Határozott integrál

Elmélet

A Riemann-integrál definíciója

Definition 1 (Definíció) *Az* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *intervallum felosztásán olyan véges* $\{x_0, ..., x_k\}$ *sorozatot értünk, amelyre*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

Definition 2 (Definíció) *Legyen adva egy korlátos* f *függvény az* $[a,b]$ *intervallumon és* $\Phi = \{x_0, ..., x_k\}$ *legyen* $[a,b]$ *egy felosztása. A korlátosság miatt minden* $i \in \{1, 2, ..., k\}$ *esetén az*

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]), \qquad M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

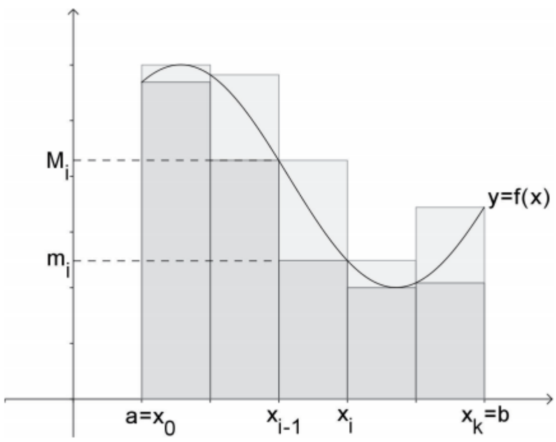
számok jól definiáltak. Az

$$s_\Phi = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f *függvény* Φ *felosztáshoz tartozó* ***alsó összeg****ének, az*

$$S_\Phi = \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f *függvény* Φ *felosztáshoz tartozó* ***felső összeg****ének nevezzük (lásd az alábbi ábrán).*



Ha f korlátos $[a,b]-$n, akkor $[a,b]$ bármely Φ felosztására

$$\inf f([a,b]) \cdot (b-a) \leq s_\Phi \leq S_\Phi \leq \sup f(([a,b]) \cdot (b-a).$$

Definition 3 (Definíció) *Bármely* $[a,b]-$*n korlátos* f *esetén legyen*

$$I_A = \sup\{s_\Phi | \Phi \text{ az } [a,b] \text{ felosztása}\},$$

és

$$I_F = \inf\{S_\Phi | \Phi \text{ az } [a,b] \text{ felosztása}\}.$$

Az I_A *számot az* f *függvény* ***(Darboux-féle) alsó integrál****jának , az* I_F *számot pedig* f ***(Darboux-féle) felső integrál****jának nevezzük.*

Definition 4 (Definíció) *Az f függvényt integrálhatónak mondjuk az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha f korlátos $[a,b]-n$ és $I_A = I_F$. Ekkor az $I = I_A = I_F$ közös értéket az f függvény $[a,b]-n$ vett* ***Riemann-féle határozott integrál****jának, vagy röviden* ***Riemann-integrál****jának nevezzük. Jele:*

$$\int_a^b f \text{ vagy } \int_a^b f(x)\,dx.$$

A Riemann-integrál tulajdonságai

Theorem 5 (Tétel) *Ha f és g integrálható az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon és α, β állandók, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható az $[a,b]-n$, és*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Theorem 6 (Tétel) *Ha f integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $c \in (a,b)$, akkor f integrálható $[a,c]-n$ és $[c,b]-n$ is, és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

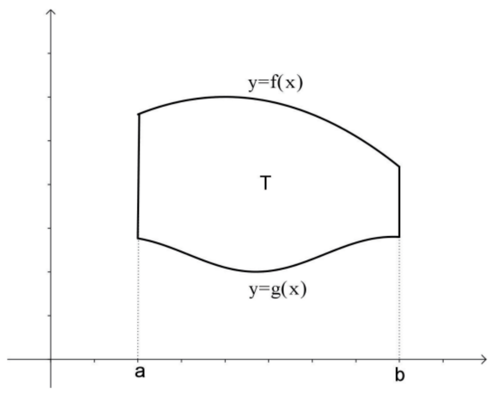
Theorem 7 (Tétel) *(Newton-Leibniz-szabály). Ha f integrálható az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, F folytonos $[a,b]-n$, továbbá F primitív függvénye $f-$nek $(a,b)-n$, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Definition 8 (Definíció) *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallum. Az $F(b) - F(a)$ különbséget az $[F(x)]_a^b$ szimbólummal jelöljük, és az F függvény $[a,b]$ intervallumon vett megváltozásának nevezzük.*

