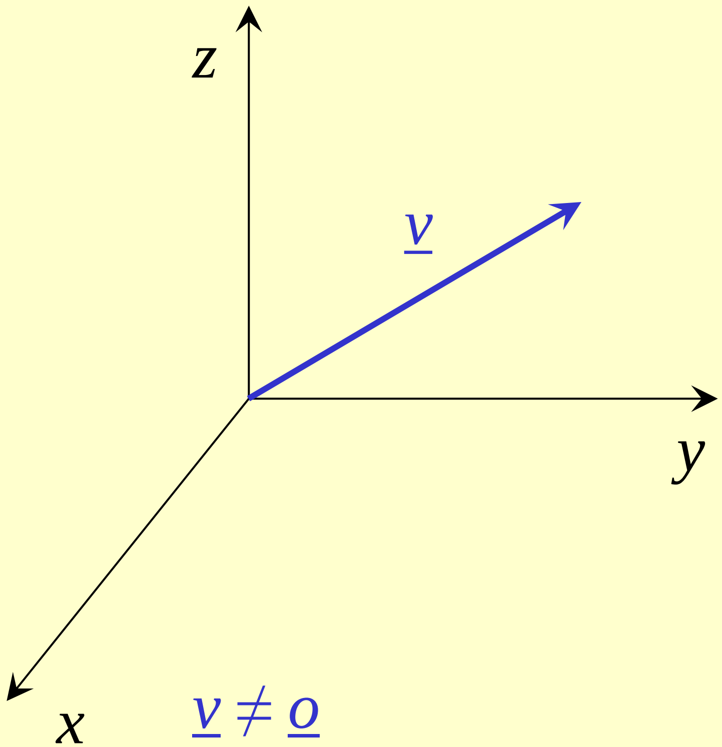
- Lineárisan független vektorok:

  Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorokat lineárisan függetlenek-nek nevezzük, ha belőlük csak triviális lineáris kom-binációval (csupa nulla együtthatóval) állítható elő a nullvektor.

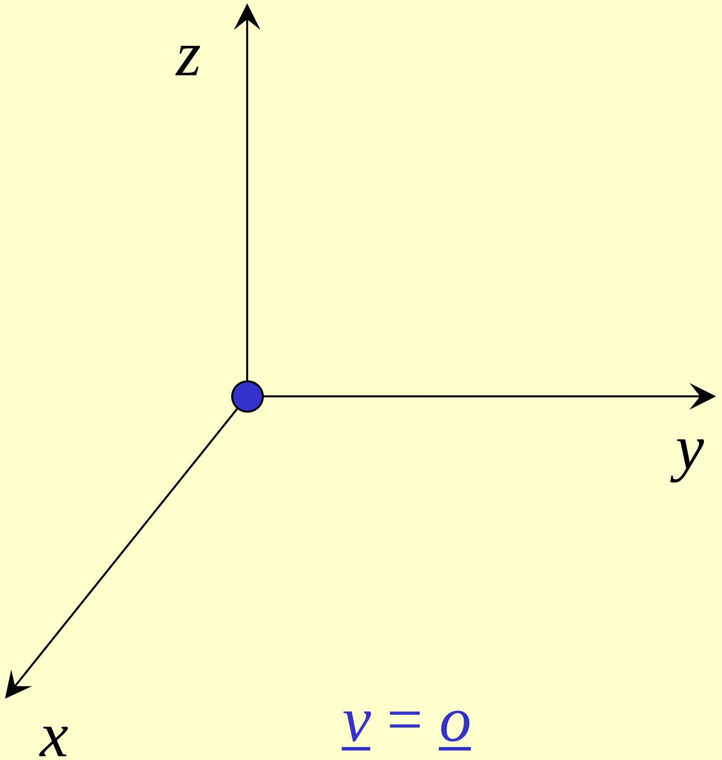
- Lineárisan összefüggő vektorok:

  Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorokat lineárisan összefüggő-eknek hívjuk, ha belőlük nem triviális lineáris kom-binációval is előállítható a nullvektor.

