Improprius integrál

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és tegyük fel, hogy f integrálható az (a, b) intervallum minden zárt részintervallumán. Azt mondjuk, hogy az f függvény improprius integrálja $(a, b)-$n konvergens, ha f valamely $c \in (a, b)$ helyhez tartozó*

$$G(x) = \int_c^x f, \quad \text{ha } x \in (a, b),$$

integrálfüggvényére a

$$\lim_{x \to a+} G(x) \text{ és } \lim_{x \to b-} G(x)$$

határérték létezik és véges. Ekkor az

$$I = \lim_{x \to b-} G(x) - \lim_{x \to a+} G(x) = \lim_{x \to b-} \int_c^x f - \lim_{x \to a+} \int_c^x f$$

számot az f függvény $(a, b)-$n vett improprius integráljának mondjuk, és az

$$\int_a^b f \text{ vagy } \int_a^b f(x)\, dx.$$

szimbólummal jelöljük. Ha f improprius integrálja $(a, b)-$n nem konvergens, akkor divergensnek mondjuk.

Az „improprius” latin eredetű szó jelentése „nem valódi”. Az, hogy az improprius integrál értékét ugyanazzal az $\int_a^b f$ szimbólummal jelöljük, mint a Riemann-integrált nem okoz zavart, mert igaz a következő.

Theorem 2 (Tétel) *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és f korlátos az $[a, b]-$n. Ekkor $f-$nek $(a, b)-$n pontosan akkor improprius integrálja az I szám, ha f (Riemann szerint) integrálható $[a, b]-$n, és integrálja I.*

Ha $a \in \mathbb{R}$ és f korlátos $a-$nak egy jobb oldali vagy bal oldali környezetében, akkor az improprius integrált egyszerűbben is jellemezhetjük.

Theorem 3 (Tétel) *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ $\left(a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}\right)$, $a < b$. Tegyük fel, hogy f korlátos $a-$nak egy jobb oldali ($b-$nek egy bal oldali) környezetében, továbbá f integrálható (a, b) minden zárt részintervallumán. Az f függvény $(a, b)-$n vett improprius integrálja pontosan akkor konvergens, ha a*

$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f \qquad \left(\lim_{x \to a+} \int_x^b f \right)$$

határérték létezik és véges, konvergencia esetén pedig

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f \qquad \left(\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f \right).$$

Feladatok

1. Konvergens-e az alábbi improprius integrál?

(a)
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx,$$

(b)
$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^3(x)} dx,$$

(c)
$$\int_0^1 \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx,$$

(d)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \ln(x)\, dx,$$

(e)
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)} dx, \qquad \sqrt{x} = t \text{ helyettesítés},$$

(f)
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4x+8} dx,$$

(g)
$$\int_0^1 \frac{1}{x \ln^2(x)} dx,$$

(h)
$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx, \qquad \sqrt{x} = t \text{ helyettesítés},$$

(i)
$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx,$$

(j)
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+2x+5} dx,$$

(k)
$$\int_{-1}^0 \frac{e^x}{1-e^x} dx,$$

(l)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx, \qquad \sqrt{x-1} = t \text{ helyettesítés,}$$

(m)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{3}{(x-2)(x-5)} dx$$

(n)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+6} dx,$$

(o)

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\left(\sqrt{4-2x}\right)} dx,$$

(p)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx.$$