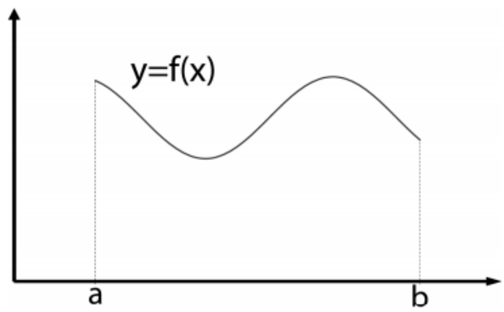
Theorem 9 (Tétel) *(Területszámítás). Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f és g olyan folytonos függvények $[a,b]-n$, amelyekre $g \leq f$ az $[a,b]-n$. Annak a síkidomnak a területe, amelyet felülről f grafikonja, alulról g grafikonja, oldalról pedig az $x = a$ és $x = b$ egyenesek határolnak (lásd az alábbi ábrán)*

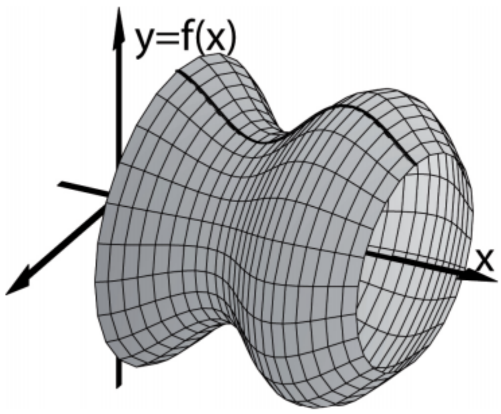
$$T = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



Theorem 10 (Tétel) *(Forgástest térfogata). Ha f nemnegatív folytonos függvény az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor annak a testnek a térfogata, amely f grafikonjának az $x-$tengely körüli megforgatásával keletkezik (lásd az alábbi ábrán)*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$





Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi integrált!

(a)

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx, \qquad \sqrt{x} = t \text{ helyettesítés,}$$

(b)

$$\int_1^e \ln^2(x)\,dx,$$

(c)

$$\int_0^1 x\left(2+x^2\right)^9 dx,$$

(d)

$$\int_0^1 x^2 \sin\left(x^3\right) dx,$$

(e)

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}+2}dx, \qquad \sqrt{x} = t \text{ helyettesítés,}$$

(f)

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x-1}{e^x+2}dx, \qquad e^x = t \text{ helyettesítés,}$$

(g)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{tg^3(x)+tg(x)}{tg^2(x)+2tg(x)+5}dx, \qquad tg(x) = t \text{ helyettesítés,}$$

(h)

$$\int_0^1 2x\operatorname{arctg}(x)\,dx,$$

(i)

$$\int_0^\pi x\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx,$$

(j)

$$\int_0^1 \frac{4x+1}{x^2+9}dx,$$

(k)

$$\int_0^1 x^2\left(1+x^3\right)^9 dx,$$

(l)

$$\int_0^1 x^2 e^{2x} dx,$$

(m)

$$\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx, \qquad \sqrt{x+1} = t \text{ helyettesítés},$$

(n)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+8} dx$$

(o)

$$\int_0^1 x^2 \left(1+x^3\right)^{20} dx,$$

(p)

$$\int_4^9 \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} dx, \qquad \sqrt{x} = t \text{ helyettesítés}.$$