- 1 vektor esetén



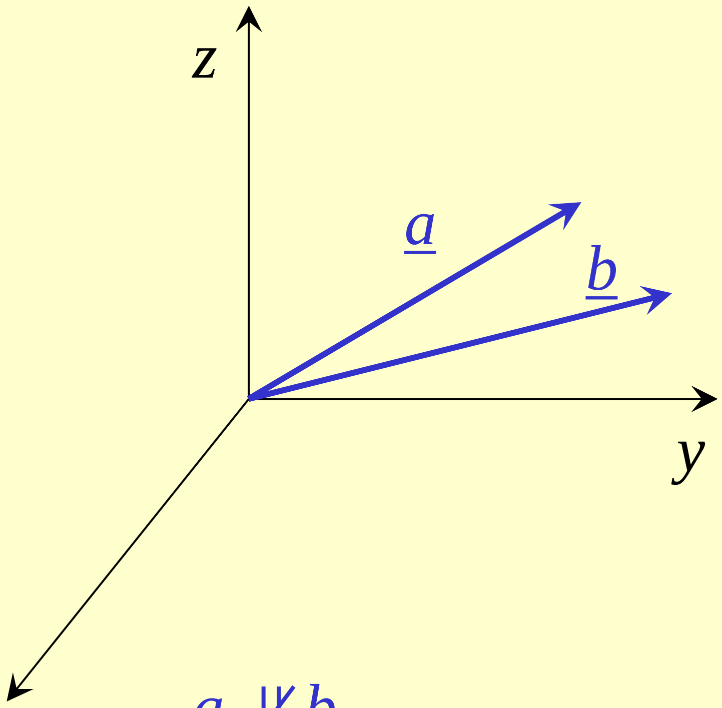
lineárisan független



lineárisan összefüggő

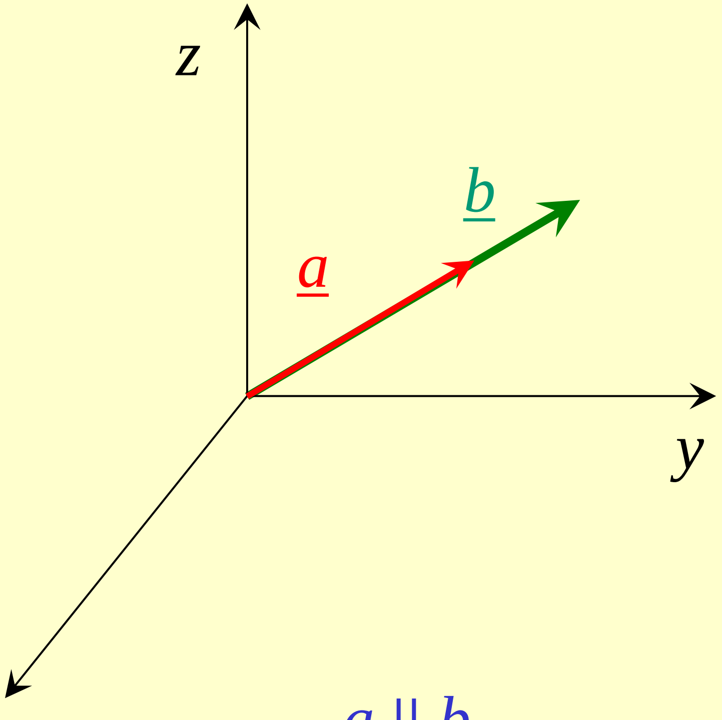
Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

- 2 vektor esetén



$\underline{a} \nparallel \underline{b}$

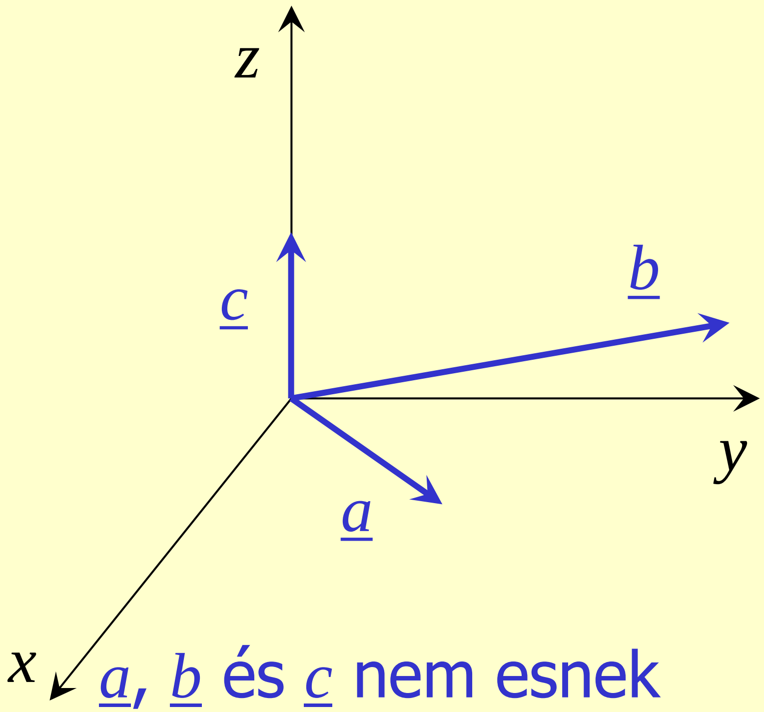
lineárisan független



$\underline{a} \parallel \underline{b}$

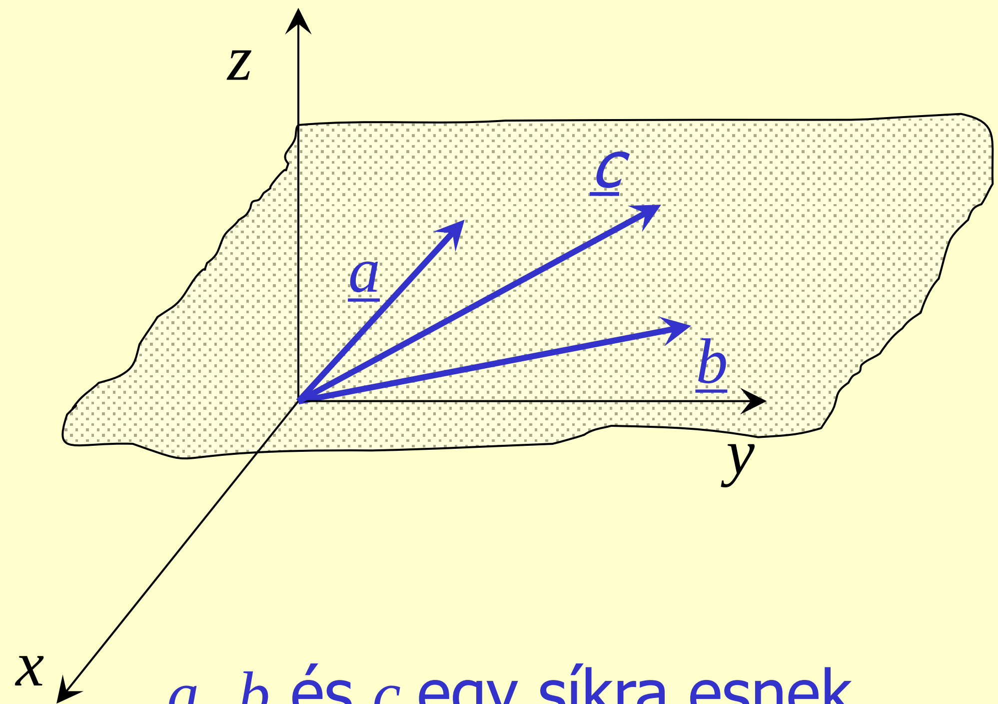
lineárisan összefüggő

- 3 vektor esetén



$\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ nem esnek egy síkra

lineárisan független



$\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ egy síkra esnek

lineárisan összefüggő

Lin. függetlenség és összefüggőség geometriai szemléltetése az R^3 térben

- 4 vagy több vektor esetén

Az R^3 térben 4 vagy több vektor mindig lineárisan összefüggő.

Lin. függetlenség ill. összefüggőség: állítások

1. Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorok pontosan akkor lineárisan összefüggőek, ha valamelyikük előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
2. Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha egyikük sem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként.
3. Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \in R^n$ vektorok pontosan akkor lin. függetlenek, ha az R^n vektortér bármely vektora *legfeljebb* csak egy féle képpen áll elő az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lin. kombinációjával.
4. Ha egy vektorhalmazban szerepel a nullvektor, akkor az lineárisan összefüggő.
5. Lin. független vektorhalmaz részhalmaza is lin. független.
6. Lin. összefüggő vektorhalmazt bővítve az összefüggőség megőrződik.
7. Az R^n vektortérben n+1 db vektor mindig lin. összefüggő.

Vektorhalmaz rangja

- Vektorhalmaz rangja: Az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\} \subseteq R^n$ vektorhalmaz rangja r, ha a vektorok közül kiválasztható r darab lin. független vektor, de bármely $r+1$ darab vektor már lin. összefüggő.

- Megjegyzések:
  - A rang megmutatja, hogy az adott vektorok közül maximálisan hány darab lin. független vektort tudunk kiválasztani.
  - Az R^n vektortérben bármely vektorhalmaz rangja kisebb vagy egyenlő, mint n.
  - Lineárisan független vektorhalmaz rangja megegyezik a vektorhalmazban lévő vektorok számával.

Vektorhalmaz rangjára vonatkozó állítások

Legyen $H \subseteq R^n$ egy vektorhalmaz.

1. Ha a H vektorhalmaz rangja r és az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \in H$ vektorok lin. függetlenek (azaz egy maximális lin. független részrendszert alkotnak H -ban), akkor a H vektorhalmaz valamennyi vektora előáll az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineáris kombinációjával.
2. Ha a H vektorhalmaz valamennyi vektora előáll r darab rögzített R^n-beli vektor lin. kombinációjával, akkor a H vektorhalmaz rangja $\leq r$.

Generátorrendszer, bázis

- Generátorrendszer: Legyen $G \subseteq R^n$ egy vektorhalmaz. G generátorrendszer az R^n vektortérben, ha G elemeiből lineáris kombinációval az R^n vektortér bármely vektora előállítható.
- Bázis: Legyen $B \subseteq R^n$ egy vektorhalmaz, amely
  - lineárisan független és
  - generátorrendszer.

  Ekkor a B-t az R^n vektortér egy bázisának hívjuk.

A kanonikus (standard) bázis

- Példa bázisra

  kanonikus (standard) bázis:

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \ldots ,0)\ ,\ \ \underline{e}_2 = (0, 1, \ldots ,0)\ ,\ \ \ldots\ \ ,\ \underline{e}_n = (0, 0, \ldots ,1)$$

- Megjegyzés

  Egy $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots ,x_n)$ R^n–beli vektornak a kanonikus bázisra vonatkozó előállítása:

$$\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + x_2 \cdot \underline{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \underline{e}_n$$

A Steiniz-féle kicserélési tétel

A Steiniz-féle kicserélési tétel:

Legyen L egy lin. független vektorhalmaz, G pedig egy generátorrendszer az R^n vektortérben.

Ekkor az L vektorhalmaz minden $\underline{v}$ vektorához található olyan $\underline{g} \in G$ vektor, hogy a $(L \setminus \{\underline{v}\}) \cup \{\underline{g}\}$ vektorhalmaz is lineárisan független.

Következmények:

1. L-nek legfeljebb annyi vektora lehet, mint G-nek:

$$|L| \leq |G| \; .$$

2. Ha L lin. független vektorhalmaz, B bázis, G generátorrendszer R^n –ben, akkor

$$|L| \leq |B| \leq |G| \; .$$

Bázis, dimenzió, koordináták

Bázisokra vonatkozó állítások:

1. R^n-ben minden bázis ugyanannyi vektorból áll.
2. R^n-ben minden bázis n darab vektorból áll.

   Ezt a számot hívjuk az R^n vektortér dimenziójának.
3. R^n-ben bármely n darab lineárisan független vektor bázist alkot.
4. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázis R^n-ben . Ekkor bármely $\underline{x} \in R^n$ vektor *egyértelműen* előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjával:

   $$\underline{x} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{b}_n$$

   Ekkor a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ számokat az $\underline{x}$ vektor B bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

   Megjegyzés: Bármely $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ R^n–beli vektornak a kanonikus bázisra vonatkozó koordinátái maguk a vektorkomponensek.

Elemi bázistranszformáció

- Elemi bázistranszformáció

  Legyen $B=\{\underline{b}_1, \dots ,\underline{b}_n\}$ egy bázis R^n-ben, $\underline{c} \in R^n$, $\underline{c} \neq \underline{o}$.

  Ekkor a B bázis vektorai között van olyan, amely kicserélhető a $\underline{c}$ vektorral úgy, hogy a vektorcsere után is bázist kapjunk.

  Az új bázisra vonatkozó koordináták számolásának algoritmusát elemi bázistranszformációnak nevezzük.

Az új koordináták számolása

- Legyen az $\underline{x}$ vektor B bázisra vonatkozó előállítása:

  $$\underline{x} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{b}_n$$

  Legyen a $\underline{c}$ vektor B bázisra vonatkozó előállítása:

  $$\underline{c} = \gamma_1 \underline{b}_1 + \gamma_2 \underline{b}_2 + \ldots + \gamma_n \underline{b}_n$$

  Tegyük fel, hogy $\gamma_i \neq 0$.

  Cseréljük ki a B bázisban a $\underline{b}_i$ vektort a $\underline{c}$ vektorral.

  Ekkor az $\underline{x}$ vektor új bázisra vonatkozó koordinátái:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\lambda}_j &= \lambda_j - \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \cdot \gamma_j \qquad\qquad j \neq i \\ \hat{\lambda}_i &= \frac{\lambda_i}{\gamma_i} = \delta \end{aligned}}$$

Bázistranszformációs táblázat

- A régi és az új koordináták táblázatos elrendezése:

$$\begin{array}{c|cc}
 & \underline{c} & \underline{x} \\
\hline
\underline{b}_1 & \gamma_1 & \lambda_1 \\
\underline{b}_2 & \gamma_2 & \lambda_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{b}_i & \gamma_i & \lambda_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{b}_n & \gamma_n & \lambda_n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{c} & \underline{x} \\
\hline
\underline{b}_1 & 0 & \lambda_1 - \delta\cdot\gamma_1 \\
\underline{b}_2 & 0 & \lambda_2 - \delta\cdot\gamma_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{c} & 1 & \delta \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{b}_n & 0 & \lambda_n - \delta\cdot\gamma_n
\end{array}$$

- A γ_i számot generálóelemnek hívjuk.

Alterek az R^n vektortérben

- Altér: A $H \subseteq R^n$ vektorhalmazt altérnek hívjuk az R^n vektortérben, ha bármely $\underline{a}, \underline{b} \in H$ vektorok és bármely $\lambda \in R$ esetén $\underline{a} + \underline{b} \in H$ és $\lambda \cdot \underline{a} \in H$ is teljesül.

  H zárt a vektorműveletekre.
- Triviális alterek

  A $H = \{\underline{o}\}$ és $H = R^n$ esetekben teljesül a fenti definíció, ezeket az altereket az R^n vektortér triviális (nem valódi) altereinek hívjuk.
- Megjegyzések:
  - R^n minden altere tartalmazza a nullvektort.
  - Alterekre is értelmezhető (analóg módon) a bázis és a dimenzió fogalma.

Alterek az R^3 térben

- $H = \{\underline{o}\}$: 0-dimenziós, triviális altér.
- Legyen $\underline{v} \in R^3$, $\underline{v} \neq \underline{o}$ rögzített.

  $H = \{\lambda \cdot \underline{v} \mid \lambda \in R\}$: origón átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenesre eső vektorok összessége.
  1-dimenziós altér.
- Legyen $\underline{a}, \underline{b} \in R^3$ két lineárisan független vektor.

  $H = \{\lambda_1 \cdot \underline{a} + \lambda_2 \cdot \underline{b} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$: origón átmenő, az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra eső vektorok összessége. 2-dimenziós altér.
- $H = R^3$: 3-dimenziós, triviális altér.

Vektorhalmazok összege

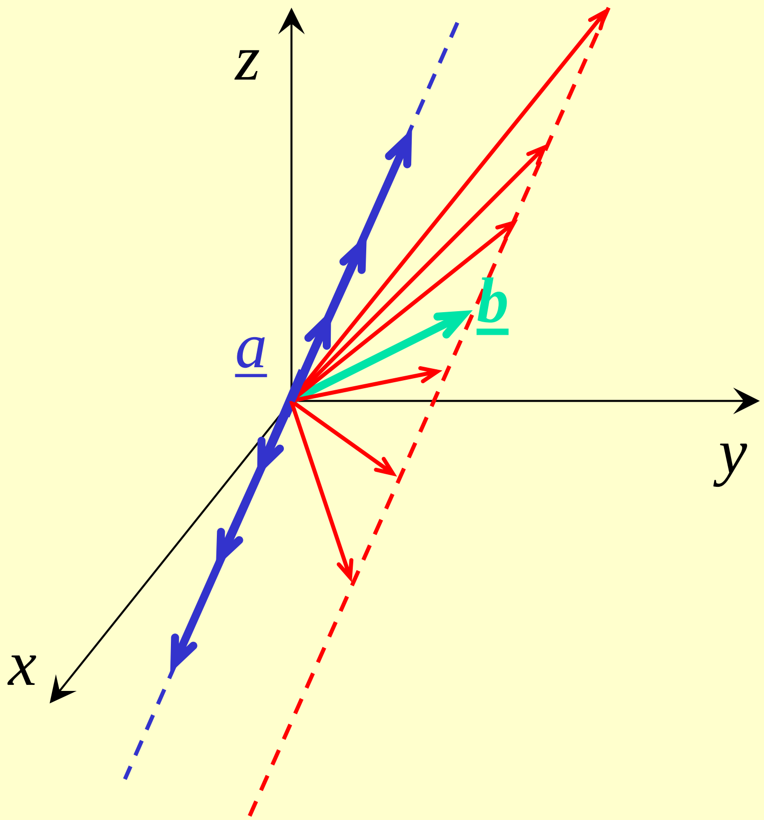
Legyen A és B két R^n–beli vektorhalmaz. Ekkor A és B összege:

$$A + B := \{\underline{a}+\underline{b} \mid \underline{a}\in A \text{ és } \underline{b}\in B\}$$

Megjegyzés:

A fenti definíció a vektorhalmazok összegére NEM azonos az únió művelettel!

Példa vektorhalmazok összegére I.

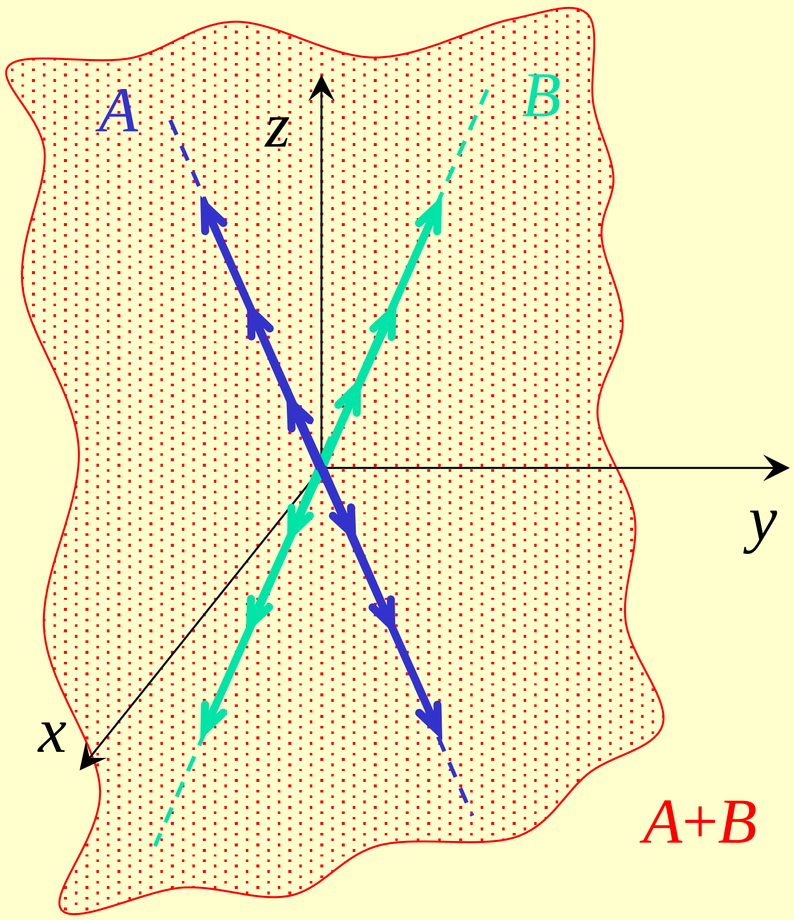


$A = \{\ \lambda \underline{a} \mid \lambda \in R\ \}$

$B = \{\ \underline{b}\ \}$

$A + B = \{\lambda\, \underline{a} + \underline{b} \mid \lambda \in R\ \}$

Példa vektorhalmazok összegére II.



$A = \{\ \lambda \underline{a} \mid \lambda \in R\ \}$

$B = \{\ \lambda \underline{b}' \mid \lambda \in R\ \}$

$A + B$: a két egyenes által meghatározott síkra eső helyvektorok összessége

Alterekre vonatkozó állítások

1. Ha V_1 és V_2 két altér az R^n vektortérben, akkor $V_1 \cap V_2$ és $V_1 + V_2$ is altér R^n–ben.
2. Legyenek $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ R^n–beli vektorok. Ekkor a
$$V = \{\lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{a}_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in R\}$$
vektorhalmaz altér R^n–ben, mégpedig a legszűkebb olyan altér, amely tartalmazza az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorokat.

Megjegyzés:

Ezt a V alteret az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok generátumának, vagy lineáris lezártjának nevezzük, jelölése: $\mathcal{L}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k)$.

Alterek direkt összege

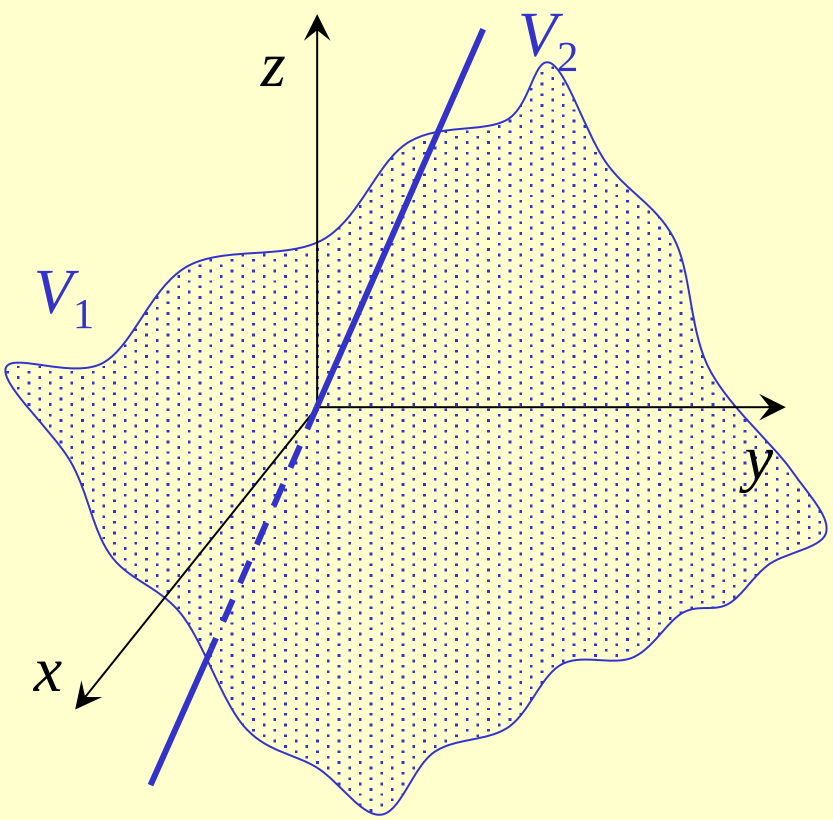
Az R^n vektortér direkt összege a $V_1, \dots, V_k$ altereknek, ha bármely R^n–beli vektor pontosan egy féle képpen írható fel $\underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_k$ alakban, ahol $\underline{v}_1 \in V_1, \dots, \underline{v}_k \in V_k$.

Jelölés: $R^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$

Megjegyzés:

azaz, minden R^n–beli vektor egyértelműen felbontható az alterekbe eső összetevőkre.

Példa alterek összegére, direkt összegére I.

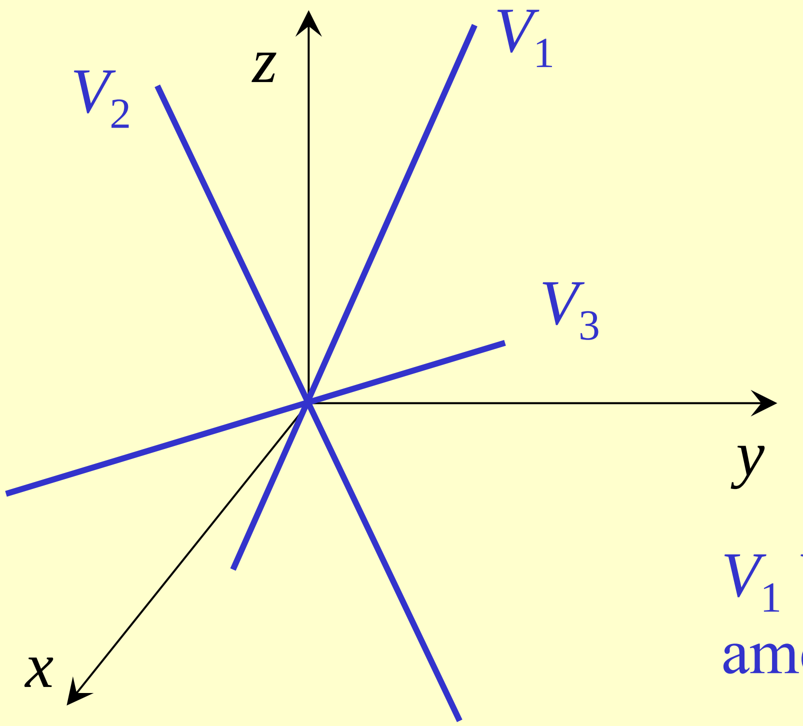


V_1 : origón átmenő sík

V_2 : origón átmenő egyenes,
$V_2 \not\subset V_1$

$V_1 + V_2 = R^3$, $V_1 \oplus V_2 = R^3$

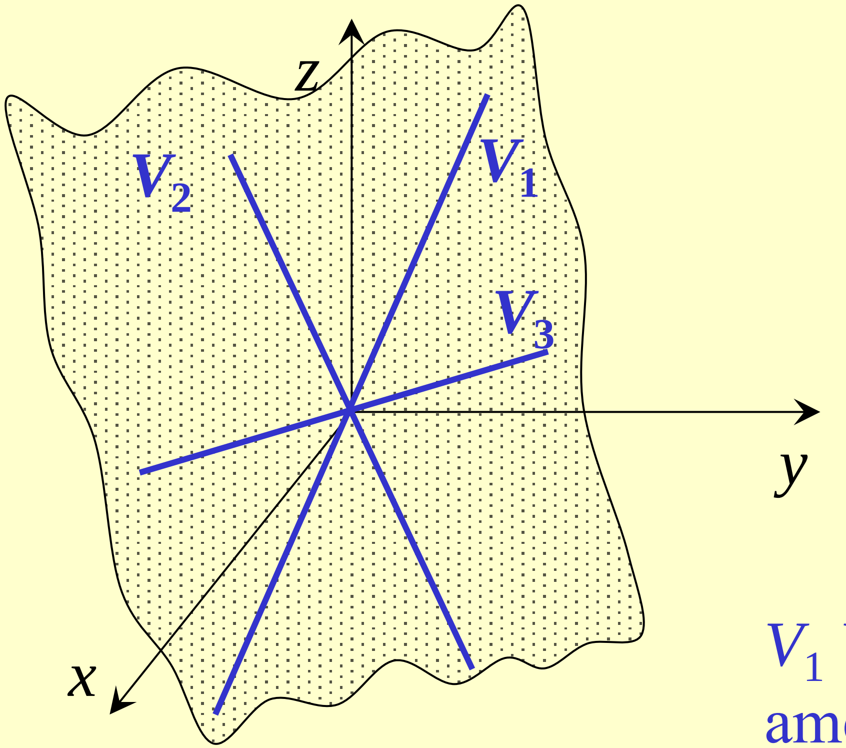
Példa alterek összegére, direkt összegére II.



V_1 V_2 és V_3 origón átmenő egyenesek, amelyek nincsenek egy síkban

$V_1 + V_2 + V_3 = R^3$ és $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = R^3$

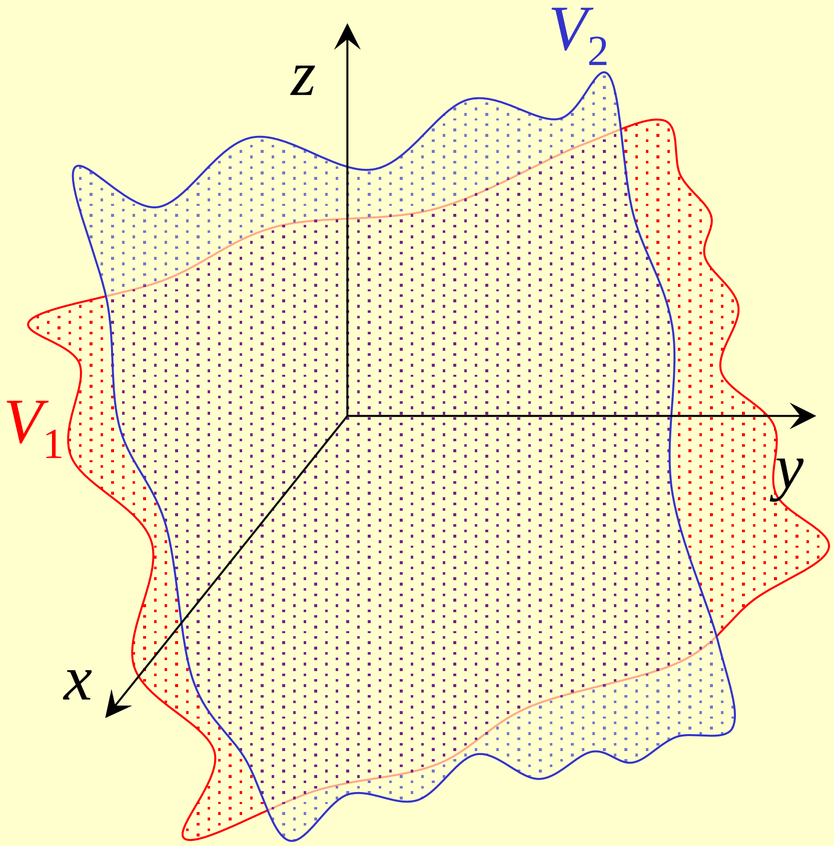
Példa alterek összegére, direkt összegére III.



V_1 V_2 és V_3 origón átmenő egyenesek, amelyek egy síkra esnek

$V_1 + V_2 + V_3 \neq R^3$, így $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \neq R^3$

Példa alterek összegére, direkt összegére IV.



V_1 és V_2 két egymást metsző, origón átmenő sík

$V_1 + V_2 = R^3$, de $V_1 \oplus V_2 \neq R^3$

Direkt összegre vonatkozó állítások

Legyenek $V_1, \ldots, V_k$ alterek az R^n vektortérben.

1. $R^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \Rightarrow \dim(V_1) + \ldots + \dim(V_k) = n$

   Ez az állítás NEM megfordítható, szükséges, de nem elégséges feltétel!

2. $R^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \Leftrightarrow$ a $V_1, \ldots, V_k$ alterek bázisainak úniója bázist alkot az R^n vektortérben.

3. $R^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \Leftrightarrow R^n = V_1 + \ldots + V_k$ és bármely $i = 1, \ldots, k$ esetén $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = \{\underline{o}\}$.

   Speciálisan $k = 2$-re:

   $R^n = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow R^n = V_1 + V_2$ és $V_1 \cap V_2 = \{\underline{o}\}$.

Egyenes és hipersík az R^n vektortérben

- Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{v} \in R^n$, $\underline{v} \neq \underline{o}$.

  A $V = \{\lambda\, \underline{v} \mid \lambda \in R\}$ alteret origón átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenesnek nevezzük.

  A $V + \{\underline{a}\} = \{\lambda\, \underline{v} + \underline{a} \mid \lambda \in R\}$ eltolt alteret az $\underline{a}$ ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenesnek nevezzük.

- Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_\mathrm{k} \in R^n$, $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_\mathrm{k}$ lin. független vektorok.

  A $V = \{\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_\mathrm{k} \cdot \underline{v}_\mathrm{k} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{k} \in R\}$

  alteret origón átmenő, k-dimenziós hipersíknak nevezzük.

  A $V + \{\underline{a}\} = \{\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_\mathrm{k} \cdot \underline{v}_\mathrm{k} + \underline{a} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{k} \in R\}$ eltolt alteret az $\underline{a}$ ponton átmenő, k-dimenziós hipersíknak nevezzük.